Elemi matematika példatár tanároknak

Szerzők: Fried Katalin, Korándi József, Török Judit
Lektor: Vásárhelyi Éva
Szerkesztette: Fried Katalin

TÁMOP-4.1.2.B.2-13/1-2013-0007
Országos koordinációval a pedagógusképzés megújításáért

Tartalomjegyzék

Bevezetés . . . 7

I. Játékok . . . 9

Módszertani feladat . . . 11

I.1. Számlétra . . . 11

I.2. „Kavicsok” (gyufaszálak, babszemek, . . .) . . . 12

I.3. Barkochba . . . 15

I.4. Közvetítő játék . . . 17

I.5. Osztójáték . . . 17

II. Bűvésztrükkök . . . 21

Módszertani feladat . . . 21

II.1. Az 1001 bűvös tulajdonsága . . . 21

II.2. A középső számjegy 9 . . . 22

II.3. 1089 . . . 22

II.4. 9-es maradék . . . 22

II.5. 11-es maradék . . . 23

II.6. Páratlan szám négyzete . . . 23

II.7. 37-tel osztható hatjegyű szám . . . 24

II.8. Hány órára gondoltál? . . . 24

II.9. Mikor van a születésnapod? . . . 24

II.10. Ugyanannyi megfordított kártya . . . 25

II.11. Számkártyák sorrendbe rakódása . . . 25

II.12. Huszonegy kártya három kupacban . . . 25

II.13. Számkártyák . . . 25

III. Álbizonyítások és beugratók . . . 27

Módszertani feladat . . . 27

III.1. Beugratók . . . 27

III.2. a) Bármely n pont egy egyenesre illeszkedik. . . . 28

III.2. b) A sík bármely n nem párhuzamos egyenese illeszkedik ugyanarra a pontra. . . . 28

III.3. Bármely négy, A, B, C, D pont, amelyekre AB egyenese és CD egyenese nem párhuzamos, illeszkedik egy körre. . . . 29

III.4. A párhuzamossági axióma felhasználása nélkül bizonyítható, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°. . . . 29
III.5. Minden háromszög egyenlő szárú. . . . 29
III.6. Egy külső pontból egy egyenesre két merőleges bocsájtható. . . . 31
III.7. A derékszög nagyobb önmagánál. . . . 32
III.8. Két szakasz összhossza 0 . . . 32
III.9. A p paraméter mely értékeire van egyetlen megoldása a $\sqrt{px} = 1 + x$ egyenletnek? . . . 33
IV. Fejtörők . . . 37
IV.1. A negyedik vízi jármű . . . 37
IV.2. Két egyenlő hosszú zsinór . . . 38
IV.3. Két gyerek és a katonák . . . 38
IV.4. A gyerekek és az alagút . . . 38
IV.5. A farkas, a kecske és a káposzta . . . 38
IV.6. Három ládika hamis felirattal . . . 39
IV.7. Kép a ládikában . . . 39
IV.8. A legbölcsebb bölcs . . . 39
IV.9. Száz fogoly . . . 39
IV.10. A tétova szultán . . . 40
IV.11. Titkos üzenet . . . 41
IV.12. 3×3-as bűvös négyzet . . . 41
IV.13. Ki a felelős? . . . 42
IV.14. Egy szigeten lovagok és lókötők élnek. . . . 42
IV.15. Nyomozás . . . 43
IV.16. Pentominók . . . 46
IV.17. Ütésmentes bástyaelhelyezés és órarendkészítés . . . 48
IV.18. Hamis súly keresése . . . 50
IV.19. Hamis súly keresése kétkarú mérleggel . . . 51
IV.20. Súlykészlet tervezése . . . 51
IV.21. Hanoi tornyok . . . 51
IV.22. Mennyi pénze volt a kártyázóknak? . . . 53
IV.23. Cheryl születésnapja – egy feladat egy szingapúri matematika versenyről . . . 53
IV.24. Levesfőzés . . . 54
V. Paradoxonok . . . 57
Módszertani feladat . . . 58
V.1. A lehetetlen kocka (M. C. Esher) . . . 59
V.2. A lehetetlen háromszög. . . . 59
V.3. Keletkezett egy egységnégyzetnyi terület? . . . 61
V.4. Végtelen sok ikerprím van? . . . 61

V.5. Hamis állításból bármit lehet bizonyítani 62

Bevezetés

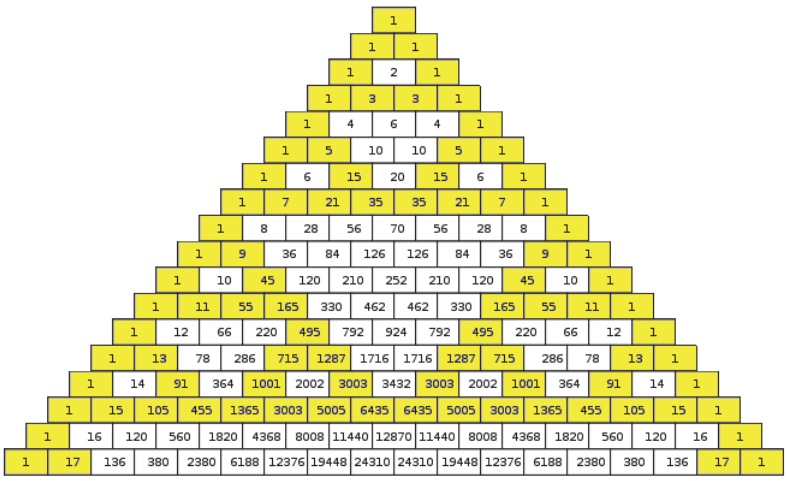
Ebben a gyűjteményben olyan példákat válogattunk össze, amelyek csaknem függetlenek a tantervtől és az aktuális tananyagtól, megoldásuk viszonylag kevés konkrét tudást igényel, de alkalmasak a problémamegoldó gondolkodás összetevőinek fejlesztésére.

A matematika tanulási céljainak megvalósítását teljes értékűen szolgálhatják érdekes meggondolások, játékok, rejtvények is. A játékos megközelítés kétségtelen előnye a szigorú tárgyalással szemben, hogy személyes sikerélménnyé válik egy-egy szabály felismerése, következetes alkalmazása vagy éppen mások tévedéseinek leleplezése. A gondolatmenet, illetve tevékenység ismétlése észrevétlenül, örömmel, szórakoztató formában történik, még a kudarc elviselése is könnyebb. Emellett a tanár is több tapasztalatot szerezhet a diákok személyiségtípusáról, munkamódszeréről, feladattartásáról.

A pedagógiai feladatok közül kiemelt szerepet kap a tapasztalatok rendszerezése. A szabályok, stratégiák nem rendeződnek automatikusan a matematikai fogalmak, tételek, eljárások hierarchikus rendszerébe, hanem gondos irányítással, a pozitív élmények megőrzése mellett érdemes becsatolni a tanulási folyamatba.

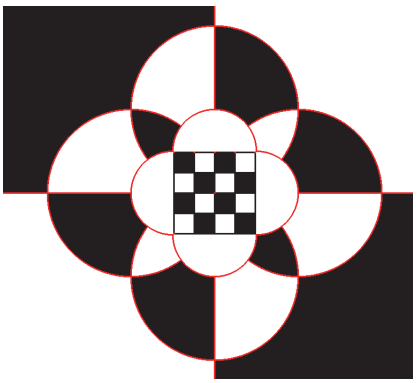
Egy szép, érdekes vagy éppen meghökkentő test, rajz, fénykép is megmozgathatja a tanulók fantáziáját. A színek, azok sajátos felcserélése, egy fordítva színezett ábra, satírozás vagy törlés elindíthatják a gondolkodást.

A következő ábra a színezett Pascal háromszög egy részletét ábrázolja: a páratlan számok mezője satírozott, a párosoké fehér. Ezzel a színezéssel egy érdekes rekurzív mintát kapunk, minél több sort veszünk, annál jobban hasonlít a Sierpinski háromszög néven ismert fraktálra. Ha még érdekesebb ábrát akarunk, akkor különböztessük meg a 3 vagy a 4 szerinti maradékosztályok elemeit.



(A kép forrása: `http://en.wikipedia.org/wiki/File:Pascal%27s_Triangle_divisible_by_2.svg`)

Nagyon érdekes és tanulságos például egy 4×4-es sakktábla inverz képe, ahol az inverzió alapköre a négyzet köréírt köre. Az ábrán az inverzióval nyert alakzatnak csak egy része látható, hiszen a sakktábla középpontja az inverzió pólusa, így a négy „sarok” a végtelenbe nyúlik.



A matematika tanítása közben arra is érdemes figyelni, hogy rámutassunk más területekkel való kapcsolatára. Az ősi és az újkori kultúrák egyaránt kihasználják a játék, a ritmus, a mondókák fejlesztő hatását. Számos létfontosságú szabály maradt meg íratlan formában. Egy-egy mondóka, történet, érdekesség segíthet elmélyíteni az adott matematikai területtel kapcsolatos ismereteket, de segíthet olyanokhoz is közelebb vinni, akiknek más irányú az érdeklődése. Kiaknázhatatlan téma az aranymetszés aránya (ϕ) és a Fibonacci sorozat, melyek a matematikai érdekességeiken kívül a képzőművészetben, a zenében, a költészetben és a természetben egyaránt megjelennek. Sokan úgy gondolják, hogy a négy legfontosabb szám: 0, 1, i, π. Álláspontjukat az Euler-féle azonossággal támasztják alá, mert ebben ez a négy szám szerepel: $e^{i\pi} + 1 = 0$. (Ezzel persze az e is belépett a fontos számok közé.)

A π-versekkel elkerülhetjük, hogy a π csupán egy görög betűt jelentsen, vagy 3,14-dal azonosítsák. Két nagy magyar matematikus is írt π-verset:

Bír-e, érez-e ember nyugalmat,
Ha lelkét nehéz bús emlék zaklatja.
Szüntelen felhőbe burkolózó idő az,
Ami változni ámha akarna se tudhat,
Mert azt nem írhattya már le halandó kívánsága.
(Hajós György közlése, 1952)

Nem a régi s durva közelítés
Mi szótól szóig így kijön
Betűiket számlálva Ludolph eredménye már
Ha itt végezzük húsz jegyen
De rendre kijő még tíz pontosan
Azt is bízvást ígérhetem.
(Szász Pál, 1952)

I. fejezet

Játékok

Színesebbé tehetjük óráinkat egy-egy játék vagy játékos feladat beillesztésével. Ehhez felhasználhatjuk már ismert játékok, rejtvénytípusok alapötletét (pl. dominó, puzzle, libajáték, ne nevess korán, kincskeresés, akadályverseny, kártyajátékok . . .) a matematikai tartalomnak megfelelően elkészített eszközökkel.

Az alkalmasan megválasztott játékok az érdeklődés felkeltése, kedvcsinálás mellett alkalmasak lehetnek gondolkodási módszerek (pl. indukció, analógia, invariánsok) felismerésére, bemutatására, szemléltetésére, tudatosítására, alkalmazására és gyakorlására. Felfedeztethetünk, bevezethetünk, gyakorolhatunk új fogalmakat, fejleszthetjük a matematikai kompetenciákat.

A játék egy áttekinthető szituációban, mindenki által ismert kifejezőeszközökkel zajlik, ahol a rámutatás, utánozás, elmozdítás stb. megengedett és így épít a nem verbális elemekre is. Így lehetséges, hogy olvasni sem tudó kisgyermek logikai rejtvényt oldjon meg, például Bontovics Ignác számítógépes animációjával:

`http://bontovics.hu/index.php?option=com_content&view=article&id=57&Itemid=30`

A Thomas a gőzmozdony mesefilmért rajongó vagy Lego világában otthonos kisgyerek a rendező pályaudvar problémáját is konkrét manipulációval oldja meg, még ha nem is tudja szavakba önteni a megoldását:

Építettünk egy egypályás, ovális alakú vasúti pályát egy kitérővel. Van egy fekete mozdonyunk, egy piros és egy kék vasúti kocsink. A pályán van egy szürke alagút, amelyen csak a mozdony fér át egyedül (a két kocsi túlságosan magasan van megrakva). A mozdony tolni és húzni is tudja a kocsikat.

Hogyan lehetne felcserélni a két kocsit úgy, hogy a mozdony is visszakerüljön az eredeti helyzetébe?

Egy 6 éves kisfiú megoldását lejegyeztünk.

Jelölések:

alagút, piros vagon, kék vagon, mozdony.

A mozdony kitolja a piros vagont a kitérőre.

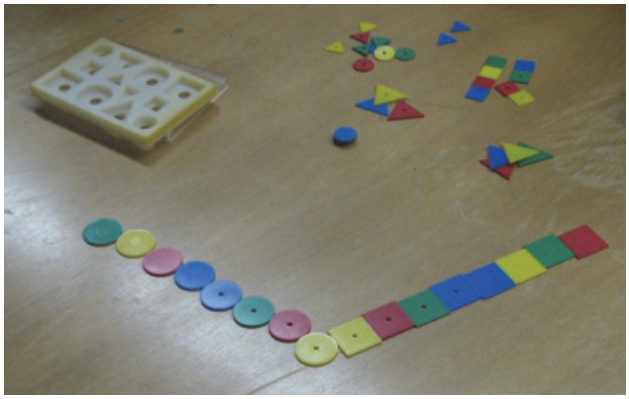
Az alagúton át a kék mögé megy és eltolja oda, ahol az elején a piros volt.

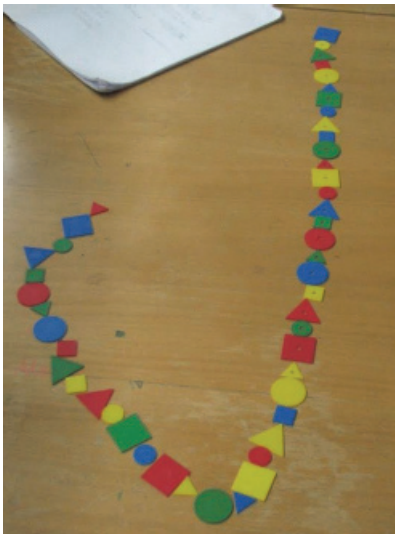
(Itt visszahúzta a pirosat a tervezett helyre és megszeppent, hogy „beszorult” a mozdony. Kicsit visszalökte a pirosat, és újra munkához látott.)

Elmegy a pirosért, egy kicsit behúzza, az alagúton át elmegy a kékért, összetolja őket, majd a piros mögé megy az alagúton keresztül.

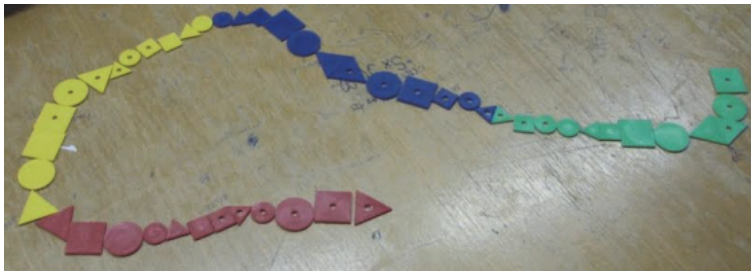
Kitolja mindkettőt, elviszi a pirosat, az alagúton át visszamegy a kékért, a helyére rakja. Most jó oldalon áll. (Azt már nem is mutatja, hogy a mozdony visszaáll a helyére.)

Óvodás és kisiskolás gyerekek logikai játékainak, de a nagyobbaknak szóló feladványok szemléltetésének is kiváló eszköze a logikai készlet. A 4 szín, 4 alakzat, 2 méret, lyukas és sima tulajdonságok változatos játékot tesznek lehetővé. Például „kígyót” építünk úgy, hogy a következő figura csak egy tulajdonságban térhet el az utolsó lerakottól (bal oldali ábra). A jobb oldali ábrán pedig az új figura minden tulajdonságában eltér az előzőtől.





A színekhez ragaszkodva elágazó szabály szerint is építkezhetünk: egy kiválasztott szín összes figuráját felrakjuk mindig egyetlen tulajdonságot megváltoztatva. Egy szín utolsó figurájához olyat illesztünk, amely csak színben tér el tőle, majd folytatjuk az új színnel.



Módszertani feladat:

Gondolja meg, hogy matematikai ismeretek állnak az egyes játékok hátterében! Igazítsa a feldolgozás módját és a munkaformát a matematikatanítás megfelelő fázisaihoz!

I.1. Számlétra

Ketten játszanak egymás ellen, „Első” és „Második”. Első mond egy 1 és 10 közötti számot (beleértve a határokat). Második ehhez hozzáad egy 1 és 10 közötti számot, és közli az eredményt. Ezek után mindig az aktuális eredményhez adnak hozzá felváltva egy 1 és 10 közötti számot, az nyer, aki végül kimondja a 100-at. Kinek van nyerő stratégiája?

Stratégia: Könnyű rájönni, hogy aki 89-et mond, az megnyerheti a játékot (az ellenfél nem tud erre 100-at mondani, de akármit mond, utána a soron következő tud). Új cél tehát a 89. Ezt (hasonló alapon) akkor tudjuk elérni, ha előtte 78-at tudunk mondani. Így folytatva, ha nyerni akarunk, nekünk kell mondanunk a 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1 számokat, vagyis „Első” tud nyerni, ha 1-gyel kezd (és jól játszik). Kezdő stratégiáját úgy is megfogalmazhatjuk, hogy első lépésre 1-et mond, ezután az ellenfél lépését mindig kiegészíti 11-re.

Megjegyzések:

Érdemes tanulói párokban kipróbálni a játékot. Aki már úgy gondolja, hogy van nyerő stratégiája, az játszhat a tanár ellen úgy, hogy megválaszthatja, hogy „Első” vagy „Második akar-e lenni. Tanárként nem

érdemes kezdettől „jól játszani”, mert könnyű ellesni a „jó számokat” azoknak is, akik nem találták meg a nyerő stratégiát. „Rossz játékkal” ellenőrizhetjük, hogy tényleg megfejtette-e az ellenfél a dolog nyitját.

A játék eredeti változata 8-9 éveseknek készült, ott a cél a 21 volt, a lépés szabálya pedig 1-3. Ellenőrizhetjük, hogy a megbeszélt stratégiát ki értette meg, ha újra játsszuk a játékot más célokkal és/vagy lépéshosszokkal.

A játékot úgy is játszhatjuk, hogy egy sorban megszámozott mezőkből álló pályán kell a játékosoknak egy bábuval felváltva lépniük.

Változatok: I.1. V1. Nem az nyer, aki kimondja a 100-at, hanem az veszít, aki kénytelen 100-at (vagy annál nagyobb számot) mondani.

Stratégia: Ha sikerül 99-et mondanunk, nyertünk. Innentől az eredeti játék, avval a változással, hogy cél a 99. Ilyenkor a „Második„nyerhet.

Megjegyzés:

Érdemes különböző célok vagy lépéshosszok esetén tisztázni, hogy mikor kinek van nyerő stratégiája, hiszen a nyerő-vesztő cél cseréje nem automatikusan jár együtt azzal, hogy a kezdő, vagy a másik nyerhet-e.

I.1. V2. A játék során egyszer lehet passzolni (a két játékosnak összesen egyszer, vagyis ha valamelyikük passzolt, akkor a másik már nem teheti ezt meg).

Stratégia: Mondjunk az alapjáték „jó számainál” eggyel kisebb számokat, amíg az ellenfél nem passzol. Ha az ellenfél mond egy, az eredetiben ilyen „jó” számot, akkor passzoljunk. A másodiknak van nyerő stratégiája.

Megjegyzés:

Meggondolható, hogy mi a helyzet (összesen) két, három, ... megengedett passz esetén.

I.1. V3. Számozott mezők esetén úgy is játszhatjuk a játékot, hogy „Első” a 0-ról előre, „Második” 100-ról (vagy az aktuális célszámról) visszafelé haladva indul, vagyis egymással szembe mennek. Egymást átugorni nem lehet, az veszít, aki nem tud lépni.

Stratégia: Ha úgy képzelnénk el az eredeti játékot, hogy „visszafelé” 100-ból kell kivonniuk a játékosoknak felváltva 1 és 10 közötti számokat, akkor a cél a 0 lenne. Ha egymással szemben haladnak, akkor a távolságukat szeretnék 1-re csökkenteni.

I.2. „Kavicsok” (gyufaszálak, babszemek, ...)

Egy kupac kavicsból 2 játékos felváltva vehet el 1 és 10 közötti darabszámú kavicsot. Az nyer, aki az utolsót elveszi.

Megjegyzés:

Ez nyilván ugyanaz a játék, mint a számlétra visszafelé haladva. Jól látszik, hogy szembe haladás esetén ugyanezt a játékot kapjuk, hiszen mindegy, hogy a kavicskupac melyik végéből veszünk el kavicsokat.

Változatok: I.2. V1. Egy (legalább két kavicsból álló) kavicskupacból felváltva vesznek el a játékosok, a következő szabály szerint: „Első” elvehet akármennyit (legalább egyet), csak az összeset nem. A továbbiakban mindenki elvesz legalább egyet és legfeljebb kétszer annyit, mint előtte az ellenfele. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

Stratégia: Könnyen meggondolható, hogy ha kezdetben csak 2 vagy 3 kavics van a kupacban, akkor a kezdő veszít. Ha 4 kavics van, akkor 1 kavics elvételével ellenfelét taszítja a 3 kavicsos vesztő állásba, így nyerhet (2 vagy 3 kavicsot nem érdemes elvennie, mert ekkor „Második” el tudná venni a maradékot). Tovább kísérletezve úgy tapasztalhatjuk, hogy 5 kavics esetén nem tud nyerni a kezdő (ha ellenfele jól játszik), 6 vagy 7 kavicsos kezdő helyzet esetén igen. Ha 8 kaviccsal kezdünk, akkor a kezdőnek nyilván nem érdemes

2-nél több kavicsot elvennie, hiszen akkor ellenfele el tudná venni az összeset, így 1-et vagy 2-t vesz el, ellenfele mindkét esetben el tudja érni, hogy 5 maradjon, ami vesztő pozíció, így 8 kavics esetén „Második” tud nyerni. Előbb-utóbb megsejthető, hogy ha kezdetben a kavicsok darabszáma Fibonacci szám, akkor „Második” nyerhet, a kezdő csak ellenfele rossz játéka esetén. Ez teljes indukcióval bizonyítható.

Azt, hogy más kezdőszámok esetén mindig nyerhet a kezdő játékos, nem könnyű belátni. Arra kell törekednie, hogy ellenfele előtt Fibonacci darabszámú kavics maradjon, de ne tudja az összeset elvenni. Új cél tehát a legközelebbi Fibonacci szám. Ezt nem mindig tudja egy lépésben elérni, ilyenkor be kell érnie avval, hogy az új céltól Fibonacci távolságra kerüljön úgy, hogy ellenfele azt ne érhesse el. Az, hogy ezt mindig meg tudja tenni, azon múlik, hogy minden pozitív egész felírható különböző Fibonacci számok összegeként, mindig a lehető legnagyobb tagot választva következő összeadandónak.

I.2. V2. Két kupacos NIM játék A kavicsok két kupacban vannak. Két játékos felváltva vehet el tetszőleges darabszámú kavicsot abból a kupacból, amelyikből akar. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

Stratégia: Ha egyforma darabszámú kavics van a két kupacban, akkor a második játékos nyerhet, ha mindig úgy lép, hogy kiegyenlítse a két kupac darabszámát. Különböző induló darabszámok esetén a kezdő tudja minden lépésével kiegyenlíteni a két kupac darabszámát.

Megjegyzés: Úgy is játszható, hogy kavicsok helyett egy rácstéglalapot veszünk. Ennek jobb felső mezőjén áll egy bábu. Ezzel a bábuval lehet balra és lefelé lépni. Az nyer, aki a bal alsó sarokban levő mezőre lép. (A két játékot összevetve: annyit lép egy játékos a rácstéglalapon, ahány kavicsot elvett volna egy kupacból, mégpedig az egyik kupac esetén lefelé, a másiknál balra.)

Ezt a játékot is játszhatjuk úgy, hogy az veszít, aki az utolsó kavicsot veszi el.

I.2. V3. Egy rácstéglalap jobb felső mezőjén áll egy bábu. Ezzel a bábuval lehet balra akármennyit, vagy lefelé akármennyit, illetve balra és lefelé ugyanannyit (mint a sakkban a vezér) lépni. Az nyer, aki a bal alsó sarokban levő mezőre lép.

Stratégia: Visszafelé okoskodunk. A bal alsó sarokba egyetlen lépésben az első oszlopból, vagy átlósan vagy az legalsó sorból juthatunk, ezek a soron következő játékos szempontjából nézve nyerő pozíciók (+). Vizsgáljuk meg, hogy melyek azok a mezők, amelyekről csak nyerő pozícióba lehet lépni, ezek a vesztes pozíciók (−). Például egy 5×8-as rácstéglalap esetén:

4	+				+			
3	+			+				
2	+	−	+					
1	+	+	−					
0	−	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7

Ahonnan ezekre a vesztes pozíciókra tudok lépni, azok szintén nyerő pozíciók. A melyekről csak nyerő pozícióba lehet lépni, azok vesztes pozíciók. Így haladva a rácstéglalap minden mezője (+) vagy (−) besorolást kap. Ha a jobb felső mező (+), akkor a kezdőnek, ha (−), akkor a második játékosnak van nyerő stratégiája.

4	+	+	+	+	+	+	+	−
3	+	+	+	+	+	−	+	+
2	+	−	+	+	+	+	+	+
1	+	+	−	+	+	+	+	+
0	−	+	+	+	+	+	+	+
	0	1	2	3	4	5	6	7

Megjegyzések: A játék kavicsos változata: Adott két kupac kavics. 2 játékos felváltva vehet el az egyik kupacból tetszőleges darabszámú kavicsot, vagy mindkettőből egyenlő darabszámút. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

A rácstéglalapos változatban a stratégiát könnyebb áttekinteni, mint a kavicsosét.

Ha a mezők koordinátáit megvizsgáljuk, észrevehetjük, hogy $(a; b)$ és $(b; a)$ azonos előjelű. A vesztes mezők közül az $a \leq b$ alakúak $(0; 0)$, $(1; 2)$, $(3; 5)$, $(4; 7)$, $(6; 10)$, ..., ahol az első koordináta mindig az eddig még nem szereplő legkisebb szám, a második meg 1-gyel nagyobb.

I.2. V4. Három kupacos NIM játék A kavicsok három kupacban vannak. Két játékos felváltva vehet el tetszőleges darabszámú kavicsot abból a kupacból, amelyikből akar. Az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi.

Stratégia: Átírjuk mindegyik kupac elemszámát kettes számrendszerbe. Az így kapott számokat helyiérték szerint rendezve egymás alá írjuk és helyiértékenként (egy-egy oszlopban) megnézzük, hogy összesen hány darab egyes van.

Úgy érdemes elvenni, hogy minden helyiértéken páros sok egyes maradjon, ugyanis azok a vesztő helyzetek, amikor minden oszlopban páros sok egyes van. Ekkor a soron következő játékos lépésével elromlik ez a helyzet: Egy kupacból elvesz legalább egyet, így a kupac elemeinek kettes számrendszerben felírt száma legalább egy helyen megváltozik. Ahol megváltozik ez a szám, azokon a helyiértékeken a három kupac egyesei számának paritása megváltozik, tehát már nem marad minden helyiértéken páros sok egyes.

Ha legalább egy helyiértéken páratlan sok egyes van, akkor aki a következőt lépi, az tud úgy elvenni, hogy minden helyiértéken páros sok egyes legyen.

Tehát, ha a kiinduláskor minden helyiértéken páros sok egyes van, akkor a másodiknak van nyerő stratégiája, ha legalább egy helyiértéken páratlan sok egyes van, akkor a kezdőnek.

Megjegyzések: Több kupaccal is lehet játszani.

A nyerő stratégia ugyanaz. Ha nem minden helyiértéken páros az egyesek száma, akkor van egy legnagyobb, pl. i-ik helyiérték, ahol páratlan. Ekkor legalább az egyik kettes számrendszerbeli számban ezen a helyiértéken egyes szerepel. Válasszunk ki az ilyen számok közül egyet, nevezzük ezt k-nak. Képezzük azt a kettes számrendszerbeli számot, amit úgy kapunk, hogy a k jegyei közül a i-ediket 0-ra változtatjuk, az i-nél nagyobb helyiértékeken a számjegyeket meghagyjuk, az i-nél kisebbeken pedig akkor változtatjuk meg a számjegyet (1-ről 0-ra, vagy 0-ról 1-re), ha azon a helyiértéken összesen páratlan sok egyes volt. Ezt a számot nevezzük m-nek. Nyilvánvaló, hogy ha a k számot kicserélnénk az m-re, akkor minden helyiértéken páros sok egyes lenne. Az is nyilvánvaló, hogy $m < k$. Ezek szerint viszont az adott kupacból $k - m$ darab kavicsot el lehet venni, és ha ezt megtesszük, akkor az új kupac számát (m-et) hozzá véve a (változatlan) többihez olyan számokat kapunk, ahol már minden helyiértéken páros sok egyes szerepel.

A szabályt úgy is módisíthatjuk, hogy az veszít, aki az utolsót húzza.

A játék részletes elemzése olvasható pl. Lánczi Ivánné (1969) cikkében.

I.3. Barkochba

Az osztály egyik tanulójánál eldugunk egy tárgyat (pl. krétát). A feladat szabályos (egyértelműen „igen”-nel vagy „nem”-mel megválaszolható) barkochba-kérdésekkel kitalálni, hogy kinél van az eldugott tárgy. Aki a legkevesebb kérdéssel vállalja a kitalálást, kimegy míg mi eldugjuk a tárgyat, aztán behívjuk és próbálkozhat.

Stratégia: Akkor lehet a legkevesebb kérdéssel biztosan kitalálni, ha minden kérdéssel (kb.) felezzük a fennmaradó lehetőségek számát.

Megjegyzések: Játszhatjuk úgy, hogy a kitaláló sorban haladva a többi tanulón teszi fel kérdéseit, és úgy is, hogy egy válaszoló van.

Gyakran nem megfelelő kérdések kerülnek elő, pl. az, hogy „szőke” gyereknél van-e a tárgy, nem mindig könnyen eldönthető. Minden próbálkozásnál érdemes megbeszélni, hogy lehetett volna-e ügyesebben kérdezni. Jó kérdés-e például, hogy melyik padsorban van az eldugott tárgy, vagy, hogy lánynál van-e.

Barkochba játszható a logikai készlettel is. Például megmutatjuk az egész készletet, és kérjük a partnert, hogy gondoljon az egyik elemre. Fiatalabb gyerekekkel érdemes úgy játszani, hogy ténylegesen elvesszük a készletből azokat a darabokat, amelyek az egyes információk alapján „kiestek”.

Mielőtt végleg tisztáznánk a stratégiát, érdemes a következő változatok közül az elsőt lejátszani.

Változatok: I.3. V1. Gondoltam egy 1 és 30 közti számra (beleértve a határokat). Ezt a számot kell kitalálni szabályos Barkochba-kérdésekkel. Az próbálkozhat, aki a legkevesebb kérdéssel vállalja a kitalálást.

Stratégia: Ugyanaz, mint az előbb.

Megjegyzések: Megjegyezhetjük, hogy maximum 29 kérdésből (egyenként rákérdezve a számokra) biztos kitalálható a gondolt szám.

Könnyen meggondolható, hogy ha az osztály tanulóit sorszámokkal láttuk volna el, akkor a sorszámukat kellett volna kitalálni, így ez ugyanaz a játék.

Felvethetjük, hogy más létszámok (számok) esetén mikor mi lett volna a legjobb kérdezési módszer.

A stratégia megbeszélését érdemes „alulról” kezdeni: ha két szám közül gondoltam egyre, akkor nyilván kellene 1 kérdés. Ha 3, vagy 4 közül, akkor kell is és elég is 2 kérdés. Akkor maradhat a kérdésem után maximum 4 fent a rostán, ha legfeljebb 8 számra gondolhattam stb.

A következő változattal ellenőrizhetjük, hogy ki az, aki tényleg megfejtette a stratégiát.

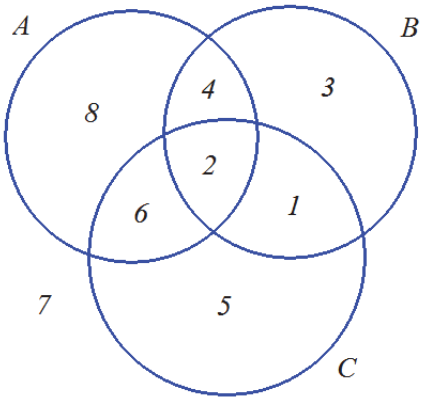
I.3. V2. Most nem rögzítettem előre az egy 1 és 30 közti gondolt számot, hanem úgy válaszolok, hogy a kérdező a lehető legrosszabbul járjon.

Megjegyzés: Nem feltétlenül kell elárulnom, hogy nincs előre elhatározott számom, de érdemes.

I.3. V3. Előre leírt kérdések: Most egy 1 és 8 közötti számra gondolok. Az eredeti játékban láttuk, hogy ott 3 kérdésre van szükség ahhoz, hogy biztosan kitaláljuk a gondolt számot. Most az a feladat, hogy előre meg kell adni a 3 kérdést, tehát egyik kérdés sem függhet az előző kérdésre vagy kérdésekre adott választól.

Stratégia: Az első kérdéssel felezzük a lehetőségeket (pl. páros a gondolt szám?). A második kérdéssel kérdezzünk rá négy számra úgy, hogy mindkét félből 2-2 legyen benne (pl. kisebb 5-nél?). (Meggondolható, hogy ha a példánkban szereplő mindkét kérdésre „igen” lenne a válasz, akkor már csak a 2 és a 4 jöhetne szóba; ha az elsőre „igen”, a másodikra „nem”, akkor a 6 és a 8; ha az elsőre „nem” és a másodikra „igen”, akkor az 1 és a 3; ha pedig mindkettőre „nem” a válasz, akkor az 5 és a 7 jöhetne szóba.) A harmadik kérdéssel kérdezzünk rá négy számra úgy, hogy az eddigiekből kialakított négy pár mindegyikéből 1-1 szám legyen benne (pl. az 1, 2, 5, 6 számok között van?).

Megjegyzések: Sokféleképpen megoldható a háromszori „felezés”, a lényeg az, hogy a 8 számot úgy osszuk be három (A, B, C) halmazba, hogy mindháromnak 4 eleme legyen, bármelyik kettőnek 2 közös eleme legyen, és 1-1 olyan elem legyen, mely mindháromban benne van, illetve egyikben sincs benne. Példánkban:



Ekkor a megfelelő három kérdés:

- Eleme a gondolt szám az A halmaznak?
- Eleme a B halmaznak?
- Eleme a C halmaznak?

Nem csak 1 és 8 közötti számra gondolhatunk. Ha 1 és n közötti számra gondolhatunk, akkor megfelelő kérdések lehetnek (amelyek éppen ezt a folyamatos felezést valósítják meg), a következő kérdések:

- A gondolt szám kettes számrendszerbeli alakjában 1 az utolsó számjegy?
- A gondolt szám kettes számrendszerbeli alakjában 1 az utolsó előtti számjegy?
- A gondolt szám kettes számrendszerbeli alakjában 1 a hátulról harmadik számjegy?
- stb.

Evvel éppen a bűvésztrükköknél szerepelő kártyáinkhoz jutunk.

I.3. V4. A válaszoló legfeljebb egyszer hazudhat.

Stratégia: Ha minden kérdést kétszer teszünk fel, akkor ahol ellentmondó válaszokat kapunk, ott egyik esetben hazudott a válaszoló. Így ugyanarra még egyszer rákérdezve kiderül az igazság. Az eredetihez képest kétszer annyi plusz egy kérdésnél kevesebbel is kitalálhatjuk a gondolt számot, ha először az eredeti kérdéseinket tesszük fel sorszámozva, majd az előző kérdéseink sorszámára kérdezünk rá, hogy melyikben hazudott (mondott igazat). Így pl. 1-8 gondolt szám esetén az eredeti 3 kérdés után már csak 3-ból kell kitalálnunk, hogy melyikben hazudott. (Mivel lehet épp most hazudik, +1 ellenőrző kérdésre még szükség lehet).

I.3. V5. Két tárgyat dugtunk el két különböző embernél (két különböző számra gondoltam), mindkettő helyét ki kell találni.

Stratégia: Ha 1 és n közötti számokra gondoltam, akkor erre $\binom{n}{2}$ lehetőségem volt. Ennyi lehetőség közül kell kitalálni a két számot. Ehhez pl. $n = 8$, így $\binom{8}{2} = 28$ esetén 5 kérdésre van szükség. Az, hogy ezt a 28 esetet hogyan „rakjuk sorba”, sokféleképpen történhet meg.

Ha nem kell a két számnak különböznie (ugyanannál a gyereknél is eldughatom mindkettőt), akkor nyilván n^2 lehetőség közül kell kitalálni a gondoltat.

I.4. Közvetítő játék

Két pozitív egész számot kell egy pozitív egész számmal „közvetíteni”. A tanulók párban előre megbeszélik stratégiájukat. A megbeszélés után az önként vállalkozó pár egyik tagja kimegy. Az osztály mond két számot a pár bent maradt tagjának, majd behívják párját. A bent maradt tag egy (pozitív egész) számot mondhat, ebből kell párjának kitalálnia a feladott két számot.

Stratégia: Sokféle jó közvetítési módszer lehet (és sok rossz). Egy jó lehetőség pl. ha mindkét szám számjegyeit megduplázzuk, és elválasztó jelnek egy olyan kétjegyű számot választunk, melynek számjegyei különbözőek. Ha például a közvetítésre szánt két szám 12 és 469, akkor ezek evvel a stratégiával visszaállíthatóak az 112218446699 számból.

Jó stratégia lehet pl. az is, hogy a két közvetítésre szánt számot a küldő átírja 9-es számrendszerbe, és elválasztó jelnek a 9-es számjegyet használja.

Megjegyzés: A rossz stratégiákról nem mindig könnyű eldönteni, hogy miért rosszak, néha igazi fejtörő feladat lehet olyan példát gyártani, ahol ezek alapján nem egyértelmű a megfejtés.

Változatok: I.4. V1. Nem egy számot, hanem 3,4, vagy akár előre meg nem határozott darabszámú számot kell közvetíteni.

Stratégia: Az előbbiekben leírt két stratégia most is jó (de lehet más is).

Megjegyzések: Érdekes kérdések adódhatnak más, előbb felmerült jó stratégiákkal kapcsolatban is.

A feladatnak fontos halmazelméleti tanulsága, hogy pozitív egészekből álló véges sorozatok számossága megegyezik a pozitív egészekével.

I.4. V2. A feladó nem használhatja a 9-es számjegyet.

Stratégia: Egy lehetséges megoldás, ha 8-as számrendszerbe írjuk át a számokat és a 8-ast használjuk elválasztó jelnek.

Megjegyzések: Ha a számrendszerek irányába szeretnénk tovább haladni, és felmerült a más számrendszerekbe való átírás gondolata, akkor „letilthatjuk” egyre több számjegy használatát.

Analóg módon eljuthatunk odáig, hogy ha csak három számjegyet (pl. 0,1,2) használhatunk. Ilyenkor jó stratégia pl. ha kettes számrendszerbe írjuk át a számokat, és a 2-t használjuk elválasztó jelül.

Érdekesebb kérdés, hogy mi van, ha csak két számjegyet használhatunk (pl. 0-t és 1-et). A”jegyduplázós” módszer kettes számrendszerbeli változata ilyenkor is működik. Azt is megtehetjük, hogy annyi darab 1-est írunk le, amennyi az első szám, aztán egy 0-t, aztán annyi 1-est, amennyi a második szám stb.

Újabb (és nagy) ugrás, ha csak egy számjegyet használhatunk. Ilyenkor az egyetlen információ, hogy hányszor ismételjük azt az egyetlen számjegyet – és ennek megemlítése már segítség számba megy. A megoldási lehetőségeket semmiképp nem érdemes elárulni azoknak, akik nem jönnek rá maguktól. (Most sem tesszük, de a feladat nem lehetetlen.)

I.5. Osztójáték

Két játékos egy előre megadott szám pozitív osztóit mondja felváltva. Sem magát a számot, sem egy már elhangzott osztó osztóját nem szabad mondani. Az veszít, aki nem tud újabb osztót mondani.

Stratégia: Az aktuális játék stratégiája erősen függ a kiindulási számtól, sem „univerzális” stratégiáról nem beszélhetünk, sem egyéb, minden kezdőszámot érintő javaslatokról.

Példa: Ha a kezdő szám 12, akkor ennek szóba jövő osztói: 1, 2, 3, 4, 6.

Ha „Első” 6-tal kezdene, akkor „Második” már csak 4-et mondhatna, de evvel nyerne.

Ha „Első” 4-gyel kezdene, akkor a 3 és a 6 maradna, 6-tal megint „Második” nyerne.

Ha 3-mal kezdene, akkor 2, 4, 6 közül kellene választania „Másodiknak”. Ha „Második” ezután a 2-t választja, akkor „Első” akár a 4-et, akár a 6-ot mondja, a másik megmarad „Másodiknak”, így a kezdő megint veszít.

Ha „Első” 2-vel kezd, akkor „Második” a 3, 4, 6 közül választhat. Ha a 3-at választja, ugyanaz a helyzet, mint előbb, így megint „Második” nyer.

„Elsőnek” tehát 1-gyel érdemes kezdenie, bármit lép erre a”Második”, a fent leírt valamelyik vesztes helyzetben találja magát.

Megjegyzések: A játék kisebb gyerekekkel az osztó-többszörös viszony fogalmának elmélyítésére, gyakorlására, a szisztematikus esetvizsgálatra szolgálhat példaként.

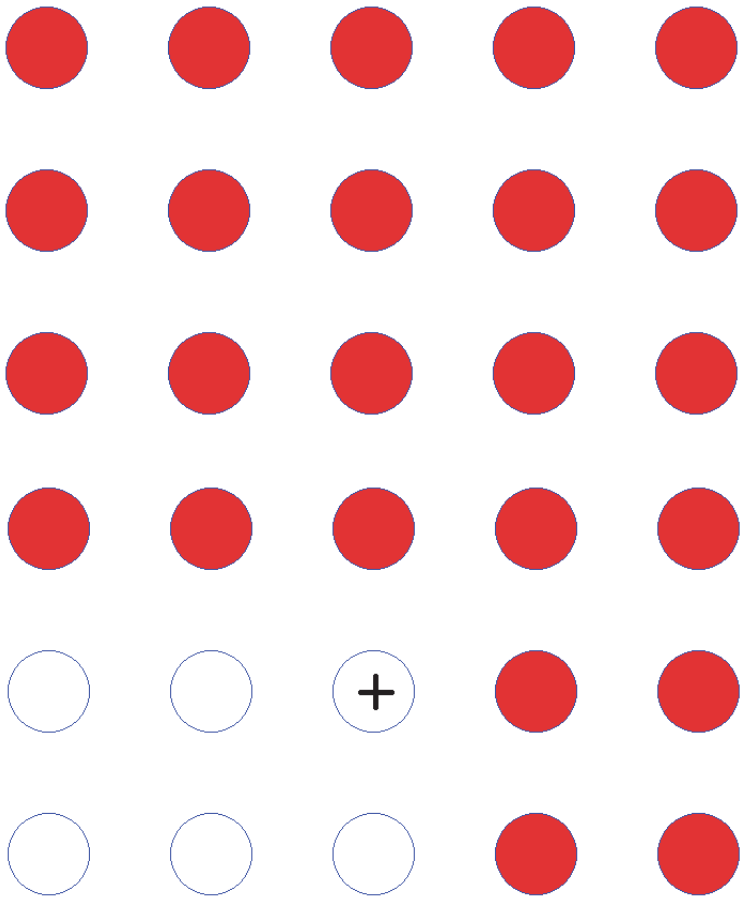
Nagyobbaknál érdekes lehet megmutatni, hogy a játék kiváló példát szolgáltat ún. „egzisztencia” bizonyításra (szemben a konstruktív bizonyítással). Belátható ugyanis, hogy függetlenül a kezdő számtól, mindig a kezdő játékosnak van nyerő stratégiája (még ha nem is tudjuk, hogy a győzelemhez hogy kell játszania).

Ha ugyanis „Első” bármivel kezd, az 1 kiesik a játékból Ha volna „Másodiknak” nyerő stratégiája, akkor ez nem lehet az 1 mondása, mert az már nincs játékban. Ha azonban „Első” evvel a „Másodiknak” feltételezett nyerő lépéssel kezd, akkor övé a nyerő stratégia – legrosszabb esetben 1-gyel kell kezdenie.

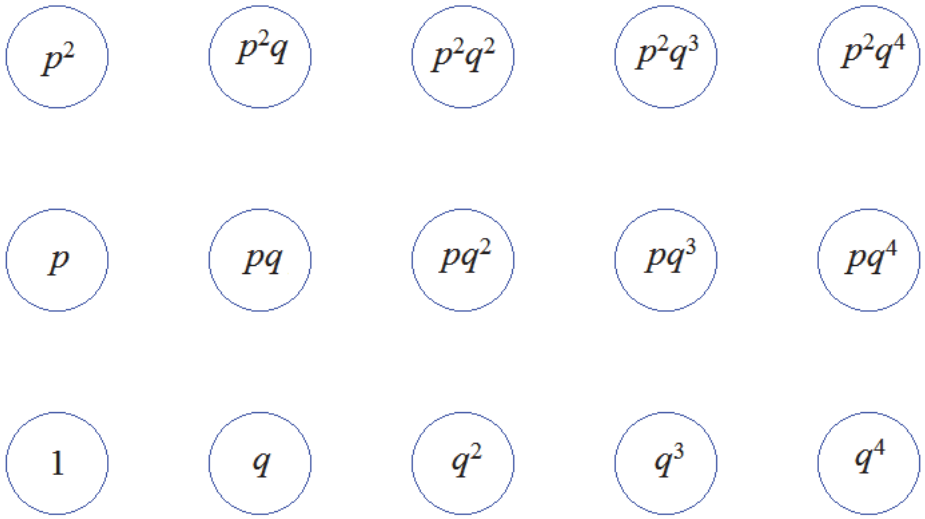
Érdemes olyan számokat kerestetni a gyerekekkel, amelyekre átlátható a stratégia (pl. prímhatványok).

A játék számos változata és részletes ismertetése megtalálható Varga Tamás (1969) írásában.

Változatok: I.5. V1. Korongokat rakunk téglalap alakban elrendezve (vagy tekintünk egy rácstéglalapot). A játékosok felváltva vehetnek el korongokat a következő szabály szerint: Az összeset nem szabad elvenni. Ha valaki elvesz egy korongot, akkor a tőle balra és az elvettek alatt vagy balra levő összes korongot is el kell vennie. Az veszít, aki már nem tud elvenni.



Megjegyzések: Ha az osztójáték kiindulási száma két prímhatvány szorzata, akkor megfeleltethető egymásnak a két változat. Az $n = p^a \cdot q^b$ a kiindulási szám, akkor tekintsük az $(a+1)\cdot(b+1)$-es korongtáblát vagy rácstéglalapot. A 3×5-ös korongtábla esetén képzeljük a korongok helyére egy $p^2 \cdot q^4$ alakú szám összes osztóját a következő elrendezésben:



A + jelű korong választásával a pq^2 számot és annak az összes osztóját vettük el.

Három prímhatvány szorzata esetén képzeletben egy térbeli alakzatban, egy rács-téglatestben helyezhetjük el hasonló rendszer szerint az összes osztót.

I.5. V2. Felírjuk egy lapra 1-től 25-ig (1-től n-ig) a számokat. „Első” választ egy számot, azt megkapja, „Második” megkapja ennek összes osztóját. A választott számot és osztóit töröljük a számsorból. Ezek után „Első” ismét választ egy számot a megmaradtak közül, amit megkap, „Második” megkapja ennek összes még bent levő osztóját. Ismét töröljük az új számot és osztóit. Ezt folytatjuk, amíg már „Első” nem tud olyan számot mondani, aminek még van bent osztója. Ekkor „Második” megkapja az összes megmaradt számot. Az nyer, akinél az összegyűjtött számok összege nagyobb.

Megjegyzések: Észrevehető, hogy most „Második” szerepe teljesen passzív. Játszhatjuk párokban a játékot úgy, hogy minden pár eldönti, hogy melyikük „Első” és melyikük „Második”, aztán összegyűjtjük a tanulságokat (univerzális stratégia most sincs).

Talán érdemesebb „egyszemélyes” játékként játszatni, mindenki „Első” játékosként játszik, elkönyveli saját, és külön a képzeletbeli passzív ellenfele pontszámait. Az nyer, aki a legnagyobb összeget érte el „Elsőként”. (Ennek módját persze aztán be kell mutatnia.)

A játékhoz roppant egyszerű számítógépes programot írni, ahol a gép a passzív fél. Egy ilyen program (bekért kezdő számmal is) elvégzi az állások könyvelését, kiküszöböli az összeadási hibákat, könnyűvé teszi az ismétlést, akár otthon is játszható.

II. fejezet

Bűvésztrükkök

Valamilyen matematikai tudás, meggondolás birtokában meglepő teljesítményre képes a „bűvész”. A trükk leleplezése lehet egyéni, páros és csoportteljesítmény. A legnagyobb jutalom a gyors megfejtőknek, ha bűvészinasok lehetnek. A bűvésztrükkök „megfejtésének” általában két fázisa van. Az első, amikor a közönség rájön, hogy mit csinál a bűvész, és akár utánozni is tudja. A második, amikor azt is tudja, hogy miért csinálja azt, amit csinál. A következő „trükkökben” épp ez a második fázis rejti a matematikai tanulságokat. A megfejtés fázisai sokféle intenzitású részvételt tesznek lehetővé.

Emlékezetesebb és hatékonyabb a játék, ha egy-egy trükköt beillesztünk a matematikatanulás folyamatába.

Módszertani feladat:

Gondolja meg, hogy mi az egyes trükkök matematikai tartalma. Igazítsa a feldolgozás módját és a munkaformát a matematikatanítás különböző fázisaihoz.

II.1. Az 1001 bűvös tulajdonsága

Írj le egy háromjegyű számot (abc). Ezután írd le mögé még egyszer ($abcabc$). Az így kapott hatjegyű számot oszd el 13-mal. Az eredményt oszd el 11-gyel. Az így kapott eredményt oszd el 7-tel. Mit tapasztalsz?

Példa: A háromjegyű számom 274. A hatjegyű 274274. Ezt 13-mal osztva a hányados 21098. Tovább osztva 11-gyel a hányados 1918. Majd 7-tel osztva 274-et kapunk.

Aki nem számolta el, az minden osztás során egész szám hányadost kap, végül pedig visszakapja az eredeti háromjegyű számot.

Megfejtés: Amikor egymás mögé írjuk a két egyforma háromjegyű számot[1], valójában 1001-gyel szorozzuk az eredetit:

$$\underline{abc}(1000+1) = \underline{abc}000 + \underline{abc} = \underline{abcabc}.$$

Márpedig $13 \cdot 11 \cdot 7 = 1001$.

Megjegyzések: A trükk automatikus, mindig működik, így különös gondot kell fordítanunk a magyarázat előcsalogatására (biztos vagy benne? stb.).

Már önmagában meglepő lehet, hogy minden osztás során egész számot kapunk, ami lehetőséget ad arra, hogy ellenőrzés nélkül figyelmeztetni tudjuk azt, aki nem egész számot kapott, hogy elszámolta.

A 7-tel, 11-gyel és 13-mal való osztás sorrendje mindegy.

[1] Ebben, valamint a későbbi hasonló feladatokban az egymás mögé írt számok, valamint a számokat jelentő betűk, illetve algebrai kifejezések az összeolvasott szám számjegyeit jelentik. Ezt aláhúzással jelöljük.

Ha éppen nem az írásbeli osztást akarjuk gyakoroltatni, hanem a szorzást, visszafelé is csinálhatjuk: szorozd meg a háromjegyű számodat (valamilyen sorrendben) 7-tel, 11-gyel, aztán 13-mal – és láss csodát: kétszer egymás után jelenik meg. Ekkor persze elveszítjük azt a meglepetést, ami a folyamatos osztások során keletkezik.

II.2. A középső számjegy 9

Gondolj egy háromjegyű számra ($\underline{abc}$). Készítsd el a fordítottját ($\underline{cba}$). Vond ki a nagyobból a kisebbet. Ha megmondod a kivonás eredményének utolsó számjegyét, én megmondom a teljes különbséget.

Megfejtés: Minden olyan számban, amelyek ugyanazokból a jegyekből állnak, ugyanaz a számjegyek összege, így megegyezik a 9-es maradékuk is. Emiatt, ha egy számból kivonjuk a fordítottját, mindig 9-cel osztható számot kapunk. Ha valaki palindrom (szimmetrikus, pl. 545) számra gondolt, akkor persze 0-t kap, így ha a különbség utolsó jegye 0, akkor a teljes eredmény 0. Egyébként pedig a nagyobb háromjegyűből vonjuk ki a kisebbet, aminek utolsó számjegye nagyobb, mint a kisebbítendőé. Ekkor a különbség középső jegye 9-es lesz és a másik két számjegy összege 9.

Megjegyzések: A szabályt megint könnyű felfedezni, az indoklásra több út is kínálkozik. Ha valaki rájön pl. hogy az eredmény a 99 többszöröse: $100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99(a - c)$ és kihasználja, hogy a 99 az 1-gyel kisebb, mint a 100, nyert ügye lehet.

A fő felfedezni való, és megtárgyalandó tanulság, hogy a számjegyek összege nem csak a 9-cel való osztathatóságról árulkodik, hanem a 9-es maradékról is.

II.3. 1089

Gondolj egy háromjegyű számra ($\underline{abc}$). Készítsd el a fordítottját ($\underline{cba}$). Vond ki a nagyobból a kisebbet. A különbséghez add hozzá annak a fordítottját. Mit kaptál?

Megfejtés: A tanulók többsége 1089-et kap eredményül. Ez az előző trükk megfejtésén alapul, ahol az eredmény $\underline{x9(9-x)} = 100x + 90 + 9 - x$ volt, ehhez a fordítottját adva:

$$100x + 90 + 9 - x + 100(9 - x) + 90 + 100x = 1089.$$

Diszkusszió: Ha már az első kivonás eredménye 0 volt, akkor a végeredmény is 0 lesz. Ha az eredeti háromjegyű szám első és harmadik számjegyének különbsége 1, akkor az első lépésben kapott különbség 99 lesz. Ennek fordítottja is 99, így az eredmény 198 lesz. (Ha persze a 99-et 099-nek tekintjük, akkor a fordítottja 990, és így a kívánt összeget kapjuk).

Megjegyzések: Ha azt szeretnénk, hogy (hatásos legyen a trükk) mindenki 1089-et kapjon eredményül, nyilván valamilyen formában ki kell kötnünk, hogy az eredeti háromjegyű szám első és utolsó számjegyének különbsége legalább 2 legyen. Mondhatjuk pl. valamilyen formában azt, hogy olyan háromjegyű számra gondoljanak, melynek jegyei szigorúan monoton csökkennek.

Ezt a trükköt nem érdemes közvetlenül az előző után bemutatni, mert egyrészt egy későbbi ellenőrzési lehetőség lehet arra, hogy megértették-e az előző trükk feloldását, másrészt nem érdemes lelőni a poént.

II.4. 9-es maradék

Gondolj egy tetszőleges pozitív egész számra. Készítsd el a fordítottját, és a nagyobból vond ki a kisebbet. Válassz egy kedvenc számot az 1, 2, 3, 4, 5 számok közül. Ezt add hozzá az előző eredményhez. Ha megmondod, mi az eredmény, én megmondom, mi volt a kedvenc számod.

Megfejtés: A kedvenc szám az eredmény 9-es maradéka, hiszen akárhány jegyű számból kivonva a fordítottját, 9-cel oszthatót kapunk.

Megjegyzések: Vannak, akik arra jönnek rá, hogy a bűvész összeadja az eredmény számjegyeit, majd ezt ismételi addig, amíg egyjegyűt nem kap.

Vannak, akik rájönnek, hogy a 9-es maradékról van szó, anélkül, hogy tudnák, hogy ezt hogyan számolja ki a bűvész. Újabb lehetőség, hogy megbeszéljük, hogy a számjegyek összege a 9-es maradékot is megadja (és hogy miért).

Kedvenc számot akár 1 és 9 között is lehetett volna választani, akkor könnyebb lett volna rájönni, hogy a 9-hez van köze a trükknek.

Kisebb csoportban a trükk úgy is bemutatható, hogy maximum 9 tanulót sorszámokkal látunk el, és a gondolt szám és a fordítottjának különbségéhez a sorszámukat kérjük hozzáadni. Ha a végeredményt cédulákra is felírják, amiket aztán összegyűjtetünk velük, a megkapott cédulákból meg tudjuk mondani, melyikek kitől kaptuk.

II.5. 11-es maradék

Gondolj egy négyjegyű számra. Add hozzá a fordítottját. Az eredményhez add hozzá az 1 és 5 közötti kedvenc számodat. Az eredményből megmondom, mi a kedvenc számod.

Megfejtés: A kedvenc szám az eredmény 11-es maradéka lesz.

Megjegyzések: Azoknak, akik még nem hallottak a 11-es oszthatósági szabályról, még arra is nehéz rájönniük, hogy mit csinál a bűvész. Meggondolhatják persze, hogy a négyjegyű szám

$$1000a + 100b + 10c + d,$$

a fordítottja

$$1000d + 100c + 10b + a,$$

a kettő összege pedig

$$1001(a + d) + 110(b + c),$$

ami osztható 11-gyel.

Arra is rájöhetnek, hogy a számjegyek váltott előjelű összegét számolja ki a bűvész, de zavarba jönnek, amikor ez az összeg negatív. Megbeszélendő, hogy a 11-es maradékot a számjegyek (hátulról vett) váltott előjelű összege adja meg, és hogy mi a teendő, ha ez negatív (például -4, akkor a maradék 7).

Most is választhattunk volna akár 1 és 11 közötti kedvenc számot, és most is lehetett volna (maximum 11 tanulóval) sorszámozott helyekből a cédulákra írt eredmény alapján a sorszámokat kitalálni.

Érdemes meggondolni, hogy mi lett volna a helyzet, ha nem pont négyjegyű számból indultunk volna ki. Páros sok számjegy esetén hozzáadni, páratlan sok jegy esetén kivonni érdemes a fordítottját, hogy 11-gyel oszthatót kapjunk.

II.6. Páratlan szám négyzete

Gondolj egy tetszőleges (pozitív egész) páratlan számra. Emeld négyzetre! Az eredményhez add hozzá a kedvenc (1 és 5 közötti) számodat. A végeredményből megmondom, mi volt a kedvenc számod.

Megfejtés: Páratlan számok négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul:

$$(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) + 1.$$

Mivel$k$ és $k + 1$ közül az egyik biztos páros, így $4k(k + 1)$ biztos osztható 8-cal. Így a végeredmény 8-as maradékánál eggyel kisebb szám a kedvenc.

Megjegyzések: Azok, akik kis gondolt számokkal kísérleteznek, arra gondolnak, hogy a bűvész ismeri a négyzetszámokat, és erre épít.

Mások az eredmény utolsó számjegyéből próbálják megfejteni a trükköt.

Arra is rá szoktak jönni, hogy páratlan szám négyzete 4-gyel osztva 1-et ad maradékul – de ez még nem teszi egyértelművé a megfejtést (főleg, ha nem csak 1-5 kedvenc számot engedünk meg).

II.7. 37-tel osztható hatjegyű szám

Gondolj egy háromjegyű számra. Én ezt pillanatok alatt kiegészítem egy másik (két- vagy) háromjegyűvel úgy, hogy az így kapott (akár elé, akár mögé írt számmal kiegészített) hatjegyű szám osztható lesz 37-tel.

Példa: A gondolt szám 123. Mögé írom, hogy 432, így a hatjegyű $123432 = 37 \cdot 3336$.

Megfejtés: A kapott hatjegyű számban az 1. és a 4. jegy összege ugyanannyi, mint a 2. és az 5., illetve a 3. és és a 6. összege, jelölje ezt d. A kiegészített szám $\underline{abc(d-a)(d-b)(d-c)}$ alakú, vagyis a szám

$$10^2(10^3-1)a + 10(10^3-1)b + (10^3-1)c + 111d.$$

Ennek az összegnek minden tagja osztható 111-gyel, így 37-tel is.

Megjegyzések: Több példa láttán a magyarázat megtalálása nélkül is kileshetik, hogy mi a bűvész taktikája. Emiatt érdemes más kiegészítést is mutatni, pl. a fenti példában 432 helyett $432 + 37 = 469$ is szerepelhet.

Ha a gondolt szám első jegye 9, akkor elé csak kétjegyűt írhatunk, mögé meg 0-val kezdődőt (d csak 9 lehet).

II.8. Hány órára gondoltál?

Gondolj egy számot 1 és 12 között. Többször egymás után koppintunk egy (12-es osztású) óra számlapjának valamelyik számára. Minden koppintásra számolj eggyel tovább. Amikor eléred a húszat, én éppen arra a számra fogok mutatni, amire gondoltál.

Megfejtés:

Az első hét koppintás tetszőleges lehet, hiszen nem gondolhatott 13-ra vagy nagyobbra. A 8. koppintásnál csak úgy kaphatott 20-at, ha 12-re gondolt, ezért 8. alkalommal a 12-re koppintok. A 9. koppintás (ha van), a 11 órára mutat, a 10. a 10 órára, és így tovább.

II.9. Mikor van a születésnapod?

Hányadik hónapban születtél? A hónap sorszámát szorozd meg kettővel és az eredményhez adj hozzá négyet. Ezt az összeget szorozd meg 25-tel, majd adj ehhez a szorzathoz ötöt. Az eredményt kétszereséhez add hozzá, hogy hányadikán születtél. Ha megmondod az eredményt, én kitalálom, hogy mikor van a születésnapod.

Megfejtés:

Az eredményből 210-et levonva olyan számot kapunk, amelynek utolsó két jegye megadja a napot, ezt levágva a hónapot kapjuk. (Ha x a hónap, y a nap sorszáma, akkor a következő műveletsort végzik el a gyerekek: $[(2x+4) \cdot 25 + 5] \cdot 2 + y = 100x + y + 210$.

Megjegyzések: Hasonló számkitalálós trükkök könnyen gyárthatók. Nehézségi szintjük és a matematikai tartalom igazítható az aktuális célhoz.

A tanulók is készíthetnek ilyet.

II.10. Ugyanannyi megfordított kártya

Leszámolok 20 lapot egy csomag francia kártyából, majd képével fölfelé belekeverem ezt a 20 lapot a csomagba. Ezután odaadom a csomagot egy nézőnek, aki megkeverheti, ha akarja, és megkérem, hogy a megkevert csomag fölső 20 lapját adja vissza úgy, hogy ne láthassam, hogy mennyi megfordított kártya van a 20 lap között. Ezután a hátam mögött megfordítok néhány lapot úgy, hogy ugyanannyi lap legyen megfordítva az én csomagomban, mint a nála maradt kártyák között.

Megfejtés:

Mind a 20 kártyát megfordítom. Ha x megfordított kártya maradt a nézőnél, akkor 20-x megfordított kártyát kaptam vissza. Mindet megfordítva nálam is x megfordított kártya lesz.

Megjegyzések: A gondolatmenet analóg a pohár víz és pohár bor esetével.

II.11. Számkártyák sorrendbe rakódása

A csomag 1-től 10-ig számozott számkártyákból áll. Kitesszük az asztalra a csomag legfelső lapját, majd a következő lapot a csomag aljára rakjuk. A kitett kártya mellé helyezzük a maradék legfelső lapját, majd a következőt ismét a csomag aljára rakjuk. Így folytatjuk, felváltva egyet az asztalra, egyet a csomag aljára téve, amíg az összes kártya az asztalra nem kerül. Meglepő módon éppen nagyság szerinti sorrendben kerülnek az asztalra a kártyák.

Megfejtés:

A kártyák eredeti sorrendjét kell jól megválasztani (felülről lefelé): 1, 6, 2, 10, 3, 7, 4, 9, 5, 8.

Megjegyzések: A megfelelő sorrend kitalálása jó feladat, több módszerrel megkapható. Az egyik kézenfekvő lehetőség például az, hogy a kész helyzetből kiindulva visszafelé kapja meg a tanuló a jó kiindulási sorrendet.

A trükköt csak az tudja bemutatni, aki kitalálta a jó sorrendet.

Más kártyaszámmal (pl. francia kártya egy színének 13 lapjával) is végiggondolható a trükk.

II.12. Huszonegy kártya három kupacban

Egy néző választ egyet 21 különböző kártyából. A kártyákat egyesével három kupac között sorban elosztom. A néző megmondja, hogy a választott kártyája melyik kupacba került. A kupacokat egymásra rakom úgy, hogy a megjelölt kupac középre kerüljön. A kártyákat ismét sorban elosztom egyesével három kupacra. A néző ismét megmondja, hogy melyik kupacban van a kiválasztott kártya, majd ismét egyesítem a három kupacot úgy, hogy a középső legyen a megjelölt kupac. Ezt az eljárást még egyszer megismétlem. Szemügyre véve a lapokat megmondom, hogy melyik volt a választott kártyája.

Megfejtés:

A választott kártya az egyesített kupac 11. lapja lesz az eljárás végén.

Az első egyesítés után tudjuk, hogy a 8., 9., . . . , 14. hely jön szóba. Ha meggondoljuk, hogy a további két szétrakás és egyesítés során ez a hét lap hová kerülhet, kiderül, hogy a választott kártya végül a csomag középső lapja lesz.

II.13. Számkártyák

Számokat írtam 5 kártyára a következő módon:

1. kártya: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31

2. kártya: 2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30, 31

3. kártya: 4, 5, 6, 7, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 29, 30, 31

4. kártya: 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31

5. kártya: 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31

Megkérek egy nézőt, hogy gondoljon egy 1 és 31 közötti számra, majd adja a kezembe azokat a kártyákat, melyeken szerepel a gondolt szám. Rápillantva a kezembe adott kártyákra azonnal megmondom, hogy melyik számra gondolt.

Megfejtés:

A gondolt szám a kezembe adott kártyák legkisebb számainak összege lesz. A trükk a számok kettes számrendszerbeli alakján múlik. Aszerint kerültek ugyanis a kártyákra a számok, hogy a kettes számrendszerben a megfelelő helyiértékű jegyük 1.

Megjegyzések: Több számot is szerepeltethetünk több megfelelően elkészített kártyával.

Könnyű kitalálni, hogy mit csinál a bűvész, de a magyarázatot megadni nehezebb.

Nehezebb változatot készíthetünk úgy, hogy nem nagyság szerint írjuk a kártyákra a számokat.

III. fejezet

Álbizonyítások és beugratók

A geometriában szinte minden feladathoz ábrát készítünk. Ez nagyban segítheti a feladat megoldását. Az ábra azonban hibás következtetésekre is vezethet. A feladatok megoldása közben olykor a gondolatmenetbe is hiba csúszhat. Az is előfordulhat, hogy (tévedésből) csak valamilyen speciális alakzatra oldjuk meg az adott feladatot, és általánosan nem alkalmazható a gondolatmenet.

Mindezek hibás megoldásokra vezetnek, amelyek meglepően gyakran fordulnak elő a tanulók munkáiban (sőt akár tankönyvekben is). A hibás ábrák, téves vagy hiányos gondolatmenetek felismertetése, kiszűrése és javítása fontos feladat a tanításban, még ha nem is mindig egyszerű.

Sem beugratókból, sem álbizonyításokból nem érdemes egyszerre túl sokat venni, mert a tisztázás, az igényességre nevelés és nem az elbizonytalanítás a cél velük.

Módszertani feladat:

Milyen ismeret alapján gondolja hamisnak az állítást? Keresse meg,hogy hol van hiba a „bizonyításunk" gondolatmenetében! Ha ellenőrizni akarja a válaszát, nézze meg a mi megjegyzésünket!

III.1. Beugratók

a) Egy ember nézeget egy arcképet. Valaki megkérdezi tőle: „Kinek a képét nézed? „Testvérem nincs" – válaszolja az ember –, „de ennek az embernek az apja az apám fia." Kinek a képét nézi?

b) Feleségül veheti-e valaki az özvegye nővérét?

c) A nap nyugaton, vagy nyugoton kel?

d) Egy vonat elindul Bostonból New Yorkba, egy másik New Yorkból Bostonba. A két vonat sebessége egyforma. Melyik lesz közelebb Bostonhoz, amikor találkoznak?

e) Egy ház tetejének egyik fele 60, másik fele 70 fokos szögben lejt. Tegyük fel, hogy egy kakas épp a tető élére tojik egy tojást. Melyik oldalon fog legurulni?

f) Ha épp két ország határán zuhan le egy repülőgép, melyik országban kell eltemetni a túlélőket?

g) Ez a fiam, de nem vagyok az apja.

h) Hány óráig elég az a 3 tabletta, amiből félóránként kell bevenni egyet?

i) Három vándor megkéri a portást, hogy fizessen be nekik egy három ágyas szobát. Mind a hárman adtak neki 10-10 pengőt. A portás a harminc pengővel elment befizetni a szobát. De a szoba csak 25 pengőbe került. A portás tehát visszakapott 5 pengőt, amiből rövid gondolkodás után zsebre tett kettőt, gondolván,

hogy az 5 pengőt úgysem tudná igazságosan elosztani. Így a vándoroknak csak egy-egy pengőt adott vissza. Ezek után tehát mind a hárman kilenc-kilenc pengőt fizettek, azaz hárman együtt 27-et, plusz 2 van a portásnál, az összesen 29 pengő. Hova tűnt a harmincadik pengő?

Megjegyzések: a) Sokan a képet néző ember helyébe képzelik magukat, és a következőképpen okoskodnak: „Mivel testvérem nincs, az apám fia csak én lehetek. Tehát a saját képemet nézem." Az illető lehet ugyan az apja egyetlen fia, de nem a saját képét nézi, hanem az apja annak a személynek, akinek a képét nézi.

b) Akinek özvegye van, az halott.

c) A nap keleten kel.

d) Egyenlő távolságra vannak.

e) A kakas nem tojik tojást.

f) A túlélőket nem kell eltemetni.

g) Az anyja vagyok.

h) 1 óra alatt elfogy.

i) Aki nem találja a 30. pengőt, az hibásan következtet. Igaz, hogy a vándorok összesen 27 pengőt fizettek, de a portásnál lévő kettő pengő ehhez nem hozzáadódik, hanem levonódik, hiszen a 27 pengőből 25 elment a szobára, és 2 van a portásnál.

III.2. a) Bármely n pont egy egyenesre illeszkedik.

Álbizonyítás: Teljes indukciót alkalmazunk.

1. lépés: 1 ponthoz, 2 ponthoz mindig található egyenes, amelyre illeszkednek.

2. lépés: Tegyük fel, hogy n-ig beláttuk az állítást, azaz bármely n pont egy egyenesre illeszkedik. Felveszünk $n+1$ pontot (P_1, P_2, $\ldots$, P_{n+1}), és belátjuk az állítást. Az indukciós feltevés alapján az első n pont egy egyenesre illeszkedik. Hagyjuk el most az első pontot, és vegyük be az utolsót. Így ismét n pont lesz, amelyek ismét egy egyenesre illeszkednek. (Ez a közös egyenes a másodiktól az n-edikig számozott pontokat is tartalmazza.) Ha most újra hozzávesszük az elhagyott pontot − amely már eddig is ezen az egyenesen volt −, továbbra is egy egyenesre illeszkednek a pontok.

Ezzel a teljes indukció szerint bebizonyítottuk az állítást.

b) A sík bármely n nem párhuzamos egyenese illeszkedik ugyanarra a pontra.

Álbizonyítás: Teljes indukciót alkalmazunk.

1. lépés: 1 és 2 egyenes esetén nyilvánvaló az állítás.

2. lépés: tegyük fel, hogy n egyenesre teljesül az állítás. Vegyünk fel egy $n+1$-edik egyenest. Először hagyjuk el az utolsó egyenest: a teljes indukciós feltevés miatt a többi egyenes egyetlen közös pontban metszi egymást. Akkor hagyjuk el az első, és vegyük hozzá az utolsó egyenest: szintén az indukciós feltevés miatt ezek az egyenesek is egy közös ponton mennek át. Mivel a másodiktól az n-edikig számozott egyenesek is ugyanezen a ponton mennek át, akkor ha visszatesszük az elhagyott egyenest (amely eddig is átment a közös ponton), akkor most már mind az $n+1$ egyenes átmegy ugyanazon a ponton.

Ezzel a teljes indukció szerint bebizonyítottuk az állítást.

Megjegyzés: Mivel az állítás minden n-re vonatkozik, elegendő ellenpéldát mutatni. Egy háromszög 3 csúcsa, illetve 3 oldala alkalmas ellenpélda.

A teljes indukcióban az öröklődés bizonyítása közben „csaltunk”: A közös egyenes a másodiktól az n-edikig számozott pontokat is tartalmazza. Ha most újra hozzávesszük az elhagyott pontot – amely már eddig is ezen az egyenesen volt –, továbbra is egy egyenesre illeszkednek a pontok. Helyesen: a P_1 pont a P_1, P_2, $\ldots$, P_n egyenesen volt, most a P_2, P_3, $\ldots$, P_{n+1} egyenesről beszélünk, és azt mondjuk, hogy eddig is azon volt. A két egyenes pontosan akkor esik egybe, ha van két közös pontjuk, de ezt nem tudjuk biztosítani, hiszen ha $n = 2$ akkor ez nem feltétlenül igaz.

A *b)* esetben hasonló okokra vezethető vissza az ellentmondás.

III.3. Bármely négy, A, B, C, D pont, amelyekre AB egyenese és CD egyenese nem párhuzamos, illeszkedik egy körre.

Álbizonyítás: Legyen az e egyenes az AB szakasz felezőmerőlegese, és legyen az f egyenes a CD szakasz felező merőlegese. Legyen továbbá e és f metszéspontja O. O létezik, mert az AB egyenese és a CD egyenese nem párhuzamos, így a szakaszfelezőik sem azok. Mivel az OA távolság egyenlő az OB távolsággal, továbbá az OC távolság és az OD távolság is egyenlő, a négy pont O-tól mért távolsága egyenlő, így azok egy körre illeszkednek.

Megjegyzés: Ugyan $AO = BO$ és $CO = DO$, de ettől még lehet, hogy $AO = BO \neq CO = DO$, vagyis a négy pont nem illeszkedik egy körre.

III.4. A párhuzamossági axióma felhasználása nélkül bizonyítható, hogy a háromszög belső szögeinek összege $180°$.

Álbizonyítás: Tegyük fel, hogy a háromszög belső szögei összege Θ. Tekintsünk egy tetszőleges háromszöget. Bontsuk fel a legnagyobb (β) szögéhez tartozó magasságvonalával két derékszögű háromszögre. E két háromszög belső szögei α, β_1, $90°$, valamint β_2, γ, $90°$. Ezen háromszögek belső szögeinek összegéből kifejezhető a befoglaló háromszög belső szögeinek összege:

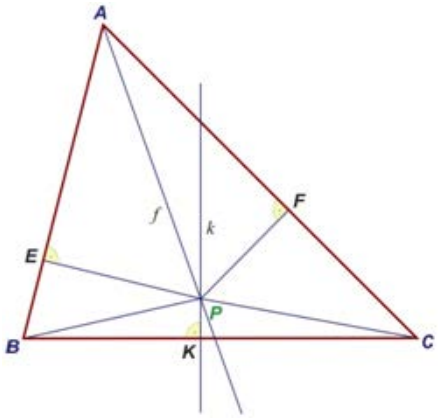
$\alpha + \beta_1 + 90° + \beta_2 + \gamma + 90° = 2\Theta = \alpha + \beta + \gamma + 180° = \Theta + 180°$.

Ebből az következik, hogy $\Theta = 180°$, és közben nem használtuk fel a párhuzamossági axiómát.

Megjegyzés: A három háromszög szögösszegének egymás közötti egyenlősége csak olyan rendszerben tehető fel, amelyben teljesül a párhuzamossági axióma.

III.5. Minden háromszög egyenlő szárú.

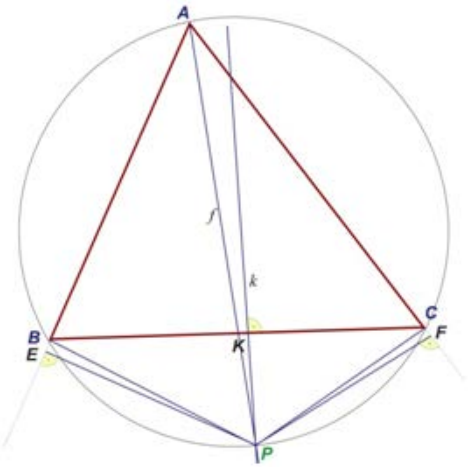
1. Álbizonyítás: Az ábrának megfelelően felvesszük az ABC háromszöget, és behúzzuk az A csúcsból induló szögfelező egyenesét (f), valamint az A-val szemközti a oldal K felezőpontjában az oldal felező merőlegesét (k). A két egyenes metszéspontját jelölje P.



Merőlegest bocsátunk P-ből az AB és az AC oldalra is. Az AB-re eső talppontot jelölje E, az AC-re esőt pedig F. Az AFP és az AEP háromszögek megfelelő szögei egyenlők (derékszögűek és az A-nál levő hegyesszögük egyenlő), tehát hasonlóak. Mivel P a szögfelező pontja, ezért $PE = PF$. Vagyis a két háromszögnek egy megfelelő oldalpárja is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó. Így az AE és AF megfelelő oldalak is egyenlők. Mivel P az a oldalfelező merőlegesén is rajta van, szimmetria miatt a BPK és az CPK háromszögek egymás k-ra vonatkozó tükörképei, tehát egybevágók. Eszerint a BPE és a CPF háromszögek egyrészt derékszögűek, másrészt két-két oldaluk egyenlő ($PE = PF$, $BP = CP$), tehát egybevágók. Így a harmadik oldaluk is egyenlő: $EB = FC$. Mivel így $AE + EB = EF + FC$, ezért az A csúcsból induló két oldal egyenlő hosszú, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

Megjegyzés: Többször is kihasználtuk a (hibás) ábrát, ennek alapján belső pontnak tekintettünk olyan pontokat, amelyekről nem láttuk be, hogy azok. (Lássuk be, hogy ha a háromszög nem egyenlő szárú, akkor a P pont mindig a háromszögön kívül van!)

2. Álbizonyítás: Az ábrának megfelelően felvesszük az ABC háromszöget, és behúzzuk az A csúcsból induló szögfelező egyenesét (f), valamint az A-val szemközti a oldal K felezőpontjában az oldal felezőmerőlegesét (k). A két egyenes metszéspontját jelölje P. Már tudjuk, hogy a háromszögön kívülre esik.

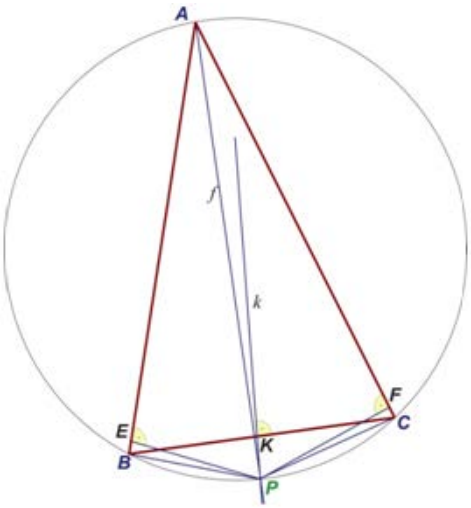


Merőlegest bocsátunk P-ből az AB és az AC oldalra is. Az AB-re eső talppontot jelölje E, az AC-re esőt pedig F, de most (mint az ábrán is látható) az oldalak meghosszabbítására esnek. Az AFP és az AEP háromszögek megfelelő szögei egyenlők (derékszögűek és az A-nál levő hegyesszögük egyenlő), tehát hasonlóak. Mivel P a szögfelező pontja, ezért $PE = PF$. Vagyis a két háromszögnek egy megfelelő oldalpárja is egyenlő, ezért a két háromszög egybevágó. Így az AE és AF megfelelő oldalak is egyenlők. Mivel P az a oldalfelező merőlegesén is rajta van, szimmetria miatt a BPK és az CPK háromszögek egymás k-ra vonatkozó tükörképei, tehát egybevágók. Eszerint a BPE és a CPF háromszögek egyrészt derékszögűek, másrészt két-két oldaluk egyenlő ($PE = PF$, $BP = CP$), tehát egybevágók. Így a harmadik

oldaluk is egyenlő: $EB = FC$. Mivel így $AE - EB = EF - FC$, ezért az A csúcsból induló két oldal egyenlő hosszú, vagyis a háromszög egyenlő szárú.

Megjegyzés: Ismét kihasználtuk a (másként hibás) ábrát, ennek alapján külső pontnak tekintettünk olyan pontokat, amelyekről nem láttuk be, hogy azok. (Lássuk be, hogy E és F közül az egyik az oldalra, a másik az oldal meghosszabbítására esik!)

További megjegyzések a példához: még több álbizonyítást is idézhetnénk, például a P pont oldalfelező pont stb.



Ehelyett inkább rámutatunk, hogy miként érhetők tetten a fenti álbizonyítások hibái. Egyfelől túlságosan a hibás ábrára hagyatkoztunk, pedig

a) Ha a háromszög nem egyenlő szárú, f és k két metsző egyenes, amelyek P metszéspontja a BC húrhoz tartozó (A-t nem tartalmazó) ív felezőpontja, tehát a háromszögön kívülre esik. Ez azért igaz, mert az f szögfelező felezi az ABC háromszög köré írt körének BC oldalához tartozó (A-t nem tartalmazó) ívét (fele akkora szöghöz fele akkora ív tartozik), a k egyenes pedig a BC húr felezőmerőlegese ugyanebben a körben, vagyis felezi a húrhoz tartozó íveket, így az A-t nem tartalmazó ív felezőpontján is átmegy.

b) A P-ből az AB és AC oldalakra bocsájtott merőlegesek talppontja az A-ból induló hosszabbik oldalon belülre, a rövidebbiken kívülre esik, mert a szögfelezőre szimmetrikusan helyezkednek el.

c) Fontos felhívni a tanulók figyelmét arra is, hogy hibás következtetés is szerepel az álbizonyításokban: Feltételeztük, hogy ha két derékszögű háromszögben az átfogók és egy-egy befogó egyenlő, akkor a két háromszöget tükrözés viszi egymásba. Esetünkben azonban ez éppen nem igaz, mert a PEB és a PFC háromszögek körüljárása megegyezik.

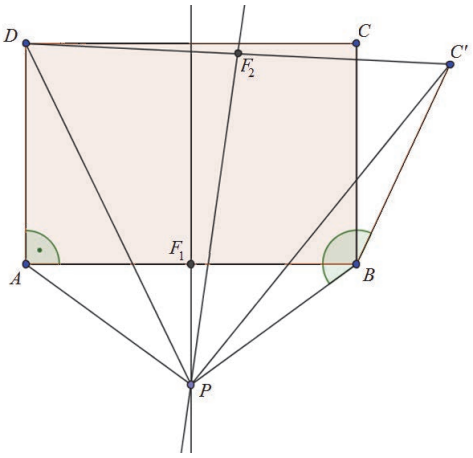
III.6. Egy külső pontból egy egyenesre két merőleges bocsájtható.

Álbizonyítás: Felveszünk két metsző kört (k_1, k_2), az egyik metszéspontjuk legyen Q. Meghúzzuk k_1-ben és k_2-ben a Q-t tartalmazó átmérőt: QS és QT. Összekötjük az S és T pontokat és ennek az egyenesnek a körökkel vett (másik) metszéspontjait jelölje U és V (U a k_2, V a k_1 pontja). Az átmérőkre rajzolt szögek derékszögek, ezért QU és QV is merőleges ST-re.

Megjegyzés: Ez csak úgy lehetséges, ha U és V egybeesik. Sőt U is és V is a két kör másik közös metszéspontja (R). Éppen ezt szokás úgy bizonyítani, hogy egy külső pontból egy egyenesre csak egy merőleges bocsájtható, vagyis nem keletkezhet két metszéspont.

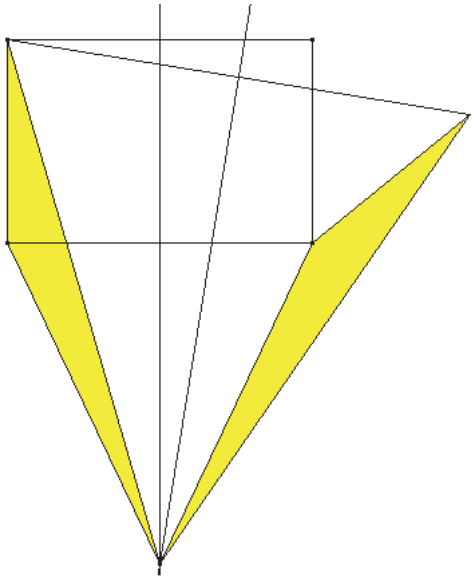
III.7. A derékszög nagyobb önmagánál.

Álbizonyítás: Felveszünk egy $ABCD$ téglalapot, és a BC oldalt elforgatjuk B körül a téglalapon kívülre (C képe legyen C'). Legyen az AB oldal felezőpontja F_1, a DC' felezőpontja F_2. Megrajzoljuk az AB, valamint a DC' szakaszok felezőmerőlegesét.



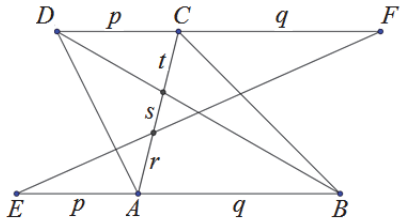
Az egyenesek (létező) metszéspontját jelölje P. Mivel P az AB szakasz felezőmerőlegesén van, ezért $AP = BP$. Hasonlóan $PD = PC'$, mert P a DC' felezőmerőlegesén van. Ugyanakkor $AD = BC'$, mert így vettük fel C'-t. Eszerint az APD és a $C'BP$ háromszögekben a megfelelő oldalak egyenlők, a két háromszög egybevágó. Így a PAD és a PBD szögek egyenlők, ezekből kivonva az ugyancsak egyenlő PAB, illetve PBA szögeket, az kapjuk, hogy a BAD szög (amely derékszög) egyenlő az ABC' szöggel, amely azonban C' származtatása miatt nagyobb derékszögnél.

Megjegyzés: A PAD és a PBC' háromszög tényleg egybevágó, de nem az ábra szerint helyezkedik el, hanem úgy, hogy a PC' nem metsz bele a téglalapba. (A két satírozott háromszög az új ábrán.)



III.8. Két szakasz összhossza 0

Felveszünk egy $ABCD$ trapézt, felmérjük az $AB = q$ hosszt a CD oldalra, a $CD = q$ hosszt az AB oldalra (az ábra szerint). Megmutatjuk, hogy $p + q = 0$.



Álbizonyítás: Behúzzuk a trapéz átlóit és az EF szakaszt.

A keletkező szakaszokra teljesülnek az alábbi összefüggések:

$$\frac{p}{q} = \frac{t}{r+s} = \frac{r}{s+t}$$

Itt felhasználjuk, hogy ha $a : b = c : d = e : f = k$, akkor $a : b = (c-e) : (d-f)$, mert $c = kd$, $e = kf$ és $c - e = k(d-f)$, tehát $(c-e) : (d-f) = k$.

Ebből

$$\frac{p}{q} = \frac{t-r}{r+s-(s+t)} = \frac{t-r}{r-t} = -1,$$

vagyis $p = -q$, tehát $p + q = 0$.

Megjegyzés: A párhuzamos szelők tétele alapján felírható, hogy $\frac{t+s}{DE} = \frac{p}{p+q} = \frac{r+s}{DE}$ (egyszer a B, egyszer az F pontból nézzük). Ebből következik, hogy $t = r$. Emiatt $r + s = s + t$, vagyis egy „0/0” alakú törttel tettük egyenlővé a $\frac{p}{q}$ törtet.

III.9. A p paraméter mely értékeire van egyetlen megoldása a $\sqrt{px} = 1 + x$ egyenletnek?

(Pataki János közölte a Középiskolai Matematikai Lapokban)

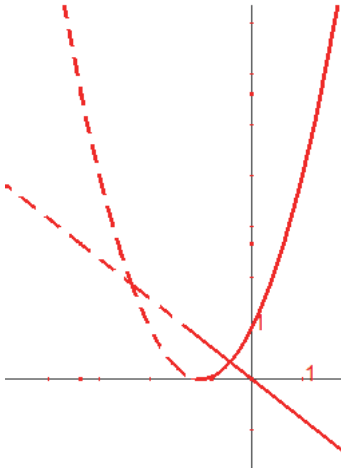
„Meggondolás”: Ha az egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük és egy oldalra rendezzük az egyenletet, akkor az $x^2 + (2-p)x + 1 = 0$ egyenletet kell megoldanunk. A megoldóképlet alapján

$$x_{1,2} = \frac{p - 2 \pm \sqrt{p^2 - 4p + 4 - 4}}{2} = \frac{p - 2 \pm \sqrt{p^2 - 4p}}{2}.$$

Ez akkor egyértelműen meghatározott, ha $p^2 = 4p$, vagyis $p = 0$ és akkor $x = -1$ vagy $p = 4$ és $x = 1$. Ha ezeket visszahelyettesítjük az eredeti egyenletbe, akkor láthatjuk, hogy valóban megoldásai a feladatnak.

Megjegyzések: Ha grafikusan oldjuk meg négyzetre emelés után az egyenletet, akkor az $y = (x+1)^2$ parabola és az $y = px$ egyenes metszéspontjait keressük. Ez az egyenes mindig átmegy az origón, 2 helyzetben érinti ($p = 0$ és $p = 4$) a parabolát, ezeket kaptuk meg a következményegyenletből a diszkriminánsnullává tételével.

A $0 < p < 4$ paraméterértékekre az egyenesnek nincs közös pontja a parabolával, így az eredeti egyenletnek sincs gyöke. Ha az egyenes meredeksége 4-nél nagyobb, akkor 2 olyan pontban metszi a parabolát, amelyek abszcisszái az eredeti egyenletnek is gyökei. Negatív meredekségnél is két metszéspont van, de az egyik metszéspont abszcisszája nem tartozik az eredeti egyenlet alaphalmazához. A négyzetre emeléssel hamis gyököt hoztunk be (az ábrán a szaggatott ívet és a szaggatott félegyenes metszéspontjának x koordinátája).



A „meggondolás” iránti kétely felébresztéséhez kipróbáljuk a $p = -1$ paramétert és az $x = \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ értéket:

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \stackrel{?}{=} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

(Itt az egyenlőségjelek után csupa pozitív értékek szerepelnek.) Vagyis olyan p és x értékeket találtunk, amelyekre teljesül az eredeti egyenlet, de a „meggondolásunkból” nem jött ki. Vajon mi az oka annak, hogy ezt a megoldást nem kaptuk meg? A négyzetre emelés miatt nem veszthettünk gyököt, hiszen olyan következményegyenletet kapunk, amelynek megoldáshalmaza tartalmazza a kiinduló egyenlet megoldáshalmazát. Itt azonban nyilvánvalóan megoldást vesztettünk, mégpedig nem az eredeti egyenlet gyökeit vesztettük el, hanem a feladat megoldásai (olyan p, amelyhez egyértelmű x tartozik) közül vesztettünk értékeket azáltal, hogy a négyzetre emelés hamis x gyököket hozott be.

Vizsgáljuk meg, hogy mely esetekben kaptunk úgy hamis gyököt, hogy ezáltal megoldást vesztettünk el.

A $x^2+(2-p)x+1 = 0$ következményegyenlet esetében elintéztük azokat az eseteket, amikor a diszkrimináns 0, erre kaptuk megoldásként a $p = 0$ és a $p = 4$ értékeket, amelyekhez a következményegyenletnek egy-egy egyértelmű megoldása tartozik és megoldása az eredeti egyenletnek is.

Ha p és $p-4$ különböző előjelűek ($0 < p < 4$), akkor a diszkrimináns negatív, nincs a következményegyenletnek gyöke és az eredetinek sem lehetett.

A $p < 0$, vagy $p > 4$ esetekben a következményegyenletnek 2 valós gyöke van.

Ha $p > 4$, akkor két gyöke van az eredeti egyenletnek is (x_1 és x_2 is pozitív), tehát ezek a p értékek nem tartoznak a megoldáshalmazhoz.

Ha $p < 0$, akkor az eredeti egyenlet gyökeit is a negatív számok körében kell keresnünk.

A gyökök és együtthatók közti összefüggésből látszik, hogy a gyökök összege $p-2$, az egyenlet gyökpárjai pedig egymás reciprokai, így előjelük megegyezik, hiszen 1 a szorzatuk. Ha p negatív, akkor mindkét gyök negatív, hiszen az összegük $(p-2)$ negatív. Így a két gyök közül az egyik a $(-1; 0)$, a másik a $(-\infty; -1)$ intervallumba esik.

A két kapott gyök közül azonban csak az egyik elégíti ki az eredeti egyenletet, hiszen a jobb oldalon szereplő kifejezés sem lehet negatív, x sem lehet -1-nél kisebb. Itt jött be a négyzetre emeléssel hamis gyök. A negatív p értékekre kapott két gyök közül tehát pontosan az egyik hamis, vagyis minden negatív p-re teljesül, hogy az eredeti egyenletnek pontosan egy gyöke van.

Megoldás: Az $x - \sqrt{px} + 1 = 0$ egyenletet p előjele szerint vizsgáljuk:

$x = 0$ soha nem megoldás.

a) $p = 0$: $x = -1$, egyetlen megoldás van.

b) $p > 0$: ekkor $x > 0$. Az eredeti egyenlettel ekvivalens $x - \sqrt{p}\sqrt{x} + 1 = 0$ tekinthető egy $\sqrt{x}$-ben másodfokú egyenletnek. Gyökei: $\dfrac{\sqrt{p} \pm \sqrt{p-4}}{2}$, ez pedig csak $p = 4$ esetén ad egyetlen gyököt, amikor $x = 1$.

c) $p < 0$: ekkor $x < 0$. Az egyenlet ekkor: $x - \sqrt{-p} \cdot \sqrt{-x} + 1 = 0$. Mivel $\sqrt{-x}$-ben másodfokú egyenletet szeretnénk felírni, és $\sqrt{-x}^2 = -x$, így az eredeti egyenlet ekkor: $-\sqrt{-x}^2 - \sqrt{-p}\sqrt{-x} + 1 = 0$. Gyökei: $\dfrac{\sqrt{-p} \pm \sqrt{-p+4}}{2}$. A diszkriminánsa minden negatív p-re pozitív, ám a két gyök közül csak az egyik pozitív ($\sqrt{-x} \geq 0$), mert $-p \leq -p + 4$. Vagyis negatív p-re csak az $\dfrac{\sqrt{-p} + \sqrt{-p+4}}{2}$ megfelelő gyök, és ez az egyetlen.

IV. fejezet

Fejtörők

A fejtörő olyan (nem feltétlenül matematikai értelemben vett) feladat, amely nem igényel magas szintű matematikai ismeretet, de a megoldásához olyan gondolatmenet, megoldásmenet szükséges, amely hosszabb kísérletezést, szisztematikus stratégiát vagy a probléma mélyebb átlátását igényli.

IV.1. A negyedik vízi jármű

Valahol az Atlanti-óceánban négy vízi jármű halad azonos sebességgel, ugyanabban az irányban, egymástól páronként 2 km-es távolságra. Az egyik vitorlás, a másik halászhajó, a harmadik pedig gőzhajó. Vajon mi a negyedik jármű?

Megoldás: A negyedik jármű tengeralattjáró.

Megjegyzés: Első hallásra mulatságosnak tűnik a kérdés, azt hisszük, hogy semmi információnk sincs a negyedik járműről. Egy fontos tény mégis van, a négy vízi jármű egymástól páronként 2 km-es távolságra található. Azt pedig tudjuk, hogy ez az elrendezés csak úgy lehetséges, ha egy képzeletbeli szabályos tetraéder négy csúcsában vannak a járművek. Három az óceán felszínén van, így csak a negyedik csak a víz felszíne alatt lehet, azaz a negyedik tengeralattjáró. (A levegőben is lehetne a negyedik jármű, például léghajó, de a kikötés szerint csak vízi jármű jöhet szóba, ami ritkán tartózkodik a levegőben. Ha a feladatot nem vízi járművekkel, hanem hajókkal fogalmazzuk meg, ez is lehetséges megoldás lenne.)

IV.2. Két egyenlő hosszú zsinór

Két ugyanolyan hosszú és anyagú gyújtózsinór darabunk van. Ha meggyújtjuk, mindkettő 1 percig ég (nem feltétlenül egyenletesen). Hogyan lehet e két zsinór segítségével (más segédeszköz nem használható) pontosan 15 másodpercet kimérni?

Megoldás: Az egyiket mindkét végén, a másikat egyik végén meggyújtjuk. A mindkét végén meggyújtott 30 másodperc alatt teljesen elég, a másiknak megmarad egy darabja, amely még 30 másodpercig égne. Ennek a másik végét is meggyújtjuk, innentől számítva épp 15 másodperc alatt ég el teljesen.

IV.3. Két gyerek és a katonák

Egy folyó partján két gyerek játszik. Van egy csónakjuk. Odaérkezik 12 katona, akik szeretnének átkelni a folyón. A csónak vagy 1 katonát, vagy két gyereket bír el. Át tudnak-e kelni mindannyian a folyón?

Megoldás: Két gyermek átmegy a túlpartra, az egyik visszajön a csónakkal. 1 katona átmegy, a túlparton maradt gyerek visszajön a csónakkal. Így egyenként átjuttatják a katonákat és végül maguk is átmennek.

Megjegyzések: A meggondolás nehézségét az jelenti, hogy látszólag felesleges dolgot teszünk, visszavisszük, amit már elvittünk. Kisebb gyerekekkel érdemes rajzon vagy korongokkal szemléltetni a helyzeteket.

Az algoritmusok tanulásának fontos fázisa, hogy észreveszik a kiinduló és a közbülső helyzetek közötti kapcsolatot: Ha az innenső parton 1 csónak, 2 gyerek és 11 katona van, akkor ugyanaz a tennivaló, mint 12 katonánál volt.

A katonák száma tetszőleges lehet.

IV.4. A gyerekek és az alagút

Egy alagút bejáratánál tanakodik 4 gyerek. Az alagúton csak elemlámpa fénye mellett tudnak áthaladni. Olyan keskeny helyen kell menni, hogy legfeljebb két gyerek mehet egyszerre. A leggyorsabb gyereknek 1 perc, a másodiknak 2 perc, a harmadiknak 4 perc, a leglassúbbnak pedig 5 perc kell az átéréshez. Egy elemlámpájuk van, ami mindössze 12 percig tud világítani. Át tudnak-e menni mindannyian az alagúton?

Megoldás: Át tudnak menni. Az 1 és 2 perc alatt átérő két gyerek átmegy együtt (2 perc), az 1 perces visszahozza a lámpát (eltelt 3 perc), a 4 és 4 perc alatt átérő két gyerek átmegy együtt (eltelt 8 perc), a 2 perces visszahozza a lámpát (eltelt 10 perc) és átmennek együtt az 1 percessel (12 perc).

Megjegyzések: Természetes próbálkozás, hogy a leggyorsabb vigye át a többit, ehhez azonban $2 + 1 + 4 + 1 + 5 = 13$ perc kellene. Kisebb gyerekeket elkedvetleníthet, hogy ügyesen végiggondolták és nem sikerült átjutni. Számukra érdemes nyitva hagyni, hogy mennyi ideig működik a lámpa, de az ő feladatuk is az legyen, hogy próbáljanak minél rövidebb idő alatt átérni.

IV.5. A farkas, a kecske és a káposzta

Át akarunk vinni a folyón egy kecskét, egy farkast és egy káposztát, de a ladikban a háromból egyszerre egyet tudunk vinni. A farkast nem hagyhatjuk magára a kecskével a parton, mert megeszi. Viszont hasonlóan a kecskét sem hagyhatjuk magára a káposztával. (Amíg ott vagyok velük, sem a farkas nem eszi meg a kecskét, sem a kecske a káposztát.) Mit lehet tenni?

Megoldás: Először átvisszük a kecskét. Utána visszamegyünk, és átvisszük a farkast, és visszahozzuk a kecskét. Majd átvisszük a káposztát, végül visszamegyünk a kecskéért.

Megjegyzés: Fontos észrevétel, hogy bármely szereplőt ott lehet hagyni egyedül, valamint az is, hogy a farkas nem bántja a káposztát.

IV.6. Három ládika hamis felirattal

Három ládika egyikében két arany, másikában két ezüst, a harmadikban egy arany és egy ezüst érme van. A ládikákra feliratok is kerültek: „Ebben a ládában két arany érme van.”, „Ebben a ládában két ezüst érme van.”, „Ebben a ládában egy arany és egy ezüst érme van.”, de egyik ládikára sem a tartalmának megfelelő felirat került. Egy ládikát kinyithatunk, és csukott szemmel kivehetjük belőle az egyik érmét, amit aztán megnézhetünk. Meg tudjuk-e állapítani íly módon, hogy melyik ládában mi van?

Megoldás: Vegyünk ki az „Ebben a ládában egy arany és egy ezüst érme van.” feliratú ládából egy érmét. Ha ez arany, akkor tudjuk, hogy mivel hamis a felirat, a ládában a másik érme is arany. Ekkor az „Ebben a ládában két arany érme van.”feliratú ládában nem lehet egy arany és egy ezüst érme, mert ekkor a harmadik láda felirata igaz lenne, tehát ebben két ezüst érmének kell lennie, a harmadik ládában pedig egy aranynak és egy ezüstnek. Hasonlóan gondolható végig, hogy ha a „vegyes” feliratú ládikából ezüst érmét húztunk ki, akkor ott két ezüstnek kell lennie, a „két ezüst” feliratúban nem lehetnek vegyesen, mert ekkor „két arany” igaz lenne. stb.

IV.7. Kép a ládikában

Három ládika egyikében elrejtettek egy képet. A ládák feliratai rendre: „A kép ebben a ládikában van.”, „A kép nem ebben a ládikában van.”, „A kép nem az első ládikában van.”. Tudható, hogy a három felirat közül legfeljebb egy igaz. Melyikben van a kép?

Megoldás: A kép a második ládikában van.

Megjegyzés: A feladat megtalálható Smullyan (1996) könyvében kicsit más szöveggel (első, második, harmadik láda helyett aranyból, ezüstből és ólomból készült ládikával).

IV.8. A legbölcsebb bölcs

Három bölcs versenyez a „legbölcsebb bölcs” címért. Mindhármuk fejére raknak vagy egy fehér, vagy egy fekete sapkát egy előre megmutatott, 2 fehér és 3 fekete sapkából álló készletből. Egymás sapkáit látják, sajátjukat nem, és nem beszélnek egymással. Az nyer, aki elsőnek kitalálja, milyen színű sapka van rajta. Rövid hallgatás után az egyik bölcs megszólal: „Rajtam fekete sapka van”. Honnan tudhatta?

Megoldás: Ha az egyik bölcs helyére képzelve magam két fehér sapkát látok, rögtön tudom, hogy rajtam fekete van. Ha egy fehér és egy fekete sapkát látnék, akkor ha rajtam fehér volna, akkor lenne olyan, aki két fehéret lát, és az rögtön szólna.

Ha két fekete sapkát látnék és rajtam fehér volna, akkor lenne olyan, aki egy fehéret és egy feketét lát, és az előbbi gondolatmenettel hamar kitalálná, hogy rajta csak fekete lehet. Ha tehát rövid időn belül senki sem szólalt meg, akkor rajtam fekete sapka van.

Megjegyzés: A kitalálón mindenképp fekete sapka van. A verseny úgy igazságos, ha mindenkire egyforma sapkát (fekete) adnak. Ezt akár a feladat szövegében is elárulhatjuk. A lehetőségek végiggondolása ekkor a „mindenki két feketét lát” esettel kezdődik, de a megoldáshoz ekkor is végig kell gondolnunk, az összes „mi lenne, ha ...” esetet.

IV.9. Száz fogoly

Száz fogolynak megígérik, hogy attól függően, hogy mennyire okosak, valahányan megmenekülhetnek közülük. A körülmények tisztázása és némi gondolkodási idő – melynek során összebeszélhetnek – után felállítják egy sorban egymás háta mögé őket úgy, hogy mindenki láthatja a sorban előtte állókat, és hallhatja a mögötte állókat. Mindenkire – véletlenszerűen – feladnak egy fekete vagy egy fehér sapkát. Hátulról kezdve

egyesével nyilatkozhatnak, hogy mit gondolnak arról, hogy rajtuk milyen színű sapka van. Aki eltalálja sapkája színét, kiszabadul, aki nem találja el, fogságban marad. Milyen előre egyeztetett stratégia esetén sikerül a legtöbb fogolynak kiszabadulnia?

Megoldás: Akár 99 fogoly is kiszabadulhat. Érdemes előre megállapodniuk abban, hogy a leghátsó akkor mond „feketét", ha maga előtt páratlan sok fekete sapkát lát, egyébként „fehéret" mond.

Ha például „feketét" mond az utolsó, akkor az előtte álló tudni fogja, hogy rajta milyen színű sapka van. Ha ő is páratlan sok feketét lát, akkor rajta fehér sapka van. Ha viszont maga előtt páros sok feketét lát, tudhatja, hogy rajta fekete van.

Hasonlóképp gondolja végig, hogy milyen sapka van rajta, ha azt hallja, hogy „fehér".

Akár fekete, akár fehér van rajta és azt is mondja, amilyen rajta van, akkor az ő előtte álló az eddig elhangzott válaszokat összevetve az általa látott fekete sapkák számának paritásával, el tudja dönteni, hogy rajta milyen színű sapka van, és így tovább.

Megjegyzés: 100 fogoly kiszabadítására nincs jó stratégia, az első megszólalónak semmiféle támpontja nincs. Más, kevesebb fogoly kiszabadítását célzó stratégiákat is érdemes értékelnünk.

IV.10. A tétova szultán

Egy szultán börtönében 100 cellában egyesével bezárva 100 rab sínylődik. A cellák ajtaját egy olyan kulcs nyitja és zárja, mely egy irányban körbe forog, egy fordítás zár, még egy fordítás nyit stb. Kezdetben minden cella zárva van. A szultán születésnapja alkalmából kegyelmet kíván gyakorolni, így éjszaka elküld egy börtönőrt, hogy fordítson minden zárka kulcsán egyet. A rabok alszanak, nem vesznek tudomást a fejleményekről. A szultán azonban meggondolja magát – túl sok lenne a jóból, ha minden rab kiszabadulna –, így egy második porkolábot is elküld, avval az utasítással, hogy minden második zárka kulcsán fordítson egyet. Tétova szultán lévén, ezek után sem elégedett az eredménnyel, így egy harmadik őrt megbíz azzal, hogy minden harmadik zárka kulcsán fordítson egyet, majd egy negyediket, hogy minden negyediken, és így tovább, egy századikat azzal, hogy a századikon fordítson.

Reggel valahány rab arra ébred, hogy az ajtaja nincs bezárva, kiszabadult.

Hány rab szabadult ki (és melyek ezek)?

Megoldás: Könnyen meggondolható, hogy a k-adik cella zárjának kulcsán azok az őrök fordítottak, akiknek a sorszáma osztója k-nak. így annyian, ahány osztója van k-nak. Az, hogy kinyílik-e az ajtó, attól függ, hogy páros vagy páratlan sokszor fordítottak-e a zárján. Mivel eredetileg zárva volt, páratlan sok fordítás után nyílik. A kérdés tehát az, hogy mely számoknak van páratlan sok osztója. Többféleképpen is belátható, hogy a négyzetszámoknak, így az 1., 4., 9., ...100. rab fog kiszabadulni.

Megjegyzések: Ne becsüljük le a próbálgatások eredményeit. Természetes barátkozás a feladattal, ha valaki egyesével meggondolja, hogy az első kiszabadul, a második nem, a harmadik sem, a negyedik igen stb. Folytatva a kísérletezést egyrészt kialakulhat az a sejtés, hogy a négyzetszámok szabadulnak ki (amit persze bizonyítani kell), másrészt, sokáig próbálgatva az egyes számok osztóinak számbavételét, sok hasznos tapasztalatra tehetnek szert a tanulók.

Annak indoklása, hogy a négyzetszámok szabadulnak ki, többféle szinten történhet. Lehet, hogy valaki 100-ig végigköveti minden szám összes osztóját – és ez egy teljesen elfogadható megoldás (csak nehezen általánosítható más cellaszámokra). Szokásos érv, hogy az osztók párosával lépnek fel (ha egy szám osztó, akkor amivel megszorozzuk, hogy számunkat kapjuk, az is osztó), kivéve, ha egy osztó saját maga párja, ekkor viszont négyzetszámmal állunk szemben. „Műveltebbek" szeretnek arra hivatkozni, hogy a cella sorszámának kanonikus alakjában minden prímhatvány kitevőjének párosnak kell lennie ahhoz, hogy osztóinak száma páratlan legyen.

Meggondolható az a változat is, amikor a k-adik őr minden k-adik zárka kulcsán k-t fordít (osztók összege mikor páratlan).

IV.11. Titkos üzenet

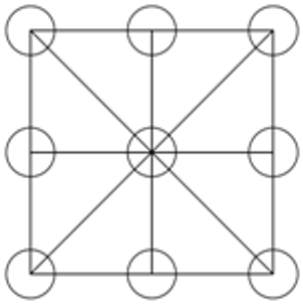
Egy kém titkos információt akar elküldeni a megbízójának egy két lakattal is lezárható ládában úgy, hogy a futár ne tudjon hozzáférni az üzenethez. Ha egyszerűen lelakatolná és a kulccsal együtt küldené a csomagot, a futár ki tudná nyitni. Ha először elküldené a futárral a csomagot, és csak küldené a kulcsot, amikor visszatért a futár, nem lehet benne biztos, hogy már nincs a futárnál a csomag. Azt is megtehetné, hogy két lakatot tesz a csomagra, és elsőre csak az egyik kulcsot küldi, utána a másikat, de akkor megint nem tudhatja, hogy a futár nem csapja-e be. Hogyan oldja meg ezt a problémát?

Megoldás: Egy lakattal lezárja a csomagot, és elküldi a ládát. A megbízó rátesz egy másik lakatot, és visszaküldi a ládát. A küldő az általa először lezárt lakatot kinyitja, és újra elküldi a csomagot. Ezután a megbízó már ki tudja nyitni a ládát.

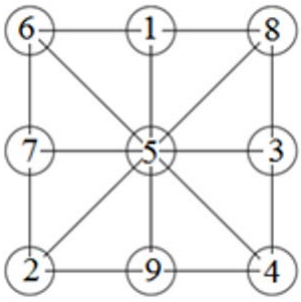
Megjegyzések: Fontos támpont a feladványban, hogy két lakatnak is van hely.

IV.12. 3×3-as bűvös négyzet

Írd be az ábrán a körökbe az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat úgy, hogy egy-egy vonal mentén a három-három szám összege ugyanannyi legyen!



Megoldás: Ha összeadjuk a három oszlopban (vagy a három sorban) szereplő számokat, akkor egyrészt minden számot összeadtunk: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.



Másrészt háromszor annyit kaptunk, mint amennyinek egy szakasz mentén ki kell jönnie, ezért egy vonal mentén az összeg csak 15 lehet.

A középponton átmenő szakaszok számait összeadva minden számot összeadunk ($4 \cdot 15 = 60$), a középsőt 4-szer is. Így ha 60-ból kivonjuk a 45-öt, a középső szám 3-szorosát kapjuk: $(60 - 45) : 3 = 5$.

A középponton átmenő összegek a következők lehetnek:

$1 + 5 + 9$; $2 + 5 + 8$; $3 + 5 + 7$; $4 + 5 + 6$.

A középponton át nem menők pedig: $1 + 6 + 8$; $2 + 4 + 9$; $2 + 4 + 8$.

Ezek – sorrendtől és forgatástól eltekintve – csak egyféleképpen fűzhetők egymás után az oldalak mentén: $6+1+8$; $8+3+4$; $4+9+2$; $2+7+6$.

Ebből lényegében egyértelműen kitölthető a táblázat.

Megjegyzések: A megoldás próbálkozással (a számok kiosztogatásával) elég hosszadalmas út. A szakaszokkal megfogalmazott feladvány alkalmas arra, hogy ráirányítsa a figyelmet valamilyen általános, minden esetet átfogó stratégiára.

IV.13. Ki a felelős?

Három gyerek, Aba, Baba és Csaba focizik az iskola udvarán, és betörnek egy ablakot. Az igazgató magához hívja a gyerekeket, hogy kiderítse, ki a felelős.

Aba: Baba volt.

Baba: Nem én voltam.

Csaba: Aba volt.

Az igazgató szerint az füllentett, aki betörte az ablakot, mert a többieknek erre nem volt oka. Kit fog gyanúsítani?

Megoldás: Ha Aba törte be az ablakot (és füllent), akkor Baba és Csaba is igazat mond, ez tehát lehetséges.

Ha Baba törte be az ablakot (és füllent), akkor Aba igazat mond, de Csaba nem, ez tehát nem lehet.

Ha Csaba törte be az ablakot (és füllent), akkor Aba állítása is hamis, Baba igazat mond, tehát ez sem lehet.

Így az igazgató arra következtet, hogy Aba állítása hamis, és ő törte be az ablakot.

IV.14. Egy szigeten lovagok és lókötők élnek.

Szemre megkülönböztethetetlenek, de a lovagok mindig igazat mondanak, a lókötők mindig hazudnak.

Egy arra járó turista két helyi lakossal, A-val és B-vel találkozik. Megkérdezi A-t, hogy mifélék. A válasza: „Legalább egyikünk lókötő.” Meg tudjuk-e ebből állapítani, hogy melyikük lovag, melyikük lókötő?

Megoldás: Ha A lókötő lenne, akkor állítása, miszerint van köztük lókötő, hamis lenne, vagyis mindketten lovagok lennének, ami nem lehetséges, ha ő lókötő. Vagyis A nem lehet lókötő. Ha A lovag, akkor igazat mond, így ő lovag és állítása miatt B lókötő.

Megjegyzés: A feladat egy egyszerű helyzetben tisztázhatja a „legalább” szó jelentését és egy következtetési lánc végigvitelét.

Változatok: IV.14. V1. Tegyük fel, hogy A ezt mondja: „Lókötő vagyok, vagy B lovag.” Ekkor miféle lehet A, illetve B?

Megoldás: Ha A lókötő lenne, állítása hamis lenne, vagyis sem ő nem lehetne lókötő, sem B lovag. Vagyis ha lókötő lenne, akkor nem lehetne lókötő, ami ellentmondás. Tehát A-nak lovagnak kell lennie. Ekkor igazat mond, viszont állításának az a fele, miszerint „lókötő vagyok” hamis, így az egész állítása csak úgy lehet igaz, ha a második fele igaz, vagyis ha B tényleg lovag. Vagyis mindketten lovagok.

Megjegyzés: A feladat a logikai „vagy” jelentéséről szól.

IV.14. V2. Tegyük fel, hogy A ezt mondja: „Lókötő vagyok, vagy kettő meg kettő az öt.” Mire következtetnél ebből?

Megoldás: Végiggondolható, hogy a „szabályok” szerint sem lovag, sem lókötő nem tehet ilyen kijelentést. Ezek szerint a történtekről beszámoló turista hazudott, vagyis ő lókötő, A-ról és B-ről semmit nem tudunk.

Megjegyzések: Az sem árt, ha feladatmegoldás közben gyanakszunk.

Az ilyen típusú feladatok sora hosszan folytatható, variálható (Smullyan, 2009 számos változatot leír). Néhány szituáció akár el is játszható: Két vagy akár három tanuló megállapodhat egymás között, hogy melyikük miféle, és olyan állításokat kell mondaniuk, amikből a többiek kitalálhatják.

Megkérdezhetjük pl. azt is, hogy „Tudsz-e egy olyan mondatot mondani, amiből kiderül, hogy te lovag vagy?” (Olyat mondani, amiből az derül ki, hogy lókötő, könnyű.)

Ismert változat, amikor egy hazug-igazmondó ikerpártól egy kérdéssel kell kitalálni, hogy két út közül melyik út vezet a városba.

IV.15. Nyomozás

Egy utca négy egymás melletti házában lakik Karcsi, Ferenc, Matild és Laci. A házuk színe piros, kék, sárga és zöld. A szerencseszámuk a 11, a 2, a 8 és a 28, a kedvenc ételük csirkepörkölt, pizza, palacsinta és saláta. A következőket tudjuk róluk:

(1) Laci háza (szemből nézve) balra van annak a házától, akinek 28 a kedvenc száma.

(2) A kék ház (szemből nézve) balra van Matild házától.

(3) A piros ház egyik oldalán van a zöld ház, a másik oldalán lakó kedvenc száma a 8.

(4) Laci háza két háznyira van a zöld háztól, de nem a sárga ház van köztük.

(5) Ferenc egyik szomszédja szerencseszáma a 8.

(6) Ferenc egyik szomszédja kedvenc étele a csirkepörkölt.

(7) Matild kedvenc száma a 2.

(9) A piros házban lakó kedvenc étele a palacsinta.

(10) Laci kedvence a saláta.

(11) A kék házban lakó kedvence a pizza.

Ki hol lakik, mi a kedvenc száma és étele?

Megoldás: A megoldáshoz táblázatot használunk. A házhelyeket balról jobbra haladva A, B, C, D-vel jelöljük. Minden lehetőséget beírunk minden helyre, és ha nem való oda, akkor kihúzzuk. Ha valamit egy helyen jóváhagyunk, akkor egyrészt az abban a cellában lévő többi lehetőséget kihúzzuk, másrészt a jóváhagyott információt a többi helyen ki kell húznunk.

A	B	C	D
Karcsi Matild Ferenc Laci	Karcsi Matild Ferenc Laci	Karcsi Matild Ferenc Laci	Karcsi Matild Ferenc Laci
piros ház kék ház zöld ház sárga ház	piros ház kék ház zöld ház sárga ház	piros ház kék ház zöld ház sárga ház	piros ház kék ház zöld ház sárga ház
11 2 8 28	11 2 8 28	11 2 8 28	11 2 8 28
csirkepörkölt pizza palacsinta saláta	csirkepörkölt pizza palacsinta saláta	csirkepörkölt pizza palacsinta saláta	csirkepörkölt pizza palacsinta saláta

A D ház nem lehet kék, mert az (2) szerint Matild házától balra van. Így az ott lakó kedvenc étele (11) miatt nem lehet a pizza.

De Laci nem lakhat ebben a házban, mert (1) szerint tőle jobbra van még ház, így az ott lakó kedvenc étele nem lehet saláta (10).

Ez a ház piros sem lehet, mert annak a mindkét oldalán van egy-egy ház (3), tehát az ott lakó kedvenc étele nem lehet palacsinta sem (9). Eszerint az csak csirkepörkölt lehet. **D: csirkepörkölt.** Mostani tapasztalataink alapján az új táblázat:

A	B	C	D
Karcsi Matild Ferenc Laci	Karcsi Matild Ferenc Laci	Karcsi Matild Ferenc Laci	Karcsi Matild Ferenc ~~Laci~~
piros ház kék ház zöld ház sárga ház	piros ház kék ház zöld ház sárga ház	piros ház kék ház zöld ház sárga ház	~~piros ház~~ ~~kék ház~~ zöld ház sárga ház
11 2 8 28	11 2 8 28	11 2 8 28	11 2 8 28
~~csirkepörkölt~~ pizza palacsinta saláta	~~csirkepörkölt~~ pizza palacsinta saláta	~~csirkepörkölt~~ pizza palacsinta saláta	**csirkepörkölt** ~~pizza~~ ~~palacsinta~~ ~~saláta~~

Ferenc szomszédjának kedvence a csirkepörkölt, tehát ő lakik a C házban, a többi házban pedig nem ő lakik. **C: Ferenc.**

Ferenc szomszédjának 8 a kedvenc száma, vagyis a B vagy a D házban lakóé. Az azonban, akinek 8 a szerencseszáma, a piros ház mellett lakik, és kettőre van tőle a zöld ház (3). A zöld ház ezek szerint csak a B vagy D lehet. Közöttük van a piros ház (ami így másutt nem lehet). C (3). **C: piros ház.**

A piros házban lakó kedvenc étele a palacsinta (9). **C: palacsinta.**

Mivel a C helyen nem zöld ház van, az A helyen nem lakhat Laci (4). De akkor az A házban lakó kedvenc étele nem lehet a saláta, mert az Lacié (10). A csirkepörkölt és a palacsinta is gazdára talált már, tehát az A helyre csak a pizza marad. **A: pizza.**

A pizzát kedvelő a kék házban lakik (11). **A: kék ház.**

Elfogytak az ételek, csak az maradt, hogy a B házban lakó kedvenc étele a saláta. **B: saláta**.

Laci kedvence a saláta (10). **B: Laci**.

Matild nem lakhat az A helyen, mert tőle balra van a kék ház, tehát itt csak Karcsi lakhat. **A: Karcsi.**

Akkor Matild háza a D. **D: Matild.**

(7) szerint Matild szerencseszáma a 2. **D: 2**. Az újabb tapasztalataink alapján a táblázat:

A	B	C	D
Karcsi ~~Matild~~ ~~Ferenc~~ ~~Laci~~	~~Karcsi~~ ~~Matild~~ ~~Ferenc~~ **Laci**	~~Karcsi~~ ~~Matild~~ **Ferenc** ~~Laci~~	~~Karcsi~~ **Matild** ~~Ferenc~~ ~~Laci~~
~~piros ház~~ **kék ház** ~~zöld ház~~ ~~sárga ház~~	~~piros ház~~ ~~kék ház~~ zöld ház sárga ház	**piros ház** ~~kék ház~~ ~~zöld ház~~ sárga ház	~~piros ház~~ ~~kék ház~~ zöld ház sárga ház
11 ~~2~~ 8 28	11 ~~2~~ 8 28	11 ~~2~~ 8 28	11 2 8 28
~~csirkepörkölt~~ pizza ~~palacsinta~~ ~~saláta~~	~~csirkepörkölt~~ ~~pizza~~ ~~palacsinta~~ saláta	~~csirkepörkölt~~ ~~pizza~~ palacsinta ~~saláta~~	**csirkepörkölt** ~~pizza~~ ~~palacsinta~~ ~~saláta~~

Laci házától jobbra lakik a 28-as szerencseszámú lakó (1), ez csak a C helyen lehet. **C: 28.**

A 8-as szerencseszámú lakó a piros ház mellett lakik (3), de annak az egyik oldalán Matild, szerencseszáma 2, tehát a másik oldalán (B hely) lakik a 3-as szerencseszámú lakó, ez Laci. **B: 8.**

A 11-es eszerint csak az A házban lakó szerencseszáma lehet. **A: 11**.

A 8-as szerencseszámú lakótól két háznyira van a zöld ház (4). **D: zöld ház.**

Így csak az a lehetőség marad, hogy **B: sárga ház**. Összegezve:

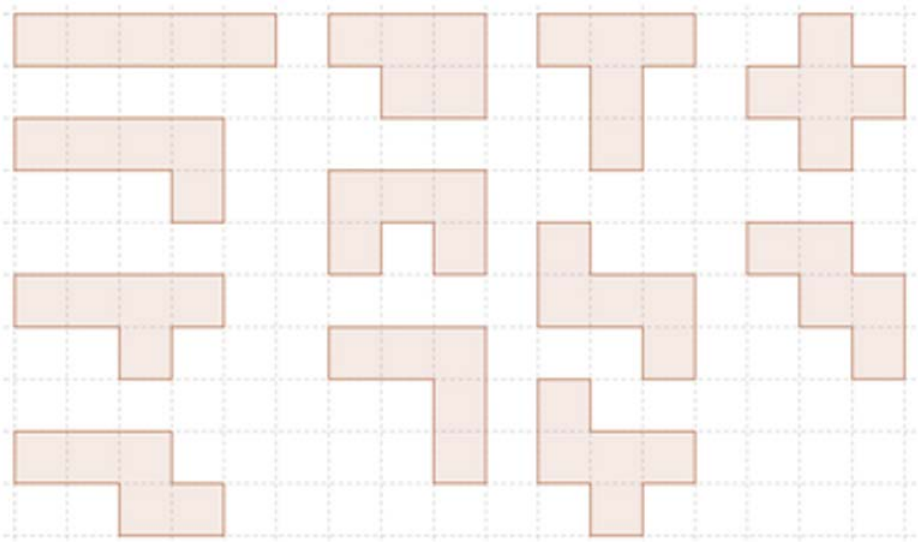
A	B	C	D
Karcsi ~~Matild~~ ~~Ferenc~~ ~~Laci~~	~~Karcsi~~ ~~Matild~~ ~~Ferenc~~ **Laci**	~~Karcsi~~ ~~Matild~~ **Ferenc** ~~Laci~~	~~Karcsi~~ **Matild** ~~Ferenc~~ ~~Laci~~
~~piros ház~~ **kék ház** ~~zöld ház~~ ~~sárga ház~~	~~piros ház~~ ~~kék ház~~ ~~zöld ház~~ **sárga ház**	**piros ház** ~~kék ház~~ ~~zöld ház~~ ~~sárga ház~~	~~piros ház~~ ~~kék ház~~ **zöld ház** ~~sárga ház~~
11 ~~2~~ ~~8~~ ~~28~~	~~11~~ ~~2~~ **8** ~~28~~	~~11~~ ~~2~~ ~~8~~ **28**	~~11~~ **2** ~~8~~ ~~28~~
~~csirkepörkölt~~ **pizza** ~~palacsinta~~ ~~saláta~~	~~csirkepörkölt~~ ~~pizza~~ ~~palacsinta~~ **saláta**	~~csirkepörkölt~~ ~~pizza~~ **palacsinta** ~~saláta~~	**csirkepörkölt** ~~pizza~~ ~~palacsinta~~ ~~saláta~~

IV.16. Pentominók

Pentominónak nevezzük az olyan síkidomokat, amelyek 5 teljes oldallal csatlakozó egységnégyzetből rakhatók össze.

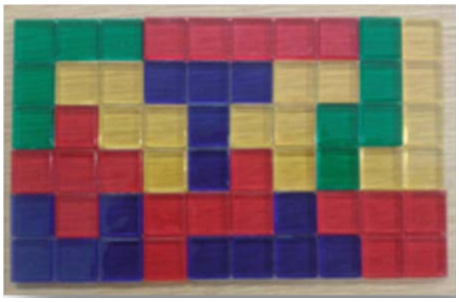
a) Hány ilyen alakzat van?

Megoldás: Az ábrán látható 12-féle alakzat létezik.



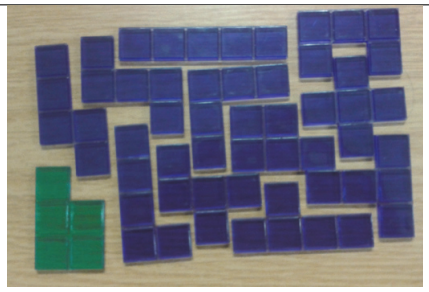
b) A 12 alakzatnak az összterülete 60 egységnégyzetnyi. Ebből kirakható egy 6×10-es téglalap. Keressünk ilyen elrendezést!

Megoldás: Rengeteg lehetőség van, egy példát mutatunk az ábrán.



c) Ha kiraktunk 11 darabot a kijelölt téglalapba, akkor amennyiben a kimaradó 5 egységnégyzet oldalak mentén összefüggő, nem biztos, hogy az éppen olyan alakú, mint amelyik darab kimaradt. Keressünk olyan kirakást, amelyben az utolsó darab más alakú, mint a kimaradó hely!

Megoldás: Ismét egy példát mutatunk az ábrán.

	
A kimaradó hely alakját jelöli a zöld mező	A kimaradó elem alakja

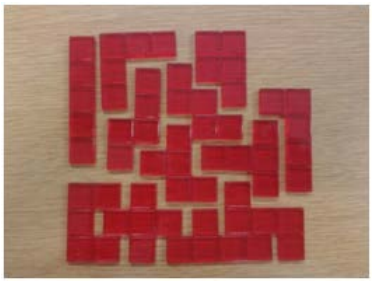
d) Ha nem 6×10-es, hanem más alakú téglalapot akarunk lefedni, akkor mely téglalapok fedhetők le a 12 darabbal?

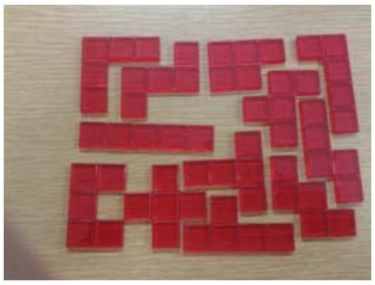
Megjegyzés: A 2×30-as téglalap nyilván nem fedhető le, de például a 3-szor 20-as igen:

A kép forrása: http://godel.hws.edu/java/pentominos_3x20_319093_moves.png

e) Ha nem 60, hanem nagyobb területű téglalapot fedünk le, és előre meghatározott helynek kell kimaradnia, akkor az hogyan oldható meg?

Megoldás: Ha például 8-szor 8-as négyzetet töltünk ki, akkor kimarad 4 mező, amely lehet egy 2×2-es négyzet, a 7×9-esből egy 1×3-as téglalap marad ki. Ezekre mutatunk egy-egy példát (számos más lehetőség is van):

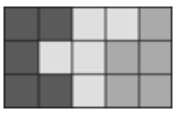




f) Milyen *konvex* alakzat fedhető le néhány pentominóval.

Megoldás: A nyilvánvaló válasz: csak téglalap. Azok közül is csak azok, amelyek területe egységekben kifejezve osztható 5-tel.

Belátható, hogy 10 egységnyi téglalap egy pentominó készlet két darabjával nem fedhető le. Egy 3×5-ös téglalap már igen. Erre is mutatunk egy példát:



g) Egyszerűbb, de matematikai szempontból fontos kérdések lehetnek: Vannak-e csak tengelyesen szimmetrikus darabok? Vannak-e csak középpontosan szimmetrikus darabok?

Vannak-e tengelyesen és középpontosan is szimmetrikus darabok?

Van-e a fenti feltétel valamelyikének megfelelő, adott számú darabból kirakható alakzat? (Pl. szimmetrikus pentominó felnagyított képe.)

Megjegyzések: A kérdések sora kifogyhatatlan, a feladatoknak rendszerint nagyon sok megoldása van, ezért a példákat csak ízelítőnek, bátorításként mutattuk. Érdemes a talált megoldásokat lejegyezni, összehasonlítani, megbeszélni, elemezni.

A pentominó fejtörők irodalma bőséges. Az interneten elérhető számos online pentominó kirakós és matematikai modell. Válogatatlanul néhány:

http://www.lamath.org/journal/vol4no2/Pentominoes.pdf

http://illuminations.nctm.org/uploadedfiles/content/lessons/resources/6-8/pentomino-ak-puzzle.pdf

http://theory.cs.uvic.ca/amof/e_pentI.htm

http://puzzler.sourceforge.net/docs/pentominoes.html

IV.17. Ütésmentes bástyaelhelyezés és órarendkészítés

a) **Ütésmentes bástyák egy 8×8-as sakktáblán.**

Legfeljebb hány bástyát lehet egy 8×8-as sakktáblára ütésmentesen felállítani, azaz úgy elhelyezni, hogy minden sorban és oszlopban legfeljebb egy bástya legyen?

Megjegyzések: Ismert feladványról van szó, de tapasztalatunk szerint sok a félreértés és a hiányos vagy éppen túlmagyarázó gondolatmenet. Tipikus hibás érvelés, hogy a főátlóba állítunk 8 bástyát és már nem lehet többet felrakni. A meggondolás elvi hibája abban rejlik, hogy az összes helyett egy konkrét elrendezésről tesz megállapítást. Mivel valóban 8 a maximum, a hibára könnyebb rámutatni, ha például huszárok ütésmentes elhelyezését vizsgáljuk. Ha ugyanis valaki az első, a negyedik és a hetedik sort telerakja huszárokkal, akkor azok nem ütik egymást, de nem tudunk továbbit elhelyezni ütésmentes pozícióba. Más elrendezésben azonban 32 huszár is békésen megfér a táblán. Világosan el kell különíteni az állítás tisztázott (8 bástyát fel tudunk rakni, pl. az átlóba) és a tisztázatlan (semmilyen elrendezésben sem lehet többet) részeit.

Gyakori tévedés, hogy 8 bástyát csak a főátló mentén lehet elhelyezni. Ahhoz, hogy ez a tévhit ne maradjon tisztázatlanul, érdemes megvizsgálni, hogy hányféle elrendezés szerint lehet a maximális számú bástyát ütésmentesen elhelyezni.

Az összeszámoláshoz az egyik ötlet az lehet, hogy egy felállított bástya lefoglal egy sort és egy oszlopot. Tehát egy 8×8-as sakktáblán 8-szor annyi ütésmentes bástyaállítási mód van, mint egy 7×7-es sakktáblán stb. Eredményként így 8! jön ki. Vannak azonban olyan érvelések, hogy induláskor 64, majd 49, 36, 25, ... mezőből választhatunk. Így számolva $(8!)^2$ az eredmény. A két vélemény ütköztetésével tisztázhatjuk, hogy a 8! pártiak egyformának, észrevétlenül felcserélhetőnek tekintik a bástyákat, míg a $(8!)^2$ hívei megkülönböztetik azokat.

Egy másik ötlet szerint minden oszlopba fel kell egy bástyát állítani. Az 1. oszlopban 8, a másodikban 7, a harmadikban 6 stb. mező közül választhatjuk ki, hogy melyikre állítjuk a bástyát. Ha valahol eltérő mezőt választunk, akkor egy másik ütésmentes elrendezést kapunk, így az ütésmentes bástyaelhelyezések száma $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 8! = 40\,320$.

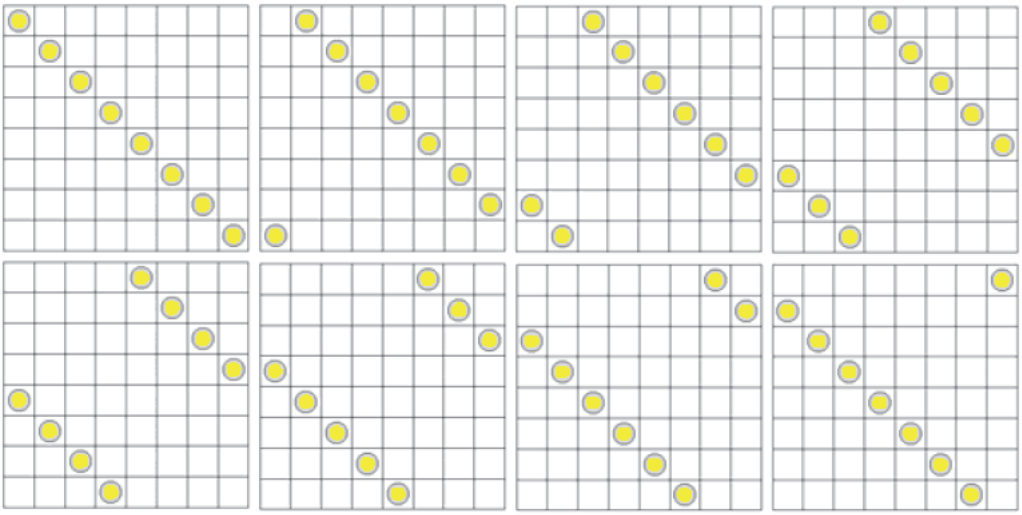
Ezt a második ötletet azért is érdemes megbeszélni, mert a feladvány egyik általánosításának megoldására is alkalmas: Egy $n \times m$-es ($n \geq m$) sakktáblára ütésmentesen felállítható bástyák maximális száma m, az elrendezések száma pedig

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(m-1)).$$

b) **Ütésmentes bástyák egy $8 \times 8 \times 8$-as sakktáblán**

Legfeljebb hány bástyát lehet egy $8 \times 8 \times 8$-as térbeli sakktáblára ütésmentesen felállítani?

Megjegyzés: 64 bástya állítható fel ütésmentesen, mert minden oszlopban legfeljebb egy bástya állhat. Egy ütésmentes térbeli elrendezést nyerhetünk például úgy, ha első síkon felállítunk 8 bástyát ütésmentesen és a következő síkra való áttéréskor minden oszlopot ciklikusan eggyel jobbra tolunk:



Tekintjük 64 bátya ütésmentes elrendezését egy térbeli sakktáblán. Ha az 1. sík bástyáit 1-gyel, a 2. síkét 2-vel, ..., az utolsóét 8-cal helyettesítjük és ezeket az átlátszó síkokat egy síkra vetítjük, akkor egy 8×8-as négyzetet kapunk, amelynek mezői az 1, 2, ..., 8 számokkal vannak kitöltve úgy, hogy minden szám minden sorban és minden oszlopban pontosan egyszer fordul elő (latin négyzetek és téglalapok).

A mi példánkban a latin négyzet:

1	2	3	4	5	6	7	8
8	1	2	3	4	5	6	7
7	8	1	2	3	4	5	6
6	7	8	1	2	3	4	5
5	6	7	8	1	2	3	4
4	5	6	7	8	1	2	3
3	4	5	6	7	8	1	2
2	3	4	5	6	7	8	1

Fordítva is áll az analógia, egy 8-adrendű latin négyzetből a sorrendtől eltekintve egyértelműen rekonstruálható 64 bástya ütésmentes elrendezése egy térbeli sakktáblán.

Az elrendezések száma 108 776 032 459 082 956 800

(Lásd Wells, 1967 és a http://mathworld.wolfram.com/LatinSquare.html weboldalt.)

Az ütésmentes bástyaelhelyezés ilyen átfogalmazásával a kombinatorika és a gráfelmélet egy aktuális kutatási és alkalmazási területére értünk (titkosírás, elektronikus aláírás, permutációmátrix stb.)

c) **Órarendkészítés.** Legfeljebb hány osztályt lehet egy iskola 8 szaktantermébe egy órára beosztani?

Hányféle elrendezés szerint lehet a maximális számú osztályt egy órára beosztani?

Legfeljebb hány osztályt lehet egy iskola n szaktantermébe egy órára beosztani?

Hányféleképpen lehet egy iskola m osztályát az n szaktanterembe egy órára beosztani (n legalább akkora, mint m)?

Hogyan lehet egy iskolában a 8 szaktantermet egy napra beosztani, ha az iskola mind a 8 osztályának napi 8 (különböző) órája van?

Megjegyzések: Diákok, tanárok, igazgatók vágynak egy „igazán jó" órarendre. Az iskola *néhány* darab szaktantermének *valahány* osztály közötti elosztása 1, 2, 3, 4, 5 napra – adott napi és heti óraszámmal – olyan komplex feladat, hogy ebben az általános formában nem is tudjuk megoldani. Speciális esetek vizsgálatával azonban egy sor analóg feladatra és sok szép megoldásra bukkanhatunk.

Tekintsük például az iskola és a 8×8-as sakktábla között a következő analógiát: Egy szaktanteremnek egy sor, egy osztálynak egy oszlop felel meg, és ha egy osztály egy terembe be van osztva, akkor a megfelelő sor és oszlop közös mezőjére egy bástyát állítunk. Ekkor egy tanítási óra teljes terembeosztása 8 bástya ütésmentes felállításának felel meg a sakktáblán. A 8 termes, 8 osztályos, napi 8 órás órarend elkészítése pedig 64 bástya (mindhárom irányban) ütésmentes elhelyezését jelenti egy térbeli $8 \times 8 \times 8$-as sakktáblán.

IV.18. Hamis súly keresése

Egykarú mérleg segítségével kell megkeresni a hamis érméket tartalmazó ládát, ha 10 láda közül 9-ben egyforma érmék vannak. Egy hamisítatlan érme tömege 10 gramm. Egy ládában azonban minden érme egy kicsit nehezebb, 11 gramm. Próbáljuk a lehető legkevesebb méréssel kiválasztani a hamis érmék ládáját.

Megoldás: Elég egy mérés. Az 1. ládából 1, a 2.-ból 2, a 3.-ból 3, ... a 10. ládából 10 érmét teszünk a mérlegre. Ha az összes érme hibátlan lenne, akkor a mérleg 550 grammot mutatna. Ahány grammal több látható a kijelzőn, annyiadik ládában vannak a hamis érmék.

Megjegyzések: Sokan itt is a felezéses módszerrel próbálkoznak. Lemérnek először 5 érmét, amivel megfelezik a ládák számát stb. (Mintha 10 szám közül kellene kiválasztani a gondolt számot.) Ehhez 4 mérés kell, ha nem számolunk a szerencsével.

A feladatot úgy is szokták fogalmazni, hogy „Állapítsd meg egy méréssel ...". Ez leszűkíti a próbálkozók körét és megfosztja a másként próbálkozókat a sikerélménytől. Az ő stratégiájuk is lehet jó, csak nem találják meg a minimális számú mérést.

Megkérdezhetjük a minimálisan szükséges mérések számát abban az esetben is, ha 2, 3, vagy több ládában vannak hibás érmék, illetve ha azt sem tudjuk, hogy hányban. Ha még azt sem tudjuk, hogy hány ládában van hibás érme, akkor is megoldható egy méréssel. (Pl. úgy, hogy az 1. ládából 1, a 2.-ból 2, a 3.-ból 4, ... a 10. ládából 2^9 érmét teszünk a mérlegre. Ekkor szabályos érmékre számított $10 \cdot (2^{10} - 1)$ gramm = 10 230 gramm feletti tömeg kettes számrendszerben felírt alakja elárulja a hibás érmét tartalmazó ládák sorszámait. Példa: az 1., a 3. és a 7. láda tartalmaz hibás érmét. Ekkor $1 + 4 + 64$ gramm = 69 gramm többletet mérünk, ez kettes számrendszerben 1000101_2 visszafelé olvasva látható, hogy ahol 1-es számjegy van, ott van hamis érme.)

Meggondolhatjuk azt az esetet is, amikor a hamis érme nem nehezebb, hanem könnyebb a többinél.

IV.19. Hamis súly keresése kétkarú mérleggel

12 súly közül 11 egyforma, az egyik viszont nehezebb a többinél. Keressük meg a hibás súlyt a lehető legkevesebb méréssel.

Megoldás: Egy méréssel eldönthető, hogy melyik négy között van a hibás. (Egy-egy serpenyőbe 4-4 súlyt teszünk.) Összesen (a harmadolós módszerrel) 3 mérés elég.

Megjegyzések: Itt is várható, hogy felezős módszerrel (4 méréssel) oldják meg.

Mivel 12 osztható 3-mal, könnyű a harmadolós módszerre irányítani a figyelmet.

Megkérdezhetjük, hogy 3 engedélyezett méréssel ki legfeljebb hány súly közül tudja kiválasztani a hibásat. (27)

IV.20. Súlykészlet tervezése

Tervezz olyan különböző súlyokból álló készletet, amellyel 1 dkg-tól 10 dkg-ig minden egész dekagrammnyi tömeget le lehet mérni egy kétkarú mérlegen. A készlet a lehető legkevesebb darabból álljon.

Megoldás: Három súly elég, pl. 1, 3, 9, vagy az 1, 2, 7 stb. Gondoljunk arra, hogy a mérleg mindkét oldalára tehetünk súlyt, pl. a 8 előállítása 9 az egyik oldalon, 1 a másikon módon történhet.

Megjegyzések: Könnyű belátni, hogy 2 súly nem elég. Három súllyal több megoldás is van. Az 1, 3, 9 készlettel 13 dkg-ig is tudunk mérni, míg az 1, 2, 7 csak 10-ig jó.

Megkérdezhetjük, hogy ki meddig tud eljutni az általa tervezett 4 darab különböző súllyal?

IV.21. Hanoi tornyok

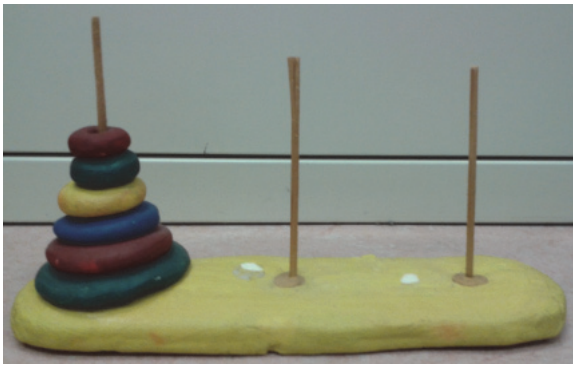
Ismeretes a távol-keleti legenda, miszerint egy kolostor udvarán volt három rúd. Az elsőn 64, különböző átmérőjű korong, átmérőik szerint nagyság szerinti sorban: legalul a legnagyobb, legfölül a legkisebb.

A szerzetesek azt a feladatot kapták, hogy az első oszlopról (a középső oszlopot is segítségül véve) helyezzék át a korongokat a harmadikra a következő két feltétellel:

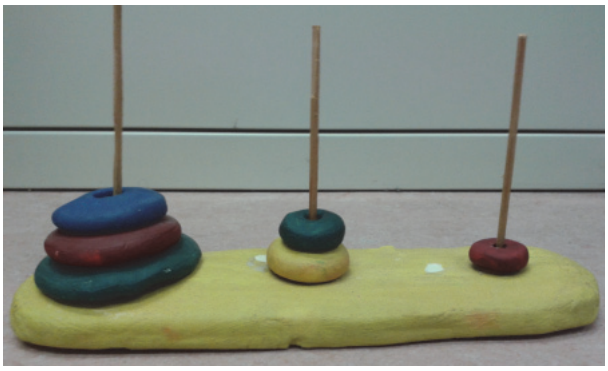
- Egyszerre egy korong mozgatható.
- Egy korong csak nála nagyobb korongra kerülhet.

A legenda szerint a kolostorban lakó szerzetesek minden nap egyetlen korongot mozgathatnak. Amikor az összes korong átkerül a harmadik oszlopra, a világ véget ér.

Legalább hány nap szükséges a korongok átrakásához?



Egy só-liszt gyurmából készített, festett készlet



Egy állás

Megoldás: Vizsgáljuk meg, hogy néhány korong esetén mire jutunk. Az egyszerűség kedvéért nevezzük el a rudakat. Kezdetben az A rúdon vannak a korongok. A B rúd a középső, a C rúdra szeretnénk átpakolni.

1 korongot 1 lépésben lehet áttenni.

2 korongot 3 lépésben lehet áttenni: az elsőt a B-re tesszük, a másodikat a C-re, majd az elsőt a C-re.

3 korongot: 1.-t a C-re, 2.-at a B-re, 1.-t a B-re, 3.-at a C-re, 1.-t az A-ra, 2.-at a C-re, 1.-t a C-re. Ez 7 lépés.

Néhány próbálkozás után eljuthatunk oda, hogy ha az első 63 korongot át tudjuk helyezni az A rúdról a B-re, akkor a 64.-et áttesszük a C-re, végül az első 63-at B-ről C-re. Ezt a rekurzív gondolatmenetet használhatjuk az összes korong átrakására.

Jelöljük az n-edik korong átrakásához szükséges lépésszámot l_n-nel. Láttuk, hogy $l_1 = 1$, $l_2 = 3$, $l_3 = 7$. Az n-edik korong átrakásához először át kell pakolni az első $(n-1)$-et l_{n-1} lépésben, majd 1 lépésben átrakjuk az n-ediket, majd ismét l_{n-1} lépésben rá az első $(n-1)$-et. Ez összesen: $2l_{n-1}+1$ lépés. Eszerint $l_4 = 15$, $l_5 = 31$, $l_6 = 63$ stb. Ebből sejthetjük, hogy $l_n = 2^{n-1}$, ami teljes indukcióval bizonyítható.

Ennél jobb lépésszámot nem érhetünk el, mert az első $(n-1)$ korongot át kell tennünk ahhoz, hogy az n-ediket szabaddá és átrakhatóvá tegyük. Utána pedig rá kell pakolnunk az első $(n-1)$-et. Így ha 1 korongot 1 lépésben tudunk áttenni, akkor 2-höz legalább 3 lépés, 3-hoz legalább 7, ..., n-hez legalább 2^{n-1} lépés szükséges.

Megjegyzések: Érdemes (különösen fiatalabb tanulókkal) kisebb konkrét korongszámmal, esetleg modell segítségével dolgozni.

További meggondolandó feladatok lehetnek:

- Ha egy nap alatt teszünk át egy-egy korongot, akkor mennyi idő alatt lehet áttenni a 64 korongot? (Kb. ötmillió év – nem is olyan sok!)
- Hány lépésre lehet szükség, ha nem három, hanem négy rúd áll a rendelkezésünkre?

IV.22. Mennyi pénze volt a kártyázóknak?

Három barát kártyázott. Megállapodtak abban, hogy egy-egy parti után a vesztes megduplázza a két társának a pénzét. Három partit játszottak, mindenki egyszer vesztett. Végül mindhármuknak 8000 Ft-ja maradt. Melyikük mennyi pénzzel ült le játszani?

Megoldás: Fordított irányú okoskodással haladunk. Ha a végén mindegyiküknek 8000 Ft-ja volt, akkor az utolsó játszma kezdetekor annak, aki az utolsó játszmát elvesztette, 16 000 Ft-ja volt, a társainak pedig 4000–4000 Ft-ja.

A második parti kezdetén 2000 Ft, 14 000 Ft és 8000 Ft pénzük volt. Tehát a 13 000 Ft, 7000 Ft és 4000 Ft kezdőtőkéjük volt.

Megjegyzések: A játékszabály úgy is módosítható, hogy a győztesnek mindkét társa fizet, mégpedig annyit, amennyi pénze a győztesnek van.

IV.23. Cheryl születésnapja – egy feladat egy szingapúri matematika versenyről

Albert és Bernard nemrég barátkoztak össze Cheryllel, és azt szeretnék megtudni, hogy mikor van a lány születésnapja. Cheryl nem árulja el, csak tíz lehetséges dátumot írt egy cédulára:

május 15, május 16, május 19,

június 17, június 18,

július 14, július 16,

augusztus 14, augusztus 15 és augusztus 17.

A lány Albertnek elárulta a hónapot, Bernardnak a napot. Ezek után Albert ezt mondja: „Nem tudom, mikor van Cheryl születésnapja, de azt tudom, hogy Bernard sem tudja." Erre Bernard így válaszol: „Először én sem tudtam, de most már tudom." Erre Albert válasza: „Akkor most már én is tudom." Mikor van Cheryl születésnapja?

Megoldás: Albert nem tudja a dátumot, mert a jó hónapban több nap is meg van adva. Bernard azért nem tudja, mert a jó nap több hónapban is szerepel a cédulán.

Ha a hónap május vagy június lenne, akkor Albert nem mondaná, hogy Bernard sem tudja, hiszen ha a nap valamelyik csak egyszer szereplő, 19-ike vagy 18-ika lenne, akkor Bernard tudhatná a dátumot. Albert számára tehát marad

július 14, július 16,

augusztus 14, augusztus 15 és augusztus 17.

Ha Bernard számára már egyértelmű a válasz, akkor kizárható a 14-ike. Ha pedig ennek kizárásával Albert is tudja a dátumot, akkor az csak július 16. lehet.

Megjegyzés: A feladat hibás fordítással jelent meg egy magyar online cikkben. Ott nem szerepelt, hogy a lány melyik fiúnak mondja meg a napot, melyiknek a hónapot. A feladat ebben az esetben is megoldható:

Tudjuk, hogy ha május 19. vagy június 18. lenne a dátum, akkor az, aki a napot tudja, azonnal tudná a dátumot is, mert 18. és 19. csak egyszer fordul elő.

Először tegyük fel, hogy Albert a napot, Bernard a hónapot ismeri.

Albert azt állítja, hogy nem tudja a dátumot. Vagyis nem 18. vagy 19.

Bernard, aki csak a hónapot ismeri, ekkor elsőre szintén nem tudja a dátumot (bár ezt Albert nem tudhatja). Az, hogy most megtudta, hogy nem 18. vagy 19., csak abban az esetben segíthetne rajta, ha egyetlen dátum maradna a nála lévő hónapban. A dátum tehát csak a június 17 lehet, és Bernardnál a június van.

Ahogy mi ki tudtuk találni, úgy Albert is rájöhetett – a nála lévő nap pedig a 17.

Ebben a megoldásban a feladat szövegében elhangzó „tudom, hogy Bernard sem tudja” nem játszik szerepet. Ettől még helyes a megoldás.

Ha Albert a hónapot ismeri, Bernard a napot, akkor mivel Albert a nap ismerete nélkül is tudja, hogy Bernard ki tudja zárni a május 19. és a június 18. dátumokat (hiszen állítja, hogy Bernard nem tudja a dátumot), Albert csak a júliust vagy az augszutust kaphatta Cheryltől.

Ezt Bernard is kikövetkeztette, és ezután meg tudta mondani a dátumot, ami ezért nem lehetett 14., mert az mindkét fennmaradó hónapban szerepel.

Mivel ebből már Albert is kitalálta a dátumot, az nem lehetett augusztusban, mert akkor két nap is szóba jöhetett volna.

Ezért a dátum csak július 16. lehetett.

IV.24. Levesfőzés

Egy kiránduláson a leveshez pontosan 5 liter vizet akarunk hozni a forrástól. Csak egy 4 literes és egy 7 literes edényünk van. Hogyan oldható meg a probléma?

Megoldás: A 4 literes edénnyel megtöltjük a 7 literes edényt. Ehhez kétszer megtöltjük a 4 literes edényt. Másodszor 1 liter marad benne. Kiürítjük a 7 literes edényt, beleöntjük az 1 liter maradékot és még 4 litert.

Megjegyzések: Érdemes meg/lejegyezni a sikeres eljárást: $4 + 4 - 7 + 4 = 5$.

Változatok: IV.24. V1. Hány liter vizet tudunk egy 4 és egy 7 literes edény segítségével kimérni?

Megoldás: Az előző megoldási ötletet alkalmazzuk. Minden értéket ki tudunk mérni 1-től 7 literig.

Megjegyzések: Érdemes a meggondolásokat és az eredményeket egy táblázatban rögzíteni.

Adag [liter]	4 literes edény	7 literes edény
1	$4 + 4 - 7$	
2	$4 + 4 - 7 + 4 + 4 - 7$	
3		$7 - 4$
4	4	
5		$4 + 4 - 7 + 4$
6		$4 + 4 - 7 + 4 - 7 + 4 + 4$
7		7

IV.24. V2. Hány liter vizet tudunk egy 3 és egy 9 literes edény segítségével kimérni?

Megjegyzések: Az előző megoldási ötletet vizsgálva észrevesszük, hogy az eredménytábla 4 és 7 összegeit és különbségeit tartalmazza. Ezt a felfedezést a (4–7 és 3–9) analógia szemszögéből átvisszük, és azt sejtjük, hogy 3, 6 és 9 liter mérhető ki.

IV.24. V3. Hány liter vizet tudunk egy a és egy b literes edény segítségével kimérni?

Megjegyzések: A (4–7 és 3–9) analógiával nyert felfedezést átvisszük az új szituációra. Azt sejtjük, hogy az összegek és különbségek (tehát a legnagyobb közös osztó többszörösei) mérhetők ki.

IV.24. V4. Hány vendéget tudunk egy $4 + 1$ és egy $7 + 1$ üléses autóval elszállítani, ha csak „telekocsi” indulhat?

Megjegyzések: Szisztematikus próbálkozással az alábbi értékeket kapjuk

$4,\ 4+4=8,\ 4+4+4=12,\ 4+4+4+4=16,\ \ldots$

$7,\ 7+7=14,\ 7+7+7=21,\ \ldots$

$4+7=11,\ 4+2\cdot 7=18,\ 4+3\cdot 7=25,\ \ldots$

$2\cdot 4+7=15,\ 2\cdot 4+2\cdot 7=22,\ 2\cdot 4+3\cdot 7=29,\ \ldots$

és ebből megsejthető a $4m+7n$ megoldásrendszer.

IV.24. V5. Melyek a $4x+7y=5$ egyenlet egész megoldásai?

Megjegyzések: Valamilyen megoldásunk már van, 5 liter vizet 4- és 7-literes edénnyel úgy mértünk ki, hogy háromszor megtöltöttük a 4-literes edényt és ebből a 12 literből 7 litert kiborítottunk, azaz $x=3$, $y=-1$.

További megoldásokat keresve

5 liter: $4+4+4-7$

2 liter: $(4+4+4-7)+4-7$

3 liter: $((4+4+4-7)+4-7)+4+4-7$

0 liter: $(((4+4+4-7)+4-7)+4+4-7)+4-7$

$0+5$ liter: $((((4+4+4-7)+4-7)+4+4-7)+4-7)+(4+4+4-7)$

$\vdots$

$k\cdot 0+5$ liter: $4(3+7k)+7(-1-4k)$

Végtelen sok $x=3+7k$ és $y=-1-4k$ (k pozitív egész) alakú megoldást találtunk.

A IV. 21. alapfeladat megoldása éppen a $k=0$ eset realizációja.

Negatív k értékekre behelyettesítéssel ellenőrizhetjük a megoldást.

A megoldások alakja így: $x=3+7k$ és $y=-1-4k$ (k egész).

Megmutatandó még, hogy minden megoldást felsoroltunk: Legyen x^*, y^* egy tetszőleges, és $x=3$, $y=-1$ egy megtalált megoldás. A $4x+7y-5=0$ egyenletbe behelyettesítve, egyenlővé téve és átrendezve $4(x^*-3)=7(-1-y^*)$ adódik, azaz x^*, y^* is szerepel a felsoroltak között.

Érdemes a tanulóktól olyan feladványokat kérni, amelyek matematikai leírása éppen ez az egyenlet.

IV.24. V6. Milyen c értékre megoldható az $ax+by=c$ diofantikus egyenlet?

Megjegyzés: A IV.24. V3. feladvánnyal való összevetésből nyerhetjük a sejtést: Az egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha a és b legnagyobb közös osztója osztja c-t.

IV.24. V7. Egy 8 literes edény tele van vízzel. Hogyan lehet a vizet egy 3 és egy 5 literes edény segítségével megfelezni?

Megjegyzés: Úgy is értelmezhetjük a problémát, hogy egy 3 és egy 5 literes edény segítségével 4 liter vizet kell kimérni.

IV.24. V8. Hogyan lehet 1 liter vizet egy $a=2-\sqrt{2}$ és egy $b=\sqrt{2}$ literes edény segítségével kimérni?

Megoldás: Az $m(2-\sqrt{2})+n\sqrt{2}=1$ egész megoldásait keressük.

Kiemeljük a $\sqrt{2}$-t: $(n-m)\sqrt{2}=1-2m$. Csak úgy lehet, ha $(n-m)\sqrt{2}$ is egész (racionális), tehát $m=n$.

Ekkor viszont $m(2-\sqrt{2})+m\sqrt{2}=2m$, ez pedig nem 1. A válasz a feladat kérdésére: Sehogy.

Megjegyzések: A IV.24. feladványcsokorral alaposan körüljártunk egy problémakört. Ezen az úton a szerény matematikai érdeklődésűek is probléma-megoldási élményhez juthatnak, hiszen a vízöntögetés konkrét adatokkal könnyen végiggondolható és komoly eséllyel sikerhez vezet. Részmegoldás is lehetséges.

Ezek az analógiák egyfelől elvezetnek a matematikai modellhez (diofantikus egyenletek), másfelől a modell és a valóság kapcsolatának vizsgálatához is példaként szolgál (pl. negatív megoldások vagy éppen a megoldhatóság cáfolata).

Amint a példák mutatják, a matematikai tartalomnak sem kell csorbát szenvednie.

A V5., V6. és V8, változatokat a mélyen érdeklődő csoportoknak érdemes feladni.

V. fejezet

Paradoxonok

A mindennapi életben paradoxonnak nevezünk sokféle meghökkentő, váratlan, ellentmondásos vagy annak látszó szituációt. Northop megfogalmazása is a köznapi értelemben vett paradoxonokról szól: „Paradoxonnak nevezzük az olyan állításokat, amelyek első pillanatra tévesnek látszanak, pedig igazak; vagy amelyek igaznak látszanak, pedig tévesek; vagy amelyek ellentmondanak önmagukkal."

Matematikai értelemben olyan állítást nevezünk paradoxonnak, amelynek akár igaz, akár hamis voltának feltételezése ellentmondáshoz vezet.

A matematikatörténet tanúsága szerint a valódi és látszólagos paradoxonok fontos szerepet játszottak a tudomány fejlődésében. A Russell-paradoxon például hozzájárult a halmazelmélet és logika fogalmainak tisztázásához.

A matematika tanítása és tanulása közben az érdeklődés felkeltése, egy-egy fogalom gondosabb körüljárása érdekében is használjuk a paradoxonokat. A látszólagos ellentmondásokat éppen fogalmi tisztázással oldjuk fel. A paradox hétköznapi helyzetek, a lehetetlent ábrázoló képek, az optikai csalódások és csalások megbeszélése az érdekességen, a figyelem felkeltésén túl arra is alkalmas, hogy bizonyos tudáselemeket rögzítsünk és a hiedelmeket leválasszuk.

Az ókorból származnak az „Ez az állítás hamis" bázisú paradoxonok. Ide szokták sorolni azt a történetet, amely egy Epimenidész nevű krétai filozófusról szól, aki a történet szerint a következőt állította: „Minden krétai hazudik."

Higgyünk neki? Amennyiben hiszünk, akkor saját állítása szerint ő is hazudik. Nem igazi paradoxonnal állunk szemben, mert lehetséges, hogy van igazmondó krétai, és Epimenidész hazudott. Akkor lenne igazi „Ez az állítás hamis" típusú paradoxon, ha ő lenne az egyetlen krétai, vagy ha azt mondaná, hogy „Én mindig hazudok".

A „Minden általánosítás téved." állítás látszólagos önellentmondása abban áll, hogy maga is egy általánosítás. Vagyis ha igaz az állítás, akkor téved, azaz nem igaz. Ha viszont nem igaz, akkor csak azt tudjuk meg, hogy van olyan általánosítás, amely nem téved.

„A legkisebb legfeljebb 100 jellel le nem írható szám" definíció önmagában ellentmondásos, mert leírásához 100-nál kevesebb jelet használtunk (a szóközöket is beleértve).

G. A. Bürger Münchhausen báróról szóló könyvében olvashatjuk, hogy a báró egy alkalommal a saját hajánál fogva húzta ki magát a mocsárból.

„A lónak négy lába van, mégis megbotlik, így a legjobb lovast is érheti baleset az ugratásnál. Én is majdnem rajtavesztettem egyszer. Egy mocsarat akartam átugratni. Első pillanatra nem is tűnt túl szélesnek. Sajnos, valójában sokkal szélesebb volt, ezért a mocsár közepe táján a levegőben visszafordítottam a lovamat, így tértem vissza oda, ahonnét elindultam. Másodszor már nagyobb lendülettel ugrattam, de sajnos, ez az ugrás sem sikerült, a túlsó part közelében nyakig elmerültem a mocsárban. Bizony, az lett volna az utolsó órám, ha hirtelen ötlettel nem bízom magam a karom erejére. Gyorsan és nagy erővel megragadtam

a varkocsomat, ugyanakkor térdem közé szorítottam a lovamat, könyörtelen keménységgel szépen kirántottam magam paripástul a feneketlen sárból. Nem tagadom, forró percek voltak, de végül is szerencsésen megmenekültem."

Ebben az esetben fizikai „paradoxonról" van szó, a fizika törvényei szerint lehetetlen, hogy valaki felemelje saját magát.

A köznyelv az eldönthetetlen szituációk prototípusaként használja a „Mi volt előbb: a tyúk vagy a (tyúk)tojás?" kérdést. Ha a tyúktojás olyan tojás, amelyet tyúk tojt, akkor előbb tyúk kellett a tojáshoz. Ha viszont a tyúktojás az olyan tojás, amelyből tyúk kelt ki, akkor előbb tojásnak kellett lennie. Ez a probléma végső soron paradoxon, mert a tyúk-tyúktojás egymásra vonatkozó fogalmak.

Paradoxon nem csupán egy állítás lehet, hanem állítások olyan rendszere, amely ellentmondást tartalmaz. Ekkor az egymásra épülő mondatok önmagukban nem feltétlenül ellentmondásosak, de az egész rendszer az. Például az „Ez az állítás hamis" típusú paradoxon kétmondatos változata:

(1) A következő mondat hamis.

(2) Az előző mondat igaz.

Önmagában bármi lehetne az (1) vagy (2) mondatok igazságtartalma. Ha azonban a (2) mondatot „behelyettesítjük" az (1)-be, akkor kiderül a paradoxon: „Az a mondat, hogy »Ez a mondat igaz«, hamis".

A köznapi szóhasználatban az igaz állítás és az igazmondás, valamint a hamis állítás és a hazugság párban járnak, a tévedés alatt pedig a jó szándékú hibázást értjük. Pedig az igazmondás eredménye nem feltétlenül igaz állítás és a hazugság sem biztos, hogy hamis állításra vezet. Ha azt hiszem, hogy ma kedd van (bár szerda van), akkor – a legjobb tudásom szerint igazat mondok – a tévedésem miatt hamis állítást mondhatok (nevezetesen azt, hogy kedd van). Megtévesztési szándékkal mondhatok igazat is (nevezetesen azt állítom, hogy szerda van, holott meggyőződésem szerint kedd van). Ha tévedek, akkor – bár igazat akarok mondani – hamis állítást mondok. És ha hamis állítást akarok mondani – miközben tévedek –, akkor lehet, hogy véletlenül mégis igaz állítást mondok.

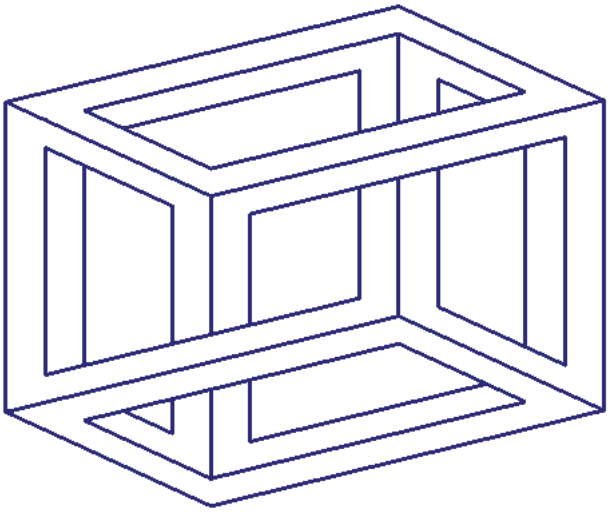
A szemünk által közvetített paradox helyzetek, az optikai csalódások és csalások azért olyan fontosak, mert a külvilágról szerzett információk túlnyomó részét a látás közvetíti. A „nem hisz a saját szemének" szólás a meglepetés, hitetlenkedés kifejezésére is szolgál. Éppen ezért érdemes olyan szituációkat tárgyalni a matematika órán, amikor nem hihetünk a saját szemünknek.

Bertrand Russel a világ legőszintébb emberének tartotta barátját, G. E. Moore filozófust. Egyszer megkérdezte tőle: „Hazudott ön valaha?" „Igen." – válaszolta Moore. Russel szerint ez volt Moore egyetlen hazugsága életében.

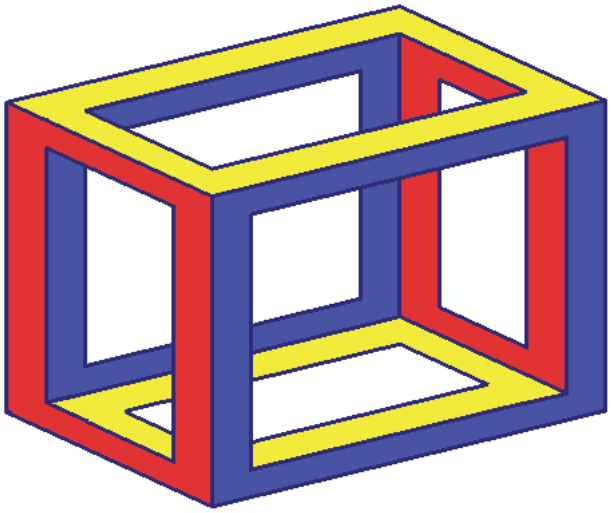
Módszertani feladat:

Állapítsa meg, hogy az itt következő példákban látszólagos ellentmondásról vagy valódi paradoxonról van-e szó! Keressen magyarázatot, illetve feloldást!

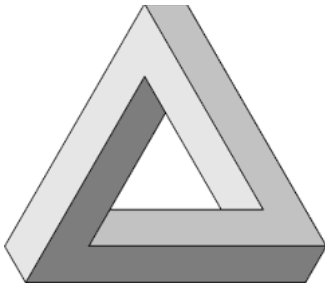
V.1. A lehetetlen kocka (M. C. Esher)



Megjegyzés: Ha felülről nézünk rá, úgy érezzük, hogy a felülről nézünk egy élvázas téglatestre (vagy kockára), alulról pedig úgy érezzük, hogy az alsó lap látszik. Ha kiigazítjuk a látható és takart éleket, már nem is olyan érdekes, egy közönséges téglatest kétdimenziós ábrázolását kapjuk:



V.2. A lehetetlen háromszög.

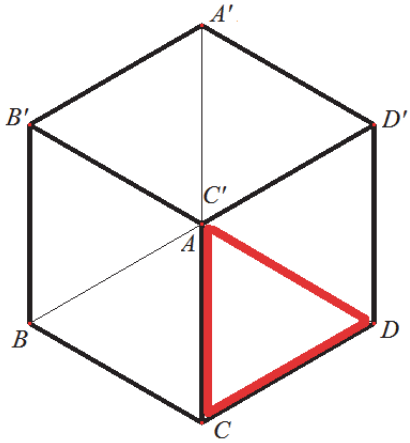


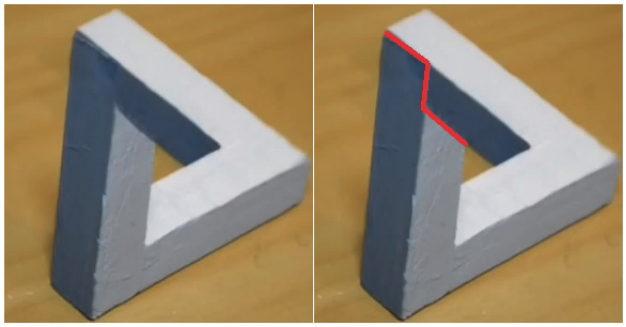
Megjegyzések: Ha abból indulunk ki, hogy az ábrán szakaszok és satírozott síkrészek vannak, akkor egy érdekes, harmadrendben forgásszimmetrikus alakzatot látunk. Ha azonban úgy nézünk rá, mint egy tér-

beli alakzat kétdimenziós vetületére, amelyen tónusokkal és takarásokkal „megkönnyítették” a láthatósági viszonyok észlelését, akkor ellentmondásra jutunk. Lokálisan vizsgálva minden rendben van, végig tudjuk követni az emelkedést és a süllyedést a rudak mentén. 3 darab egybevágó négyzetes oszlopot vélünk látni, csak éppen furcsán viselkedik, folyamatosan távolodik tőlünk és a hozzánk legközelebbi pontba tér vissza. Az ellentmondás feloldható, ha például nem egyenes hasábokról van szó:

Forrás: `https://www.youtube.com/watch?v=gqaJzvbygrE`

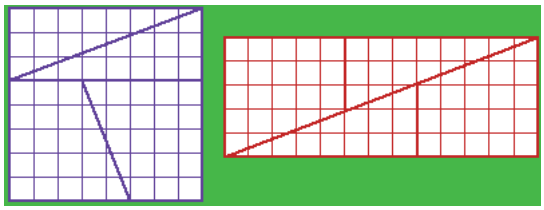
Kevésbé egzotikus, de a napi matematika tananyaghoz közelebb áll az a feloldás, hogy nem találkoznak a térben elhelyezkedő elemek, csak úgy látszik a vetületben. Egy $ABCDA'B'C'D'$ kockát úgy tartjuk a képsík fölé, hogy az AC' testátló merőleges a képsíkra. Ekkor a merőleges vetületen A és C' egybeesik és az $ACDC'$ térbeli töröttvonal egy szabályos háromszögnek látszik. Sokan készítettek olyan pálcika-, vagy rúdmodellt, amellyel ezt szemléltetik. A bal oldali fotón a jó szögből fényképezett test látható, a jobb oldaliba berajzoltuk a „csalás” helyét, a valóságban nem ér össze a két rúd.



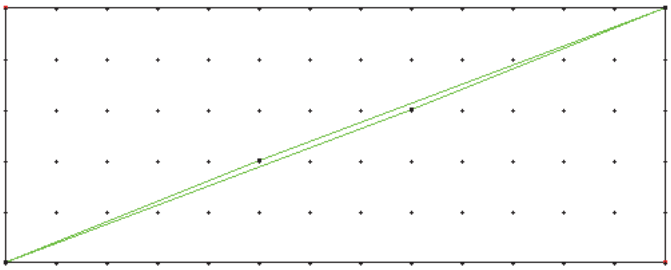


V.3. Keletkezett egy egységnégyzetnyi terület?

Egy 8×8-as négyzetet szétdarabolunk két trapézra és két háromszögre, majd a darabokból összeillesztünk egy 5×13-as téglalapot. Az egyik 64, a másik 65 kis négyzetből áll. Honnan keletkezett még egy négyzetnyi terület?



Megjegyzések: Nézzük meg tüzetesebben a téglalap átlóját! Ha a négyzetben berajzolt átlós szakaszokat átmásolnánk a téglalapba, azok csak közelítenék az átlót, de nem alkotnának egyenes szakaszt, hiszen a meredekségük különböző. Belül egy paralelogramma alakú rés keletkezik, amelynek területe éppen egy kis négyzetnyi. Kinagyítva:



Vegyük észre, hogy a négyzet darabolásakor a $3:5$ arány éppen az F_4 és F_5 Fibonacci-számok aránya!

Ha szomszédos Fibonacci-számok arányában analóg módon darabolunk egy négyzetet, akkor a téglalappá alakításkor egységnyi területű átfedés vagy rés keletkezik.

Érdekességként felvethető az a kérdés, hogy milyen arányú felosztás esetén jönne ki tényleg téglalap. (Éppen az aranymetszésnek megfelelő arányban.)

V.4. Végtelen sok ikerprím van?

Eukleidész az ókorban bebizonyította, hogy végtelen sok prímszám van. Eukleidész indirekt bizonyítása szerint feltesszük, hogy csak véges sok prímszám van. Ezek szorzatánál 1-gyel nagyobb szám relatív prím minden, a szorzatban szereplő prímhez, ezért léteznie kell az eddigiektől különböző prímnek. Vagyis ellentmondásra vezetett az a feltételezés, hogy az összes prímet felsoroltuk. Ebből következik, hogy végtelen sok prímszám van.

Ikerprímnek nevezzük azokat a prímszámpárokat, amelyek különbsége 2. Jelenleg nem ismert, hogy véges-e vagy végtelen ezen számpárok száma.

Eukleidész bizonyításának mintájára „igazoljuk”, hogy végtelen sok ikerprím számpár van: Feltesszük, hogy véges sok ikerprím számpár van. A legnagyobb ikerprím számpár nagyobbik tagjáig összeszorozzuk az összes prímet. Ha ehhez egyrészt hozzáadunk 1-et, másrészt elveszünk belőle 1-et, két olyan számot kapunk, amelyek relatív prímek minden, a szorzatban szereplő prímhez. Tehát két újabb prímet kaptunk, amelyek különbsége 2, tehát ikerprímek. Ez ellentmond az indirekt feltevésünknek.

Megjegyzések: Az ikerprímekre leírt „bizonyítás” Eukleidész bizonyításának azt a téves értelmezését tartalmazza, hogy a szorzatnál 1-gyel nagyobb (kisebb) szám maga az újabb prím. Holott csak annyi következik, hogy mindkét számhoz léteznie kell az indirekt feltevés szerint felsorolt prímektől különböző prímosztónak, mert minden 1-nél nagyobb egész számnak van prímosztója.

A prímszámok számára vonatkozó bizonyítás ebben az értelemben helyes, az ikerprímekre vonatkozó azonban nem.

V.5. Hamis állításból bármit lehet bizonyítani

Egy múlt századi történet szerint egy matematikus újságírók előtt kijelentette, hogy hamis állításból bármit be tud bizonyítani. Az egyik újságíró kétkedve fogadta az állítását, és azt mondta.

„Ha ez igaz, akkor abból, hogy $1 = 2$ azt is be tudja bizonyítani, hogy én vagyok a római pápa."

„Valóban." – válaszolt a matematikus. – „Ha ugyanis önt és a római pápát bezárjuk egy (előzőleg üres) szobába, akkor az ott található emberek száma 2, mivel azonban $1 = 2$, ön és a római pápa egy és ugyanaz az ember."

Megjegyzések: Az anekdotából annyit érdemes komolyan venni, hogy hamis állításból bármit (még igaz állítást is) levezethetünk.

Például igaz-e, hogy

a) ha $1 = 2$, akkor $1 = 1$?

b) ha $1 = 2$, akkor $n = k$ minden n és k természetes számra?

c) ha $1 = 2$, akkor $1 > 2$ (és mivel $1 < 2$, így $1 \neq 2$)?

Meggondolások: a) Ha $1 = 2$, akkor nullával szorozva: $0 = 0$ (ez igaz állítás), mindkét oldalhoz 1-et adva $1 = 1$. *b)* Ha $1 = 2$, akkor $0 = 1$, akkor $0 = k - n$, így $n = k$. *c)* Ha $1 = 2$, akkor *b)* alapján: $1 = 3$, $2 < 3 = 1$, vagyis $2 < 1$.