Racionális és irracionális számok
Milyen számkörökről tanultunk?

0. Mit jelent az, hogy egy szám racionális?
1. Racionális vagy irracionális szám a $\sqrt{2}$? Beszéljük meg, lássuk be!
2. Racionális vagy irracionális szám a $\sqrt{3}$? Beszéljük meg, lássuk be!
3. Racionális vagy irracionális szám a $\sqrt{4}$? Beszéljük meg, lássuk be!
4. Racionális vagy irracionális szám a $\sqrt{14}$? Beszéljük meg, lássuk be!
5. Racionális vagy irracionális szám az 1+ $\sqrt{2}$? Beszéljük meg, lássuk be!
6. Racionális vagy irracionális szám a $\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$? Beszéljük meg, lássuk be!
7. Milyen szám lehet két racionális szám összege, különbsége, szorzata, hányadosa?
8. Milyen szám lehet két irracionális szám összege, különbsége, szorzata, hányadosa?
9. Milyen számot jelenthet egy véges tizedes tört?
10. Milyen számot jelenthet egy végtelen szakaszos tizedes tört?
11. Írjuk fel két egész szám hányadosaként, ha lehet a 0,3333333… számot!
12. Írjuk fel két egész szám hányadosaként, ha lehet a 0,1666666… számot!
13. Írjuk fel két egész szám hányadosaként, ha lehet a 0,9999999… számot!
14. Írjuk fel két egész szám hányadosaként, ha lehet a 0,123123123… számot!
15. Írjuk fel két egész szám hányadosaként, ha lehet a 0,342151515… számot!
16. Írjuk fel két egész szám hányadosaként, ha lehet a 0,1011011101111011110… számot! (Két nulla között mindig eggyel több egyes van.)
17. Lásd be, hogy minden egész szám négyzetgyöke egész vagy irracionális!
18. Lásd be, hogy egy $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$középpontú kör nem haladhat át két olyan ponton is, melynek mindkét koordinátája racionális!
19. Lásd be, hogy $\log_2 5$ irracionális!
20. Racionális-e a tg 1° ?
21. Lásd be, hogy ha x, y és $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ is racionális, akkor $\sqrt{x}$ és $\sqrt{y}$ is racionális!
22. Lásd be, hogy ha x, y, z és $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$ racionális, akkor $\sqrt{x}$ és $\sqrt{y}$ és $\sqrt{z}$ is racionális!
23. Fel lehet-e írni az 1-et a 2 és a $2 - \sqrt{2}$ egész számú többszörösei összegeként?

Bizonyítási módszerek

Skatulyaelv

1. (1) Legalább mekkora létszámú csoport kell ahhoz, hogy biztosan legyen benne legalább 2, 3, 4, ... olyan gyerek, akik ugyanabban a hónapban született? ☺

2. (2) Igazoljuk, hogy
a) van két olyan 2-hatvány, melyek különbsége osztható 2013-mall!

b) végtelen sok olyan 2-hatvány van, melyek közül bármely kettő különbsége osztható 2015-tel!

3. (2) Mutassuk meg, hogy 5 egész szám között mindig van három olyan, melyeknek összege osztható 3-mal!

4. (2) Kiválasztunk az 1, 2, 3, … 100 számokból 27 számot. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük 2, ami nem relatív prím!

5. (2) Legyen az a_1, a_2, …, a_n az $1, 2, 3, \cdots, n$ számok egy permutációja! Bizonyítandó, hogy az $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \cdots (a_n - n)$ szorzat páros, ha n páratlan.

6. (1) Legyen a egy tetszőleges pozitív valós szám! Bizonyítandó, hogy ha a sík minden pontját kékre vagy pirosra színezzük, akkor lesz két egyszínű pont, amelyeknek távolsága éppen a!

7. (3) Legyen a egy tetszőleges pozitív valós szám. Bizonyítandó, hogy ha a sík minden pontját kékre, zöldre vagy pirosra színezzük, akkor lesz két egyszínű pont, amelyeknek távolsága éppen a!

8. a) Igazoljuk, hogy az 1, 2, 3, …, 50 számok közül kiválasztható 25 úgy, hogy egyik se legyen osztója semelyik másiknak!
b) Igazoljuk, hogy 26 már nem választható ki, vagyis ha 26-ot (vagy többet) választunk ki, akkor lesz kettő, amelyek közül az egyik osztója a másiknak!
c) Általánosítsuk a feladatot $2n$ elemre!

9. (2) Bizonyítandó, hogy 1-től $2n$-ig tetszőleges $n + 1$ darab különböző egész számot megadva lesz kettő,
a) amelyek relatív prímek.
b) amelyek esetében az egyik osztója a másiknak.

10. Egy osztály tanulói fotózáshoz két sorban állnak fel úgy, hogy mindenki előtt alacsonyabb tanuló áll. Igaz-e, hogy ha a két sorban külön-külön nagyság szerinti (balról jobbra csökkenő) sorrendben átrendezzük őket, akkor is mindenki előtt nála alacsonyabb ember fog állni?

11. Egy század felsorakozik n sorban és k oszlopban.
Ugyanaz a személy-e a soronként legmagasabbak közül a legalacsonyabb, mint a soronként legalacsonyabbak közül a legmagasabb?
Ugyanaz a személy-e a soronként legmagasabbak közül a legalacsonyabb, mint az oszloponként legmagasabbak közül a legalacsonyabb?

Invariancia, teljes indukció, ,,részleges indukció'', visszafelé indukció, kettős indukció

1.(2) Száz bűnös asszony feladata.
Egy szigeten egy roppant fura törzs lakik, a gyerekeket elszámítva mindenki „egy férfi – egy nő" házasságban él. Mindenki tudja mindenki másról, hogy csalja-e a férjét, csak a saját feleségéről nem tudja ezt senki sem. De senki, soha meg sem meri említeni a dolgot, vagyis senki nem tud arról, hogy a másik is ismer csalfa asszony(oka)t. Történetesen épp 100 asszony csalja a férjét…
Az a törvény, hogy ha valaki gondolati úton rájön arra, hogy csalja a felesége, akkor másnap reggel pontban hétkor csónakba rakja őt, és elűzi a szigetről. Egy nap egy idegen vetődik a szigetre, és azt mondja: "Tudomásomra jutott, hogy van olyan asszony, aki csalja a férjét." Mi fog történni?

2. (2) Igazoljuk, hogy $4^n+15n-1$ osztható 9-cel, ha $n > 1$ természetes szám!

3. (1) Mutassuk meg, hogy

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2 \quad !$$

4. (2) Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$, akkor

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n}>\frac{n}{2}$$

5. (2) Határozzuk meg a következő összeget:

$$\frac{m}{n}+\frac{m+1}{m}+\ldots+\frac{n}{m}$$

6. (1) Tekintsük az 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Fibonacci-sorozatot! Igazoljuk, hogy a sorozat minden negyedik tagja osztható 3-mal!

7. (3) Igazoljuk, hogy a 3^n számú 1-es számjeggyel leírt szám osztható 3^n-nel, de nem osztható 3^{n+1}-nel!

8. (3) Adott a síkon n számú nem egy egyenesre illeszkedő pont, ahol $n \geq 3$.
Mutassuk meg, hogy minden pontot össze lehet kötni néhány más ponttal úgy, hogy az így kapott szakaszok nem metszik egymást, és egy háromszögekre bontott konvex sokszöget alkotnak!

9.(3) Adott $n \geq 3$ számú szakasz, mindegyik legalább egységnyi hosszú. Tudjuk, hogy akármelyik k számút $k = 3, 4, \ldots, n$ választjuk is ki közülük, ezek nem lehetnek egy sokszög oldalai. Igazoljuk, hogy a szakaszok összhossza nagyobb, mint 2^{n-1} !

10.(3) Egy táblázatban, amelynek 3 sora és n oszlopa van, véletlenszerűen elhelyeztünk n fehér, n piros és n fekete korongot. Igazoljuk, hogy minden sorban át lehet rendezni a korongokat úgy, hogy minden oszlopban három különböző színű korong legyen!

11.(2) Mutassuk meg, hogy az n szakaszból álló térbeli zárt töröttvonal szögeinek összege kisebb, mint $(n-2)180°$!

12.(3) Adott a síkon n egyenes, amelyek közül semelyik kettő nem párhuzamos, és semelyik három nem metszi egymást egy pontban. Hány részre bontják a síkot?

13. n darab kör egy síkban lévő legfeljebb hány tartományra oszthatja a síkot?

14. n darab sík legfeljebb hány tartományra oszthatja a teret?

15.(4) A síkot n körrel tartományokra bontottuk. Mutassuk meg, hogy a tartományok kiszínezhetőek két színnel olyan módon, hogy mindegyik tartományt kiszínezünk az egyik színnel, de bármely két tartományt, amelyeknek van közös határoló ívük, különböző színűre színezünk!

16. (2) Tudjuk, hogy az $a+\frac{1}{a}$ szám egész. Igazoljuk, hogy ekkor minden egész n-re a $a^n+\frac{1}{a^n}$ is egész!

17. (3) Adott $2n$ számú pozitív szám: $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2n}$. Hogyan képezzünk belőlük párokat, hogy
a) a párok szorzatának összege maximális;
b) a párok szorzatának összege minimális;
c) a párok összegének szorzata maximális;
d) a párok összegének szorzata minimális legyen?

18.(4) n darab pozitív szám összege épp 100. Igazoljuk, hogy szorzatuk akkor maximális, ha minden szám pont $\frac{100}{n}$!
Ennek alapján mutassuk meg, hogy tetszőleges x_1, ..., x_n pozitív számokra az

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

egyenlőtlenség érvényes (a geometriai közép legfeljebb akkora, mint az aritmetikai közép).

Logikai módszerek, téves módszerek, hibák
Gondolkodtató, de nem nagyon nehéz feladatok

1.(1) Egy matematikaversenyen a versenyzők 85%-a megoldotta az első feladatot.
A második feladatot 80%-uk oldotta meg.
A harmadik feladatot 75%-uk oldotta meg.
Legalább hányan oldhatták meg mindhárom feladatot?
Huncutság: Nem elég ,,kiszámolni'', meg is kell mutatni, hogy lehetséges!

2.(1) Egy sakktáblán hányféleképpen helyezhetünk el
a) két egyforma bástyát?
b) két különböző bástyát?
c) két egyforma bástyát úgy, hogy azok ne álljanak egymással ,,ütési pozícióban"?
d) két különböző bástyát úgy, hogy azok ne álljanak egymással ,,ütési pozícióban"?

3.(2) Legfeljebb hány bástyát helyezhetünk el a sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne álljon egymással ütési pozícióban?

4.(2) Készítsünk 4 halmazhoz Venn-diagramot!

5.(3) Egy 33-as létszámú osztályban minden gyerek mindennap sportol, mégpedig 22-en mennek úszásra, 22-en mennek focizni. Akik ma focizni mentek, azok közül tegnap 15-en fociztak, 15-en pedig úsztak. A ma úszók közül tegnap ugyancsak 15-en úsztak és 15-en fociztak.
Hányan vannak azok, akik ma is, tegnap is voltak úszni?
Van-e fölösleges információ a feladatban?

6.(4) Egy sakktáblán úgy helyezkednek el bábuk, hogy minden sorban és oszlopban pontosan két bábu áll. Elérhető-e néhány bábu levételével, hogy minden sorban és oszlopban pontosan egy bábu álljon? (KöMaL feladat)

7.(4) Két haramia osztozik a rabolt aranytallérokon (n darab):
Az egyik kezdi: 1 neked, 2 nekem, 3 neked, 4 nekem, 5 neked, 6 nekem stb. Ami végül marad (még ha nem is annyi, amennyi jut), megkapja a soronkövetkező.
Lehet-e igazságos az osztozkodás?

8.(2) Öt szám páronként vett összegei a következő eredményeket adják: $-7, -4, -1, -1, 2, 2, 2, 5, 5, 8$
Lehet-e tudni, mi volt az 5 szám?

9.(1-4) a: Egy vándor betér egy fogadóba. Nincs nála pénz, csak egy 7 cm hosszú, 4 mm átmérőjű aranyrúd. A fogadós elfogadja, hogy a vándor egy éjszakára egy darab 1 cm hosszú aranyrúddal fizet. A vándor 7 napot szándékozik maradni. A fogadós az addig megkapott darabokkal visszaadni is tud. Hány vágással oldhatják meg ezt, ha azt szeretnék, hogy minél kevesebb darabba kelljen vágni az aranyrudat?
b: Egy vándor betér egy fogadóba. Pénz nincs nála, de van egy 7 láncszemből álló (nyílt) aranylánca. 7 napig akar megszállni a fogadóban. A fogadóssal megegyeznek, hogy naponta 1 láncszemért lakhat a fogadóban. A vándor azonban kiköti, hogy előre nem fizet, a fogadós meg azt, hogy a vándornak minden nap rendeznie kell az aktuális számláját. Legkevesebb hány láncszemet kell elvágni a fogadós csípőfogójával, hogy a megállapodás szerint tudjon fizetni a vándor? (A láncszem elvágásával annak értéke természetesen nem csökken. Egy láncszemet akár több darabra is szabad vágni.)
c: Egy vándor betér egy fogadóba. Pénz nincs nála, de van nála egy 2013 centiméter hosszú (4 mm átmérőjű) aranyrúd. (Maga után húzza. Vagy feltekeri.) A fogadóssal megegyeznek, hogy naponta 1 cm-nyi aranyrúdért lakhat a fogadóban.
A vándor azonban kiköti, hogy előre nem fizet, a fogadós meg azt, hogy a vándornak minden nap rendeznie kell az aktuális számláját. Legkevesebb hány darabra vágják fel a fogadós csípőfogójával az aranyrudat, hogy a megállapodás szerint tudjon fizetni a vándor?
d: Egy vándor betér egy fogadóba. Pénz nincs nála, de van egy 31 láncszemből álló (nyílt) aranylánca. 31 napig akar megszállni a fogadóban. A fogadóssal megegyeznek, hogy naponta 1 láncszemért lakhat a fogadóban. A vándor azonban kiköti, hogy előre nem fizet, a fogadós meg azt, hogy a vándornak minden nap rendeznie kell az aktuális számláját. Legkevesebb hány láncszemet kell elvágni a fogadós csípőfogójával, hogy a megállapodás szerint tudjon fizetni a vándor? (A láncszem elvágásával annak értéke természetesen nem csökken. Egy láncszemet akár több darabra is szabad vágni.)
e: d: Egy vándor betér egy fogadóba. A fogadóssal megegyeznek, hogy naponta 1 láncszemért lakhat a fogadóban. A vándor azonban kiköti, hogy előre nem fizet, a fogadós meg azt, hogy a vándornak minden nap rendeznie kell az aktuális számláját. Legfeljebb milyen hosszú láncot vihet magával, ha legfeljebb 5 vágást tehetnek a fogadós csípőfogójával? (A láncszem elvágásával annak értéke természetesen nem csökken. Egy láncszemet akár több darabra is szabad vágni - de persze most nem érdemes.)

10.(3) Egy kínai nyílt pingpong versenyen 62886 versenyző indult. A versenyt egyenes kieséses rendszerben bonyolították le, tehát az első fordulóban 31443 összesorsolt pár játszott. Akik vesztettek, azok ki is estek a további versenyből. A győzteseket újra párokba sorsolták, stb... (Ha páratlan sok versenyző maradt egy forduló után, akkor az egyik játékos játszma nélkül jutott a következő fordulóba.) Hány mérkőzést játszottak le az egész verseny folyamán, míg valaki (konkrétan Huan Ti) megnyerte a versenyt?

11.(3) Egy olyan tábla csokoládét, amely 7×5 kis kockából (téglából) áll, minimum hány töréssel lehet kis kockáira törni? És maximum? (A próbálgatás előtt tippeljünk!) (Egyszerre egy-egy darabot érintő, de azon szélétől széléig futó, az osztások mentén végzett töréseket tekintünk.)

12. (3) Egy $n \times k$-as csokoládét hány vágással lehet 1×1-es darabokra törni? (Egyszerre egy-egy darabot érintő, de azon szélétől széléig futó, az osztások mentén végzett töréseket tekintünk.)

13. (2) Egy kígyó csúszás közben a fejétől a farkáig 5 lépésnyi, a farkától a fejéig 15 lépésnyi. Hány lépésnyi a kígyó hossza?

Segítség: A kígyó is mozog, így mi az egyik esetben vele szemben, a másik esetben vele egy irányban haladunk.

14.(2) Egy dobozban *p*-féle színű golyót helyeztünk el, minden színből *q* darabot. (*p* és *q* prímszámok). Ahhoz, hogy annyi golyót vegyünk ki, hogy biztosan minden színből legyen legalább egy, 17-tel többet kell kivenni a dobozból, mint ahhoz, hogy biztosan legyen olyan szín, amelyből minden golyót kivettünk.

15.(2) Egy négyzet csúcsaiba beírunk egy-egy számot. Egy lépésben két szomszédos csúcsba írt számot növelhetünk 1-gyel.
Azt szeretnénk elérni, hogy a négyzet négy csúcsában ugyanaz a szám álljon. Elérhető-e ez, ha a négy csúcsba írt szám sorban (körben)
a) 1, 0, 0, 0;
b) 1, 0, 1, 0;
c) 2, 1, 3, 4?
Ha igen, hány lépésben?
d) Tudunk-e feltételt adni a számokra, hogy a kitűzött cél elérhető legyen?

16.(2-5) a) Egy sakktábla két átellenes (pl. A1 és H8) sarokmezőjét levágjuk. Hogyan fedhető le ez a csonka sakktábla 1 × 2-es (éppen két sakktáblamező méretű) dominókkal? (Egyrétűen és hézagmentesen.)
b) Egy sakktábla két mezőjét kivághatjuk. Mely mezők kivágása esetén lesz lefedhető az így kapott csonka sakktábla 1 × 2-es dominókkal?
c) Egy sakktábla A1-es mezőjét kivágjuk. Lefedhető-e ez a csonka sakktábla 1 × 3-as dominókkal?
d) Egy sakktábla egyik mezőjét kivághatjuk. Mely mező kivágása esetén lesz lefedhető az így kapott csonka sakktábla 1 × 3-as dominókkal?
e) Mely tetraminókkal fedhető le a 10x10-es sakktábla, és melyekkel nem?

17. Lefedhető-e egy 6x6-os „sakktábla” 1x2-es dominókkal úgy, hogy minden „rácsegyenesen” keresztben fekszik dominó?

18. Egy 2x13-as téglalapot 2x1-es téglalapokkal fedünk le, egyrétűen és hézagmentesen. Hány különböző lefedés lehetséges? (Két fedés különböző, ha legalább egy kis téglalap máshol fekszik. Az egyes kis téglalapokat nem különböztetjük meg.)

19.(2) a) Egy (8×8-as) szabadtéri sakktábla minden mezőjén áll egy gyerek. Egy sípjelre mindegyik gyerek átlép egy szomszédos mezőre. Ki merre lépjen, hogy ezután is minden mezőn álljon gyerek?
b) Egy 7×7-es szabadtéri sakktábla minden mezőjén áll egy gyerek. Egy sípjelre mindegyik gyerek átlép egy szomszédos mezőre. Ki merre lépjen, hogy ezután is minden mezőn álljon gyerek?

20.(2) Olvassuk el figyelmesen a következő 5 állítást!
(A): A (B) állítás igaz.
(B): Az (A), (B), (C), (D), (E) állítások közül legfeljebb az egyik igaz.
(C): Az (A), (B), (C), (D), (E) állítások mindegyike igaz.
(D):
(E):
A (D) és (E) állításokat varázstintával írtuk, láthatatlanok azok számára, akik nem mindig mondanak igazat.
Állapítsuk meg, hogy az (A), (B), (C), (D), (E) állítások közül melyik igaz, melyik hamis!

21.(3) Két család, az Igaz és a Hamis 5 gyermeke Cili, Lili, Vili, Juci és Saci. Az Igaz családban minden gyerek mindig igazat mond, a Hamis családban minden gyermek minden állítása hamis.
Melyik gyereknek mi lehet a vezetékneve, ha ezeket állítják:

Cili: Juci neve nem Igaz.
Juci: Vili és Cili testvérek.
Lili: Saci nem testvére Jucinak.
Saci: Vili vezetékneve Hamis.
Vili: Lili a Hamis család tagja.

22.(2) A, B, C, D, E testvérek. Egyszer valamelyikük betört egy ablakot. Apjuk kérdésére, hogy ki volt az, a következőket válaszolták:
A: B vagy C volt.
B: Sem D nem volt az, sem én nem voltam.
C: Mindketten hazudtok!
E: Nem, az egyikük igazat mond, a másikuk nem.
D: Nem, E nem mond igazat.
Anyjuk hozzátette: 3 gyerek igazat mond, de a másik kettőben nem bízom.
Ki törte be az ablakot?

23.(4) A 20. század végefelé hallottam három tengerészt beszélgetni:
A: Amikor én annyi idős voltam, mint C most, akkor voltam kétszer annyi idős, mint ő.
B: Én csak 4 évvel vagyok idősebb C-nél.
C: Hármunk életkora közül csak A-é páratlan szám, és hármunk életkorának a legkisebb közös többszöröse a kapitány születési évszáma.
Hány éves a kapitány?

24.(2) Három barát nyulakra vadászott. Mindhárman különböző számú nyulat lőttek.
A vadászklubban ezt mesélték:
A: Én lőttem a legtöbb nyulat. C lőtte a legkevesebbet.
B: Én lőttem a legtöbb nyulat. Több nyulat lőttem, mint A és C együttvéve!
C: Én lőttem a legtöbb nyulat. B fele annyit lőtt, mint én.
Ki lőtte a legtöbb nyulat, ha tudjuk, hogy az elhangzott 6 állításból három igaz, három hamis.
Mit mondhatunk arról, hogy ki lőtte a legkevesebb nyulat?

25.(4) Egyszer egy teknős hat percen át haladt egyenesen előre.
Útját többen is figyelték a következő feltételek mellett:
a) A hat perc alatt mindig figyelte valaki.
b) Minden figyelő egy percig figyelt egyfolytában.
c) Mindenki úgy találta, hogy amíg figyelte, addig egy métert haladt előre a teknős.

Legalább hány métert tett meg a teknős?
(Pontosabban: mennyi az a legnagyobb távolság, aminél kevesebbet a teknős ezen feltételek mellett nem tehetett meg?)
(KöMaL feladat)
Ötlet: Az világos, hogy nincs 6 perc a megtett út felső korlátja, mert az első percben is figyelte valaki, aki legfeljebb 1 méternyit látta haladni, a második, harmadik stb. hatodik percben ugyanígy, tehát legfeljebb 6 métert haladt előre. De tehetett-e meg kevesebbet 6 méternél? Ha például az első fél perben nem haladt, a másodikban egy métert, aztán fél percig megint pihent, és a második megfigyelő éppen a fél percnél csatlakozott be, akkor mindkét megfigyelő 1-1 méternyit látta előre haladni, de összesen csak 1 métert tett meg.

26.(3) Egy sakkversenyen 8-an indultak, mindenki mindenkivel egyszer játszott.
Mindnyájan különböző számú pontot szereztek a versenyen.
A második helyezett annyi pontot gyűjtött, mint az utolsó négy helyezett összesen.
Mi volt a 3. és az 5. helyezett közötti játszma eredménye?
(KöMaL feladat)

27.(4) Tegyük fel, hogy
a) aki szereti a spenótot, az nem mind hullámlovas;
b) minden matematikus hullámlovas, vagy legalábbis nem szereti a spenótot;
c) vagy az igaz, hogy aki nem hullámlovas, az matematikus, vagy pedig az, hogy aki hullámlovas, az nem matematikus.
Következik-e a fentiekből, hogy aki szereti a spenótot, az nem matematikus?

28.(2) Igaz-e, hogy ha egy társaságban a szőkék között gyakoribbak a kékszeműek, akkor a társaságban a kékszeműek között gyakoribbak a szőkék?

29. (5) Egy televíziós vetélkedőben a játékosnak mutatnak három csukott ajtót, amelyek közül kettő mögött egy-egy kecske van, a harmadik mögött viszont egy vadonatúj autó. A játékos nyereménye az, ami az általa kiválasztott ajtó mögött van. Azonban a választás meg van egy kicsit bonyolítva. Először a játékos csak rámutat az egyik ajtóra, de mielőtt valóban kinyitná, a műsorvezető a másik két ajtó közül kinyit egyet, amelyik mögött nem az autó van (a játékvezető tudja, melyik ajtó mögött mi van), majd megkérdezi a játékost, hogy akar-e módosítani a választásán. A játékos ezután vagy változtat, vagy nem, végül kinyílik az így kiválasztott ajtó, mögötte a nyereménnyel. Érdemes-e változtatnia a játékosnak?

30. (3) Egy matematikaversenyen három feladatot tűztek ki. Az első feladatot a résztvevők p százaléka oldotta meg, a másodikat q, a harmadikat pedig r százalékuk. Állapítsuk meg, hogy a versenyzőknek legalább hány százaléka oldotta meg mind a három feladatot!

31.(4) Két iskola diákjai egy teszten a következő eredményt érték el:
– Az első iskolába járó diákok átlaga 74 pont, ebből a fiúké 71, a lányoké pedig 76 pont.
– A másik iskolába járó diákok átlaga 84 pont, ebből a fiúké 81, a lányoké pedig 90 pont.
Ha a két iskolában a fiúk átlaga összesen 79 pont volt, mennyi volt a lányoké?

32.(4) Adott két, különböző hosszúságú, inhomogén (nem egyenletes sebességgel égő) gyújtózsinór, melyek mindegyike 2 óra alatt ég el. Mérjünk ki ezek égetésével 1,5 órát!

33.(2) Két filmesztéta - akik régen látták egymást – beszélget:
– Hány gyereked van?
– Három
– Hány évesek?
– Nem mondom meg, találd ki! Annyit segítek,hogy a gyerekeim évei számának szorzata 36, és minden gyermekem éveinek száma egész szám.
– Ebből nem tudom megmondani, hogy hány évesek a gyerekek.
– De az is igaz, hogy a gyerekeim évei számának összege megegyezik a szemközti ház ablakainak számával.
Erre a másik megszámolja a szemközti ház ablakait, majd rövid gondolkodás után ezt válaszolja:
– Még mindig nem tudom, hogy hány évesek a gyerekeid.
– Jó, jó. De az is igaz, hogy a legnagyobb gyerekem szőke és kék szemű.

– Most már tudom, hogy hány évesek a gyerekeid!
Kérdés: Hány ablak van a szemközti házon?
(Tudjuk, hogy a filmesztéták nagyon okosak – különösen a „másik” –, így ha valamennyi információból meg lehet mondani a gyerekek számát, akkor ő meg is tudja mondani.)

34.(1) Egy szamár és egy öszvér zsákokkal megrakottan bandukoltak az úton. Felsóhajt az öszvér. Ha csak egy zsákot átadnál nekem kétszer annyi terhet cipelnék, mint te. Azt mondja erre a szamár. Így igaz, de ha te adnál át egy zsákot terhedből, akkor ugyanannyit cipelnénk. Hány zsákot vitt a szamár és az öszvér? Old meg egyenlet felírása nélkül!

35.(1) Három testvér életkora úgy aránylik egymáshoz, mint 5 : 6 : 8. A legkisebbik születésekor a legidősebb életkora négy évvel volt több a középső életkora kétszeresénél. Hány éves most a három testvér? (Mennyiségtan, 1939) Oldd meg egyenlet felírásával és anélkül is!

36.(2) Hány részre oszthatja 4 különböző sík a teret? Vigyázz, több eset is létezhet.

Szerkesztések

1. (2) Szerkesszen egyenlő szárú háromszöget, amelynek alaphoz tartozó magassága 4,2 cm szárához tartozó magassága 3,8 cm! Adjon meg legalább háromféle megoldási lehetőséget a feladathoz!

2. (3) Szerkesszen egyenlő szárú háromszöget, ha adott a szárak által bezárt szög és a kerülete!

3. (3) Szerkesszen háromszöget, ha adott a kerülete, egyik szöge, és az azt közrefogó oldalak közül az egyikhez tartozó magasság!

4. (3) Keressük az ABC háromszög AB oldalán azt az X, valamint AC oldalán azt az Y pontot, amelyekre XY || BC és XY=BX+CX.

5. (3) Szerkesszünk az ABC háromszögben a B-ből és C-ből induló belső szögfelezők metszéspontján át olyan szelőt, amelynek AB oldallal vett X, illetve AC oldallal vett Y metszéspontjára XY=BX+CY teljesül!

6. (3) Egy ABC háromszögben szerkesszünk olyan szelőt, amely az AB-t X-ben, az AC-t Y-ban metszi, és XY=BX+CY!

7.(2) Adott egy hegyesszögű szögtartomány és abban egy A pont. Szerkesztendő legkisebb kerületű háromszög, amelynek egyik csúcsa A, a másik két csúcsa pedig egy-egy szögszáron van.

8.(2) Adott két koncentrikus kör. Szerkesszünk olyan egyenlő oldalú háromszöget, amelynek két csúcsa illeszkedik az egyik, a harmadik a másik körre.

9.(2) Írjunk négyzetbe egyenlő oldalú háromszöget, amelynek az egyik csúcsa egy négyzetcsúcsba, a másik két csúcsa a két nem ide befutó oldalra esik.
a) Bizonyítsa be, hogy a háromszög a négyzetből két egybevágó háromszöget vág le!
b) Szerkessze meg adott négyzetbe ezt a szabályos háromszöget!

11.(2) Szerkessze meg a háromszöget, ha adott három oldalfelező merőleges egyenese és az egyik oldal egy pontja!

12.(2) Szerkesszen egy adott háromszögbe szabályos háromszöget úgy, hogy az egyik csúcsa az egyik oldal adott pontja legyen!

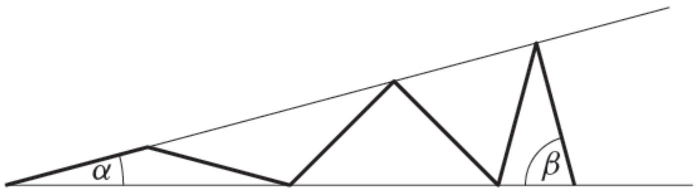
13.(2) Szerkesszen paralelogrammát úgy, hogy két szomszédos csúcsa két előre kitűzött pont legyen, a másik két csúcspontja pedig egy-egy előre megadott egyenesre illeszkedjen!

14.(3) Szerkesszen négyszöget, ha adottak a szögei és két szemközti oldala!

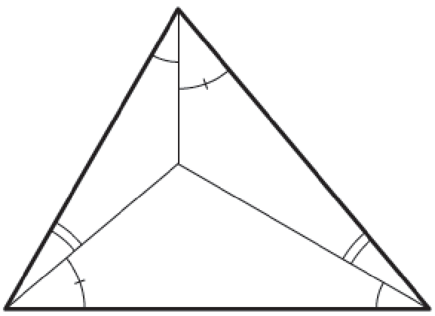
15.(3) Szerkessze meg egy háromszög egyik oldalán azt a pontot, amelyből a másik két oldalig húzott, az oldalakkal párhuzamos szakaszok hosszának összege egy adott szakasszal egyenlő!

16.(1) Mekkora az a szög, amely a mellékszögének a) 2/3-ával, b) 3/7-ével, c) 3/5-ével egyenlő?
d) p/q részével egyenlő?

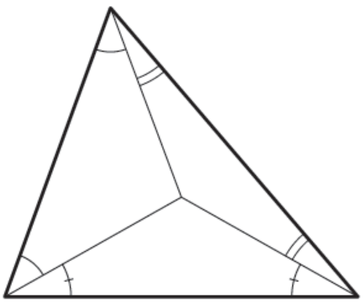
17.(1) Az ábrán vastagon húzott szakaszok egyenlők. Mekkora a β, ha α = 15°?



18.(2) Az előbbi feladat ábráján 6 egyenlő hosszúságú szakaszból áll a vastag töröttvonal.
a) Bizonyítsuk be, hogy ez a töröttvonal már nem folytatható tovább az ábrán látható módon!
b) Hogyan kellene megválasztani az α-t, hogy a törött vonal tíz egyenlő szakaszt is tartalmazzon?

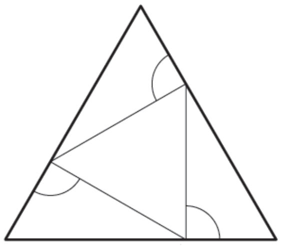


19.(2) Egy háromszög mindhárom szögét felosztottuk 2-2 részre az ábra szerint. Bizonyítsuk be, hogy a háromszögbe berajzolt szakaszok a magasságvonalak egyenesein vannak!



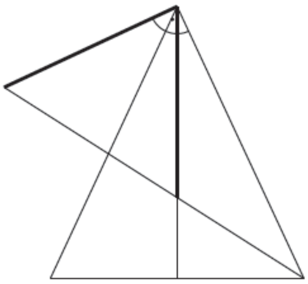
20.(2) Az ábrán az egyformán jelölt szögek egyenlők. Számítsuk ki a belső pontnál levő szögeket, ha ismerjük a háromszög szögeit!

21.(2) a) Bizonyítsa be, hogy a derékszögű háromszöget az átfogóhoz tartozó súlyvonal két egyenlő szárú háromszögre bontja.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik szög 30°-os, akkor az ezzel szemközti befogó fele az átfogónak!
c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 15°-os, akkor az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak!



22.(2) Mutassuk meg, hogy az egyenlő oldalú háromszög oldalait három egyenlő részre osztó pontoknak az ábrán látható összekötésekor keletkező jelölt szögek derékszögek!

23.(2) Egy négyzet átlóira a csúcsokból mérjük rá sorra a négyzet oldalait! Az így kapott pontokat kössük össze!
a) Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett négyszög ismét négyzet!
b) Határozzuk meg az új négyzet oldalának hosszát!



24.(2) Az egyenlő szárú háromszög csúcsában emeljünk merőlegest az egyik szárra! Szerkesszük meg e szár és az alap szögének, majd a csúcsnál levő szögnek is a szögfelezőjét is! Igazoljuk, hogy az ábrán vastagon jelölt szakaszok egyenlők!

25.(3) Mutassuk meg, hogy ha az egyenlő szárú háromszög egyik szárának és a hozzá tartozó szögfelező irányának ismeretében meg tudnánk szerkeszteni a háromszöget, akkor tetszőleges szöget is tudnánk harmadolni!
Ötlet: vizsgáljuk a szögek nagyságát!

26.(4) a) Mutassuk meg, hogy bárhogyan adunk is meg a síkon négy pontot (három nem lehet egy egyenesen), mindig ki lehet választani közülük hármat úgy, hogy azok ne legyenek egy hegyesszögű háromszög csúcsai!

b) Adjunk meg a síkon négy olyan pontot, hogy az általuk meghatározott négy háromszög mindegyike tompaszögű legyen!

27.(3) a) Mutassuk meg, hogy a háromszög bármelyik oldalához tartozó súlyvonal kisebb a másik két oldal számtani közepénél.
b) A *P* és *Q* pontoknak a sík *A* és *B* pontjaitól mért távolságösszege egyenlő. Mutassuk meg, hogy a *PQ* szakasz felezőpontjára ez az érték kisebb!

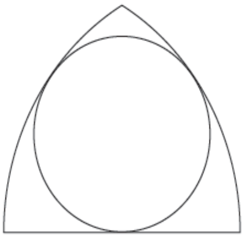
28.(2) Mekkora annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynél a befogók összege *a*, az átfogóhoz írt kör sugara *b*?

29.(2) Igazoljuk, hogy a hozzáírt körök középpontjai által meghatározott háromszög magasságvonalai az eredeti háromszög szögfelezői!

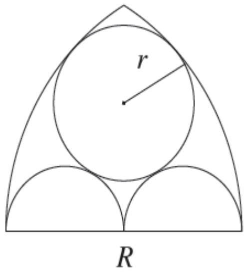
30.(2) Mutassuk meg, hogy a háromszög hozzáírt körei középpontján átmenő kör sugara kétszerese a körülírt kör sugarának!

31.(2) Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha ismerjük azt a két szeletet, amelyekre az egyik hegyesszög felezője vágja szét a szemközti oldalt!

32.(3) a) Egy gótikus ablak felső része két körívből áll. Ezek sugara egyenlő az ablak a szélességével. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a két körívet és a vízszintes keresztfát érinti?
b) Számítsuk ki az ábrán *r*-rel jelölt sugarat, ha *R*-et ismertnek tételezzük fel!



a)



b)

33.(2) Egy egyenlő szárú háromszögben az alaphoz m_a, a szárhoz m_b(ismert) hosszú magasság tartozik. Mekkorák a háromszög oldalai?

34.(3) Legyen *M* az *ABCD* húrnégyszög *AC* és *BD* átlóinak metszéspontja! Bizonyítsuk be, hogy
$AM \cdot BC \cdot CD = CM \cdot AB \cdot AD$!

35.(3) Az *ABCD* szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) párhuzamos oldalai *AB* = 12, *CD* = 6, a szárak 5 hosszúak. A trapézt elvágtuk egy olyan, az *AC* átlóval párhuzamos egyenessel, amely felezi a trapéz területét. Hol metszi ez az egyenes a trapéz *AB* oldalát?

36.(4) Egy 120°-os körcikk alakú telekre olyan négyzet alapterületű házat akarunk építeni, amelynek két csúcsa a körcikk egy-egy sugarára illeszkedik, másik két csúcsa pedig a köríven van. Egy helyi szabvány szerint a telekre csak olyan ház építhető, amelynek alapterülete nem haladja meg a telek területének 50%-át. Megépíthetjük-e a házat? (Gerőcs, érettségi példatár)

37.(3) Ha ismert egy hegyesszögű háromszög három szöge, akkor milyen szög alatt látszanak a háromszög oldalai a) a magasságpontból, b) a körülírt kör középpontjából, c) a beírt kör középpontjából?

TÉRGEOMETRIÁHOZ

1.(2) Nevezzünk szabályos tér-*n*-szögnek egy térbeli *n*-szöget, ha minden oldala ugyanolyan hosszú, és a szögei - a szomszédos oldalak által bezárt (sík)szög - egyenlők.
Mekkorák lehetnek egy szabályos tér-5-szög szögei?
Legfeljebb mekkorák lehetnek egy szabályos tér-6-szög szögei?

2.(3) Számítsuk ki egy kocka egyik testátlója és csúcsai távolságát!

3.(3) Válasszuk ki egy kocka valamelyik csúcsát, és az abba csatlakozó élek másik végpontja által alkotott síkot. Számítsuk ki, hogy a sík milyen arányban osztja a csúcsba befutó testátlót!
(Egyáltalán, számítsunk ki ,,mindent, amit csak lehet''!)

4.(3) Mekkora szöggel kell elforgatni a kockát egy testátlója körül, hogy önmagába menjen?

5.(3) Mekkora annak az *a* oldalélű paralelepipedonnak a térfogata, aminek lapjai olyan egybevágó rombuszok, amelyeknek egyik szöge 60°-os?

9.-10. Arányok, százalék, kamatok

A Világ család összeült megbeszélni pénzügyi dolgaikat. Egyetértettek abban, hogy mind a négyen, Világ Ádám apuka, Stádi Éva anyuka, valamint a két gyerek, Ábel és Káin elmennek a bankba, ahol megbeszélik egy szakértővel, mit ajánlana nekik. Mindannyian mást és mást szerettek volna kérdezni.
A két gyerek jól emlékezett arra az esetre, amikor az első százalékszámításból írt dolgozatukat kiosztotta a tanáruk. Azt mondta: „Gyerekek, ez pocsékul sikerült. Az osztály 63%-nak egyes lett a dolgozata százalékszámításból." Káin erre hátulról közbekiabált, hogy „Nem is vagyunk annyian az osztályban!" Miután kinevetgélték magukat, alapos ismétlésbe kezdtek.

Százalékok, és társaik

1. *Hányan lehettek az osztályban, és hány tanuló dolgozata lett egyes, ha a dolgozatok 63,0%-a lett egyes, ez az érték egy tizedes jegyre kerekített, és az osztályban 20-nál több, de 30-nál kevesebb tanuló volt.*
2. *Irodalom órán is lehetett derülni. A tanáruk éppen arról mesélt, hogy egy statisztika szerint a 14 éves fiúk 57%-a és a lányok 43%-a heti egy óránál kevesebbet olvas, amikor Káin megint közbekotyogott. „Jé! Ez éppen 100%. Ezek szerint egyetlen gyerek sem olvas heti egy óránál többet!" Szegény Káint már megint kinevették a többiek. Miért?*
Nézz utána, vajon tényleg 1 : 1 a fiúk és a lányok aránya a 14 éves korosztályban?
Később sikeresen elmagyarázták a százalékszámítást Káinnak is, úgyhogy nagyon belejött.
Átnézték a matekfüzeteiket, hogy felfrissítsék emlékeiket. Ilyen feladatokat találtak benne:
3. *Egy cipő ára 14800 Ft. Ősszel a szezon kezdetén Bandi bácsi a kereskedő úgy dönt, hogy 15%-kal megemeli az árat. Mennyiért kínálják áremelés után a cipőt?*
4. *Nem nagyon vette senki a megemelt áru cipőt, ezért Bandi bácsi úgy döntött, hogy 9900 Ft-ért reklámáron fogja kínálni a hét végén.*
a) Mekkora engedményt jelent ez a 15%-kal megemelt árhoz képest?
b) Mekkora engedményt jelent ez a 14800 Ft-os eredeti árhoz képest?
c) Mennyi pénzt kellett kérnie egy évvel ezelőtt a cipőért, ha az akkor kapott pénzt évi 6%-os kamatra befektette és az volt a célja, hogy mostanra a befektetett összeg 14800 Ft legyen.
5. Később Ábel füzetében megtalálták azt a feladatot is, amit a tanár adott fel az okosabb tanulóknak. A feladat állítólag Eulertől származik és nagyon alaposan oda kell figyelni a szövegre.
Néhány kereskedőnek 8240 korona közös tőkéje van; mindegyikük negyvenszer annyi koronát ad az üzletbe, mint ahányan társultak, és az egész összeghez annyi százalékot nyernek, mint ahányan vannak. Ha a hasznot felosztják, mindegyikük tízszer annyi koronát kap, mint ahányan vannak, és még megmarad 224 korona. Számítsuk ki hányan társultak!

Anya rendrakás közben megtalálta a dédi egyik régi tankönyvét. (A 7. és a 8. példa Dr. Močnik Ferencz Számtan középtanodák számára, Budapest 1876 könyvéből származik.) Sőt egy lapon beletoldva megtalálta dédi egy későbbi feladatát is, amit érettségin tűztek ki (Az 10. feladat érettségi feladat volt a budapesti V. kerületi Állami Főreáliskolában, 1893-ban).

6. 1867-ben a csőd szélén álló orosz kormány eladta Alaszkát az amerikaiaknak. 7 200 000 dollárt fizettek, kb. 1 718 000 km^2 hideg, fagyott földért. Akkoriban mindenki hatalmas ostobaságnak vélte ezt az üzletet. Ez kb. 4,2 dolláros volt négyzetkilométerenként.

a) Ha az évenkénti átlagos pénzromlás üteme 3% lett volna, akkor mennyit érne ma a terület egy négyzetkilométere?

b) Mekkora lenne az érték 4%-os átlagos infláció esetén? Hányszoros különbséget eredményezne a végösszegben ez az egyetlen százalék változás?

7. Mily összeget kell tőkésíteni, hogy az 5½%-ra évenkint 308 frtot kamatozék?

8. Valamely 25 millió frtra rugó államadósságnak évi kamatja 1125000 frt; mily nagy a %?

9. Valaki minden év első napján 200 Ft-ot tesz letétbe 21 éven keresztül. Mekkora összeg áll rendelkezésére a 21. év végén, ha az évenkénti kamatláb az egész idő alatt 5%, és a kamatokat évenként tőkésítik?

10. Egy apa oly módon kívánja gyermekét biztosítani, hogy az 25 éves korától kezdve 15 éven át évi előleges 1500 Ft-ban részesüljön. Mekkora összeget kell evégből a gyermek születésekor a takarékba tenni, ha az összetett kamatok kamatlába 4%?

Régi emlékeiket áttekintve és felfrissítve úgy gondolták, hogy felkészültek, és elindultak a találkozóra. A bank tisztviselője, Góli Dávid, az előre megbeszélt időpontban várt rájuk.

Amíg Káin és Ábel nézelődött és a prospektusokat lapozgatta, Világ úr arról érdeklődött, hogy milyen megtakarítási formákat tudna Góli úr ajánlani.

— Nézze Világ úr. Rengeteg lehetőség van, és ez függ attól, hogy mekkora összeget kíván bankunknál elhelyezni, valamint attól is, hogy milyen időtartamra gondolt és mekkora biztonságra törekszik.

— Sajnos nem vagyunk krőzusok *(Nézz utána ki volt krőzus!)*, de van körülbelül 2000000 Ft megtakarításunk, amit szeretnénk biztos helyen tudni.

— Ekkora összeg esetén szóba jöhet egy közönséges folyószámla lekötés, vagy egy diszkont kincstárjegy, illetve ha nagyobb kockázatot is megengedne magának, akkor...

— Nem, nem, köszönöm. Csak a biztonságos verziók érdekelnének.

11.

— Rendben. Akkor a közönséges folyószámla lekötéssel kezdem, ami egy alszámlán kerül elhelyezésre. Ez jelenleg 6%-os éves kamattal történhet, minimum 3 hónapos időtartamra. Éven belül persze arányos kamatot számolunk, de ha egész évben nálunk tartja a pénzét, akkor az EBKM, azaz az egységesített betéti kamatlábmutató (*lásd:* http://www.pszaf.hu/fogyasztoknak/iranytu_jobbmenu/ebkm) is 6%. Ez 2 millió Ft-ra, 3 hónapos lekötéssel, ...

— Várjon csak, mi is a kamatszámításuk képlete?

— Az üzletszabályzatunk tartalmazza:

$$\text{aktuális kamat} = \frac{\text{betét összege} \times \text{kamatláb} \times \text{betétben töltött napok száma}}{365 \times 100}$$

Meg kell jegyeznem, hogy a kapott kamatot nem az alszámlán, hanem a folyószámlán írjuk jóvá.

(Néhány bankban a nevezőben nem 365, hanem 360 szerepel, azaz 1 évet, kamatszámítási szempontból 360 naposnak tekintenek. Ekkor a meghirdetett kamatnál az EBKM kicsivel magasabb is lehet.)

— Köszönöm. Akkor mi is ki tudjuk számítani a kamat összegét.

Számítsuk ki a március-április-május hónapra járó kamatát 2 millió forintnak, ha az EBKM 6% és nincsenek rejtett költségek.

12.

— Jól értettem, egy külön alszámlára kerül az összeg?

— Igen, épp most akartam mondani, hogy az első évben ez teljesen díjtalan. A második évtől sajnos felszámolunk havi 390 Ft számlavezetési költséget, amit az aktuális kamatból vonunk le.

— Ez azt jelenti, hogy ekkor már kisebb lesz az EBKM?

— Igen, de még így is…

— Várjon egy pillanatig! Gyerekek, gyorsan számítsátok ki mennyi kamatot kapnánk a második évben.

— Ezt így még nem tudjuk pontosan kiszámítani. Mikor terhelik a számlára a számlavezetés költségét? — kérdeztek vissza a gyerekek.
— Mindig az adott hónap utolsó napján, azaz a januári költséget 31.-én terhelik a számlára.
Számítsuk ki mennyi lenne 2000000 Ft éves kamata, ha a 6%-os névleges kamat mellett az általunk fizetendő havi 390 Ft-os számlavezetési költségeket is figyelembe vesszük. Számítsuk ki ugyanezt az értéket, ha a számlán elhelyezett összeg 1000000 Ft.
13.
— Ha jól emlékszem említette a Diszkont kincstárjegyeket is.
— Igen, ezek 3, 6 és 12 hónapos megtakarítások esetén jöhetnek szóba, és mint a nevük is mutatja, névérték alatt, diszkont áron bocsátja ki őket a Magyar Államkincstár, és garanciát vállal a névértéken történő visszavásárlásra. Természetesen bankunk is közvetítő ebben a tevékenységben, de ehhez is kell egy értékpapírszámlát nyitnia. Például a legutóbbi 3 hónapos DKJ kibocsátási ára 9821,5 Ft volt.
Számítsuk ki mennyi a hozama egy 91 napra kibocsátott 10000 Ft névértékű DKJ-nek, ha kibocsátáskori ára 9821,5 Ft volt. Milyen áron kellene kibocsátani a MÁK-nak, ha 8%-os éves hozama lenne? Merre mozdul el a 8%-os hozamú kötvény árfolyama, ha a kibocsátás után 1 hónappal 7%-ra csökkenek a hozamok?
14.
Ekkor azonban megszólalt Stádi Éva anyuka is.
— Mi lenne, ha nem takarékoskodnánk annyit, hanem vennénk egy új autót. Négymillió Ft körül már egész jó ajánlatok közül lehet válogatni. Minap a Dőzsi szomszéd is lecserélte a régi autóját, nem beszélve Habzsiékról, akiknek két új autójuk is van.
— Nagyszerű ötlet asszonyom, kapott a szón Góli Dávid, a bank képviselője. Az előbb azt említették, hogy van 2000000 Ft-juk, azaz kb. 2000000 Ft hitelre volna szükségük. Ez azt jelenti, hogy ha a 16%-os kamattal tekintjük 5 évre, akkor a havi törlesztő részlet csupán …
Számítsuk ki mennyi a havi részlete 2000000 Ft-nak évi 16%-os kamatra, havi egyenletes törlesztést feltételezve. Ábrázoljuk az egyes hónapokban befizetett törlesztő részletek kamat-tőke hányadát.
15.
— Szép, szép, talán még fizetni is tudnánk a részleteket, de a THM, azaz a teljes hiteldíj mutató (http://www.pszaf.hu/fogyasztoknak/iranytu_jobbmenu/thm) is 16%?
— Nos ... Sajnos ehhez a hitelhez tartozik egy értékbecslési díj, ami egyszeri 35000 Ft a hitel folyósítása előtt, valamint a folyósítási jutalék, ami a kért hitel 0,5%-a, de minimum 30000 Ft. Ez az önök esetében azt jelentené, hogy a THM, …
Próbáljuk meg kiszámítani 2000000 Ft hitel THM-jét, ha a kezdeti költség összesen 65000 Ft, az ügyleti kamat évi 16% és a hitel futamideje 5 év.
16.
— Anya, ne legyél ilyen mohó. Jó hogy nem rögtön egy másik lakást akarsz venni. — Korholta Világ úr a feleségét.
— Ellenkezőleg, nagyon jó ötlet uram, — vágott közbe Góli úr. Nagyszerű ajánlataink vannak lakásvásárláshoz. Például a reklámunkban is szerepel 10 millió Ft 20 éves futamidejű jelzáloghitellel, csupán12%-os kamara.
— Mennyi is lenne a havi törlesztő részlete ennek a kölcsönnek?
Számítsuk ki, mennyi lenne a havi törlesztő részlete az alábbi hitelnek:10 millió Ft 20 éves lejárattal, évi 12%-os kamatra. (Feltesszük, hogy a törlesztést a hitel felvételekor azonnal meg kell kezdenünk és első közelítésben az egyéb költségektől eltekintünk.) Az első havi törlesztésnek mekkora része a kamat és mekkora része a tőke?
— Köszönjük az ajánlatokat. Azt hiszem alaposabban meg kell fontolnunk a pénzügyeinket. — Köszönt el a Világ család.

Feladatsor csoportmunkához

(csupa KöMaL C, 2000-ből), a nehézségi szint 3-4:

ELSŐ SOROZAT

1. Igazoljuk, hogy nem létezik olyan egymást követő, pozitív páratlan számokból álló, legalább kételemű számsorozat, amelynek összege prímszám!
2. Hány különböző rácsnégyzet jelölhető ki az $n \times n$-es négyzetrácson úgy, hogy oldalai párhuzamosak legyenek a négyzetrács oldalaival?
3. Egy cipó 25%-kal kisebb tömegű, mint a kenyér, ráadásul 20%-kal drágább. Igaz viszont, hogy a cipó az utolsó morzsáig elfogy, míg a kenyér 15%-a mindig ránk szárad. Ugyanakkora fogyasztást feltételezve hány százalékkal költünk többet, ha cipót veszünk, mint ha kenyeret?
4.Keressük meg azokat a p prímeket, amelyekre a $p^2 + 11$ számnak pontosan 6 különböző pozitív osztója van!
5. Keressük meg azt a pozitív egész n számot, amelyre $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 100$!

6. Egy O középpontú, r sugarú körben az átmérőnél kisebb húr legyen AB, az AO és BO sugarak által meghatározott kisebb körcikkbe beírt kör sugara pedig ϱ. Fejezzük ki AB-t r és ϱ segítségével!
7. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$(x-2)^2 + (|x-1| + |x-3| - \tfrac{15}{4}) = \frac{65}{16}$$

8. Határozzuk meg azokat a háromjegyű prímszámokat, amelyek számjegyei szorzata 189 !

MÁSODIK SOROZAT

1. A „marslakóknál” egy év hossza 687 nap. A hónapok marslakó-emlékezet óta 26 és 29 naposak. A Mindenáron Újítók azt javasolják, hogy térjenek át 27 és 31 napos hónapokra. A Nyírbálók támogatásával ezt el is fogadják, akik azt remélik, hogy ily módon a hónapok számát (és ezáltal a béreket is) csökkenteni lehet. Nyélbe üthető-e Nyírbálók elképzelése?

2. Hány olyan 7-jegyű 9-cel osztható szám van, amelynek a tízesek helyén álló számjegye 5?

3. Egy trapéz alakú tó párhuzamos partszakaszai 200, illetve 100 méter hosszúak, a másik két partvonal hajlásszöge ezekhez 90 és 45. A tavat két őr járja körbe azonos irányban és tempóban úgy, hogy a tó kerülete mentén a két körüljárási irányban egyenlő távolságot tartanak egymástól. Mekkora a két őr legnagyobb távolsága légvonalban?
4. Adott a térben három, egy ponton átmenő, egymásra páronként merőleges egyenes. Elhelyezhető-e tetszőleges (adott) hegyes szögű háromszög úgy, hogy mind a három egyenesre essen egy-egy csúcspontja?

5. Egy mozgólépcsőn 125 lépcsőfok van. Az egyenletesen felfelé haladó mozgólépcsőn mi is elindulunk felfelé, és 45 lépcsőfok megtétele után felérünk. Legközelebb már 55 lépcsőfokot tudunk ily módon megtenni. (A mozgólépcső sebessége nem változott.) Hányszorosára sikerült növelni a sebességünket?

6. Az A egy tízmilliárd jegyű, 9-cel osztható szám. A számjegyei összege B, B számjegyei összege C, C számjegyei összege pedig D. Mekkora lehet a D?

7. Egy paralelogramma oldalai 4 és 7 egység hosszúak, átlói között 2 egység a különbség. Mekkorák az átlók?

8. Az első 539 pozitív egész szám közül kiválasztunk néhányat úgy, hogy azok összege legalább egyharmada az eredeti számok összegének. Legalább hány számot kell kiválasztanunk?