Elemi matematika 3g

Kötelező irodalom: *Vásárhelyi Éva, Koren Balázs:* Geometria tanároknak
https://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/pic/tamopgeo.pdf

Hegyvári Norbert, Hraskó András, Korándi József, Török Judit: Elemi matematika feladatgyűjtemény
https://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/elemijegyzet/elemimat_feladatgy.pdf

Ajánlott irodalom: *Török Judit, Vásárhelyi Éva:* Tanításkísérő szeminárium
https://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/pic/tamopkisszem.pdf

Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely: Matematika módszertani példatár
https://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/modjegyzet/modszertan.pdf

Fontos tudnivalók: A feladatelemzés részletes szempontrendszere és részletes elemzések megtalálhatók a honlapunkon. https://dl.dropboxusercontent.com/u/100162898/pic/feladat.pdf

Általános módszertani szempontok a kitűzött feladatok feldolgozásához:

– *A feladatok megoldásában nem csupán a megoldás megtalálása a fontos,* hanem a megoldáshoz vezető út tudatosítása annak érdekében, hogy egyrészt saját feladatmegoldó rutinunkat fejlesszük, másrészt a módszertani ismereteinket kialakítsuk, bővítsük.

– Minden feladathoz *keressünk többféle, többféle szintű megoldást* (ha lehetséges).

– Gyűjtsük össze, hogy az egyes megoldásokhoz *milyen ismeretekre van szükség,* és ezek a tanítás során mely évfolyamokon, milyen összefüggésben kerülnek elő!

– Vizsgáljuk meg a feladatoknak a *tananyaggal való kapcsolat*át (feldolgozható-e; ha igen, hol; ha nem, miért nem; milyen feladatokkal tehetjük feldolgozhatóvá; milyen feladatok megoldásához nyújthat segítséget; feladható-e házi feladatnak stb.).

– Vizsgáljuk meg, hogy összhangban állnak-e az *egyetemi szintű* megoldások az *iskolai szintű*ekkel. Keressük meg a hasonlóságot, a különbséget, és vizsgáljuk meg a különbség okát.

– A gyakorlat további célja, hogy az itt megszerzett módszertani, rendszerező ismeretek segítségével egy-egy feladatot akár „ránézésre” meg tudjunk oldani, a nehézségi szintjét el tudjuk dönteni.

Megjegyzés. A KöMaL-ban kitűzött C jelű feladatok – a szerkesztők szándéka szerint – a NAT-ban előírt tananyagra támaszkodik. Mégis, nem egy közülük nehéznek tűnik. Gondoljuk végig, miért!

Ennek a félévnek a fő témája a geometria.

A geometria feladatok megoldása során figyelnünk kell, hogy ne támaszkodjunk az ábrára, de egy jól megrajzolt ábra segít a megoldás megtalálásában. Ugyan egy vázlat, egy skicc is nyújthat segítséget, de a dinamikus számítógépes ábra (pl. GeoGebra) sokoldalúan megmutathatja az összefüggéseket.

A geometria feladatok jellegüket tekintve lehetnek: bizonyítási, szerkesztési vagy számítási feladatok.

A geometria eszközei (a bizonyítás, a szerkesztés, a számolás mellett): halmazelmélet, koordinátageometria, vektoralgebra, lineáris algebra, algebra, (komplex) aritmetika, trigonometria, analízis.

A beadandóról. A **beadandó** lényege, hogy a hallgatók tanúbizonyságot adjanak arról, hogy megértették a feladatok tanításban betöltött helyét és szerepét. Ezért a beadandó vagy egy kevésbé nyilvánvaló megoldású (pl. KöMaL) feladat részletes, a megadott szempontok szerinti elemzése, vagy egy meghatározott témához, (KöMaL) feladathoz kapcsolódó, azt előkészítő feladatsor készítése és annak elemzése.

Általános iskolás ismeretekkel megoldható feladatok

1. Egy ABC háromszög szögei rendre α, β, γ. Mekkora szöget zár be egymással

(a) az A és B csúcsokból induló szögfelezők

(b) az A és B csúcsokból induló magasságvonalak

(c) Az A csúcsból induló szögfelező és magasságvonal.

2. (a) Egy egyenlő szárú háromszög alapján felvett tetszőleges P pontból párhuzamosokat húzunk a szárakkal, amelyek a szárakat X és Y pontokban metszik. Mutassa meg, hogy $PX + PY$ nem függ a P pont megválasztásától.

(b) Egy egyenlő szárú háromszög alapjának meghosszabbításán felvett tetszőleges P pontból párhuzamosokat húzunk, amelyek a szárak egyeneseit X és Y pontokban metszik. Mutassa meg, hogy $|PX - PY|$ nem függ a P pont megválasztásától.

3. Adott a d távolság. Mi azon pontok halmaza, amelyek (a) egy félegyenestől d; (b) egy szakasztól d; (c) egy szögvonaltól d; (d) egy pontpártól d; (e) egy két félegyenesből álló alakzattól d; (f) egy két szakaszból álló alakzattól d; (g) két ponttól ugyanakkora; (h) egy ponttól és egy egyenestől ugyanakkora távolságra vannak?

4. Egy ABC háromszög AC és BC oldalára kifelé ACB' és BCA' szabályos háromszögeket rajzolunk. Mutassa meg, hogy $AA' = BB'$ és hogy ezek $60°$-os szöget zárnak be egymással.

5. Egy hatszög minden szöge $120°$. Mutassa meg, hogy két szomszédos oldal összege megegyezik a szemben fekvő szomszédos oldalak összegével.

6. Mutassa meg, hogy egy a és b oldalú paralelogramma szögfelezői téglalapot határoznak meg, amelyben az átlók hossza éppen $a - b$.

7. Egy ABC háromszög C csúcsából merőlegeseket bocsátunk az A, illetve B csúcsokból induló külső és belső szögfelezőkre. Mutassuk meg, hogy az így nyert négy merőleges talppontjai egy egyenesen vannak!

8. Egy $ABCD$ konvex négyszög belsejében felvett P pontot kössünk össze a négyszög csúcsaival.

(a) Keressük meg azt a pontot, amelyre az $AP + BP + CP + DP$ összeg minimális.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ez az összeg nagyobb a négyszög kerületének felénél.

(c) Mit lehet mondani konkáv négyszögekre?

9. Igaz-e, hogy minden konvex négyszögben van olyan oldal, amely kisebb valamelyik átlónál.

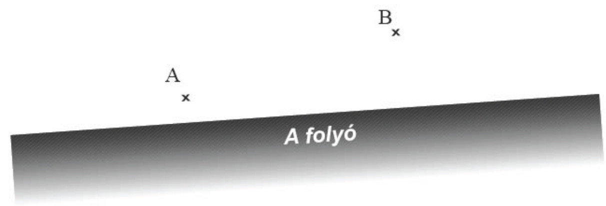
Mit lehet mondani konkáv négyszögekre?

10. (a) Mutassuk meg, hogy a háromszög bármelyik oldalához tartozó súlyvonal kisebb a másik két oldal számtani közepénél.

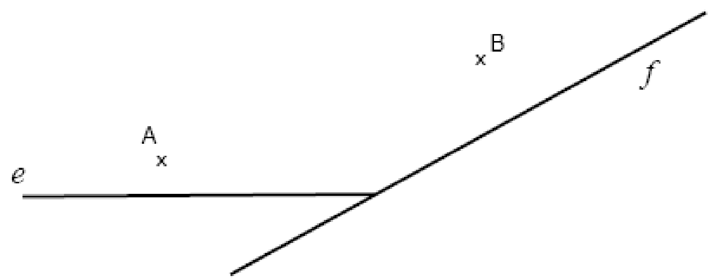
(b) A P és Q pontoknak a sík A és B pontjaitól mért távolságösszege egyenlő. Mutassuk meg, hogy a PQ szakasz felezőpontjára ez az érték kisebb.

11. Az egyik minion a Budapest térképen az A3 négyzetben van, míg egy másik a D7-ben. Ha egy négyzet 4×4 cm-es a térképen, míg a lépték $1 : 25\,000$-hez, akkor milyen tartományban mozoghat a két minion „légvonalbeli” távolsága?

12. (a) Abdul, aki meleg éghajlaton él, a tevéjével közlekedik. Tevéje, Tibi, azonban elfelejtett eleget inni, mielőtt Abbádiából Bakkarába indultak. Szerencsére van a közelben egy folyó, ami ugyan nem esik útba, de nem is nagy kitérő. Merre vigye Abdul Tibit úgy, hogy Tibi tudjon inni a folyóból, de minél rövidebb úton Bakkarába érjenek? A térkép:



(b) Abdul, aki meleg éghajlaton él, a tevéjével közlekedik. Tevéje, Tibi, azonban elfelejtett eleget inni, mielőtt Abbádiából Bakkarába indultak. Szerencsére van a közelben két folyó (f és a belé torkolló e), amik ugyan nem esnek útba, de nem is jelentenek nagy kitérőt. Merre vigye Abdul Tibit úgy, hogy Tibi mind a 2 folyóból tudjon inni, de minél rövidebb úton Bakkarába érjenek? A térkép:



(Mi van akkor, ha Abdul egyszerűen csak Abbádiából Abbádiába akar menni a lehető legrövidebb úton úgy, hogy Tibi mindkét folyó vizét megízlelje?)

(c) Egy egyenes és párhuzamos partú folyó két partján van egy-egy város, A és B.

A folyóra merőlegesen hidat épít a két város úgy, hogy a hídhoz vezető utak hossza összesen a legkisebb legyen. Hova építsék a hidat, s hova az utakat?

13. Egy kör AB átmérőjén úgy választjuk a C és D pontokat, hogy azok a kör középpontjától egyenlő távolságra legyenek. Mutassuk meg, hogy ha e két pontot a kör kerületének egy tetszés szerinti P pontjával összekötjük, akkor a $CP^2 + DP^2$ összeg állandó.

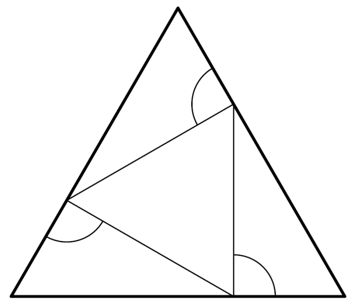
14. Bizonyítsa be, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az összes oldalai négyzetének összegével. Tehát $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$.

15. Mutassa meg, hogy egy háromszög oldalai és súlyvonalai között fennáll a következő összefüggés: $a^2 + 4s_a^2 = 2(b^2 + c^2)$.

16. Egy háromszög három oldala fölé egy-egy négyzetet szerkesztünk. A négyzetek háromszögtől különböző csúcsai egy hatszöget alkotnak. Állításunk, hogy ennek a hatszögnek minden második oldala az eredeti háromszög valamelyik súlyvonala hosszának kétszeresével egyezik meg. Miért?

17. Egy ABC háromszög oldalaira kifelé négyzeteket rajzolunk: $CBPQ$, $ACRS$, $BATU$. Igazolja, hogy a QR, ST, UP szakaszokból háromszög szerkeszthető!

18. Mutassuk meg, hogy az egyenlő oldalú háromszög oldalait három egyenlő részre osztó pontoknak az ábrán látható összekötésekor keletkező jelölt szögek derékszögek!



19. Egy négyzet átlóira a csúcsokból mérjük rá sorra a négyzet oldalait! Az így kapott pontokat kössük össze!

(a) Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett négyszög ismét négyzet!

(b) Határozzuk meg az új négyzet oldalának hosszát!

20. Írjunk négyzetbe egyenlő oldalú háromszöget, amelynek az egyik csúcsa egy négyzetcsúcsba, a másik két csúcsa a két nem ide befutó oldalra esik.

(a) Bizonyítsa be, hogy a háromszög a négyzetből két egybevágó háromszöget vág le!

(b) Szerkessze meg a négyzetbe a szabályos háromszöget!

21. Szerkessze meg a háromszöget, ha adott három oldalfelező merőlegese és az egyik oldal egy pontja!

22. Szerkesszen egy adott háromszögbe szabályos háromszöget úgy, hogy az egyik csúcsa az egyik oldal adott pontja legyen!

23. Szerkesszen paralelogrammát úgy, hogy két szomszédos csúcsa két előre kitűzött pont legyen, a másik két csúcspontja pedig egy-egy előre megadott egyenesre illeszkedjen!

24. Szerkesszen négyszöget, ha adottak a szögei és két szemközti oldala!

25. Szerkesszük meg egy háromszög egyik oldalán azt a pontot, amelyből a másik két oldalig húzott, az oldalakkal párhuzamos szakaszok összege egy adott szakasszal egyenlő!

Egy tetszőleges téglatest csúcsait az alábbiak szerint fogjuk betűzni. A csúcsok neve A, B, C, D, E, F, G és H. $ABCD$ az egyik lapja, $EFGH$ a szemközti lap úgy, hogy AE, BF, CG, DH is egy-egy él.

26. Ismerjük az $ABCDEFGH$ téglatest $EA = a$ élének, $EB = b$ lapátlójának és $EC = c$ testátlójának hosszát. Határozzuk meg a téglatest összes oldalának és lapátlójának a hosszát!

27. Egy kocka éle 2 méterrel hosszabb, mint egy másiké. Térfogatuk különbsége 26 m^2. Mekkorák az éleik?

28. Egy szabályos háromszög alapú egyenes hasáb felszíne 518,2 dm^2, magassága 22 m. Mekkora az alapéle és a térfogata?

29. Lehet-e a kocka valamely síkmetszete ötszög?

30. Adott a síkon két egyenlő hosszú szakasz: AB és CD. Hány olyan egybevágósági transzformáció van, amely AB-t CD-be viszi?

31. Legalább hány pontból áll az a T alakzat, amelynek adott T' képe egyértelműen meghatározza azt az egybevágósági transzformációt, amely T-t T'-be viszi?

32. Legyen ABC egyenlő oldalú háromszög. Jelölje a háromszög belső P pontjának a csúcsoktól mért távolságát x, y, z, az oldalaktól mért távolságát u, v, w. Igazoljuk, hogy

$$x + y + z \geq 2(u + v + w)$$

Mely P pontokra állhat fenn az egyenlőség?

33. Szét lehet-e vágni egy nem egyelő szárú háromszöget két egybevágó háromszögre?

34. Keressünk olyan testet, amelynek 7 lapja és 7 csúcsa van!

35. Igazoljuk, hogy egy tetszőleges négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg! Igaz-e torznégyszögre az állítás?

36. Mi azon pontok mértani helye a síkban (térben), amelyek egy háromszög három oldalegyenesétől egyenlő távolságra vannak?

37. (a) Igazoljuk, hogy egy háromszög egyik csúcsán átmenő, a szemközti oldalt metsző egyenesnek a háromszögbe eső szakasza rövidebb, mint a háromszög leghosszabb oldala!

(b) Igazoljuk, hogy egy háromszög kerületén felvéve két pontot, az őket összekötő szakasz hossza rövidebb, mint a háromszög leghosszabb oldala!

38. Adott az $A(a_1; a_2)$ és a $B(b_1; b_2)$ pont, az $\mathbf{a}$, A pontba, illetve a $\mathbf{b}$, B pontba mutató, valamint az $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ vektor. Határozza meg az $\mathbf{a} + \lambda\mathbf{v}$ vektort a koordinátáival!

39. Igazolja, hogy az $(1; 3)$, $(2; 8)$, $(-1; 4)$, $(4; 7)$ egy paralelogramma négy csúcsa!

40. Bizonyítsuk be, hogy ha két vektor

(a) egyenlő hosszú, akkor összegük és különbségük merőleges egymásra;

(b) összege és különbsége merőleges egymásra, akkor a két vektor egyenlő hosszú;

(c) merőleges egymásra, akkor az összegük és különbségük hossza egyenlő;

(d) összege és különbsége egyenlő hosszú, akkor a két vektor merőleges egymásra!

Keressen kapcsolatot a részfeladatok között!

41. Bizonyítsa be, hogy egy négyszög súlypontja (a súlypont koordinátái a csúcsok megfelelő koordinátáinak számtani közepe) felezi az átlók felezőpontját összekötő szakaszt!

42. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyek egy adott egyenestől való távolsága

(a) egy adott távolsággal egyenlő;

(b) egy adott távolságnál kisebb;

(c) egy adott távolságnál nagyobb,

és egy adott síkra esnek!

43. Hány részre osztja a teret a tetraéder négy lapjának síkja?

44. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, adott egyenesre merőleges egyenesek mértani helyét.

45. Keressünk adott ponton átmenő, két adott síkra merőleges síkot!

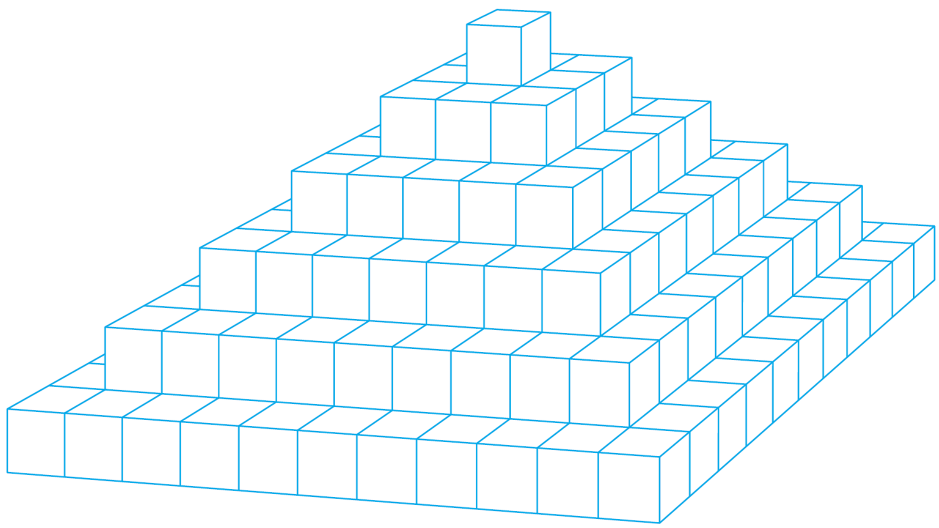
46. Bizonyítsuk be, hogy a szabályos tetraédert lehet négyzetben metszeni!

47. (Hajdu tkv. 5.) Egységkockákból építettük föl az ábrán látható lépcsős piramist.

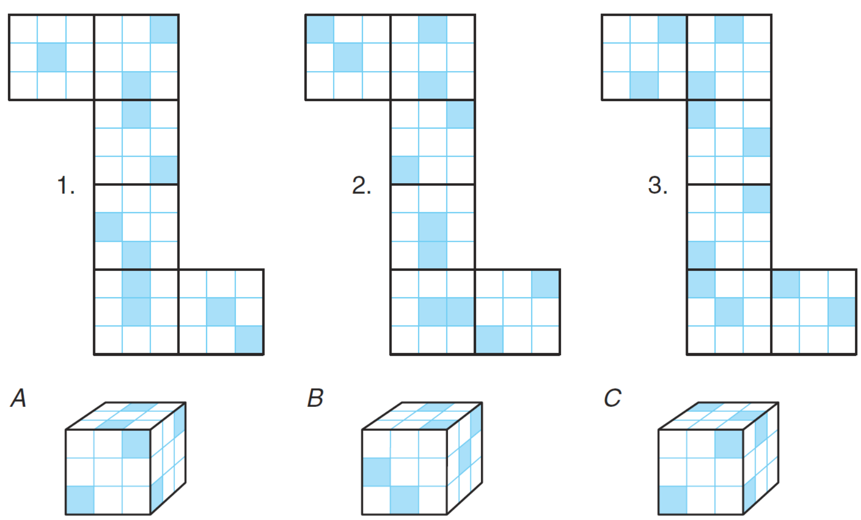
(a) Ábrázold a testet fölülről, illetve oldalról nézve!

(b) Számítsd ki a felszínét! Ésszerűsítsd a számítást!

(c) Számítsd ki a test térfogatát!



48. (Andrásfai: Versenymatek) Melyik háló melyik kockáé?



49. (Apáczai tkv. 8.) Egy a oldalélű kocka minden lapjára kifelé olyan egyenlő oldalélű gúlákat illesztünk, amelyeknek magassága a kocka élének a fele.

(a) Milyen lapjai lesznek az így kapott testnek?

(b) Konvex vagy konkáv testet kapunk?

(c) Hány éle, hány lapja és hány csúcsa lesz az új testnek?

50. (Apáczai tkv. 8.) Két egybevágó, négyzet alapú gúlát alapjuknál összeragasztunk. A gúlák minden éle 10 cm. Milyen lapok határolják a testet? Mekkora a térfogata?

Középiskolás ismeretekkel megoldható feladatok

51. Egy $ABCD$ rombusz AB oldalát rögzítjük, az A csúcsnál levő szögét 0-tól 180 fokig változtatjuk. Mi lesz az átlók metszéspontjának a halmaza?

52. Egy trapéz hosszabbik alapja a, rövidebbik alapja b hosszúságú. Szárai derékszöget zárnak be egymással. Mutassa meg, hogy az alapok felezőpontját összekötő szakasz hossza $(a-b)/2$.

53. Egy ABC háromszögnek adott az AB oldala, valamint tudjuk, hogy a háromszög A, illetve B csúcsából induló szögfelezők 120°-os szöget zárnak be egymással. Szerkesztendő a háromszög körülírt köre!

54. Mutassa meg, hogy a háromszög ugyanazon oldalhoz tartozó szakaszfelező merőlegese és szögfelezője a körülírt körön metszi egymást.

55. Az ABC szabályos háromszög körülírt körén felveszünk egy D pontot a C-t nem tartalmazó AB köríven. Mutassa meg, hogy $DC = DA + DB$!

56. Szerkesztendő a háromszög, ha adott az oldalak, szögek, magasságok és súlyvonalak közül három adat.

57. Mutassa meg, hogy egy háromszögben

(a) a középvonalak által alkotott háromszög súlypontja megegyezik az eredeti háromszög súlypontjával,

(b) a középvonalak által alkotott háromszög magasságpontja megegyezik az eredeti háromszög körülírt körének középpontjával,

(c) hozzáírt köreinek középpontjai által alkotott háromszög magasságpontja megegyezik az eredeti háromszög beírt körének középpontjával.

58. (a) Ha egy hegyesszögű háromszögben összekötjük a magasságtalppontokat, középen a talpponti háromszöget kapjuk, és a csúcsoknál még három darab háromszög keletkezik. Mutassuk meg, hogy a csúcsoknál keletkező háromszögek hasonlók az eredeti háromszöghöz.

(b) Bizonyítsuk be, hogy a talpponti háromszög beírt körének középpontja megegyezik az eredeti háromszög magasságpontjával.

59. Bizonyítsa be, hogy a háromszög szögfelezőjét a szögfelezők metszéspontja a következő arányban osztja: a csúcs melletti rész úgy aránylik a másik részhez, mint a szögfelezőt közrefogó két oldal összege a harmadik oldalhoz.

60. Két, egymástól 90 km-re lévő adótorony hatósugara 75, illetve 60 km. A két tornyot összekötő szakaszra merőlegesen a nagyobb hatósugarútól 60 km-re halad egy egyenes út.

(a) Vegyen fel egy koordináta-rendszert úgy, hogy az egyik adó legyen a kezdőpont, s ebben adja meg a másik adó koordinátáit, illetve az út egyenletét!

(b) Határozza meg az út azon szakaszát, ahol mindkét adó fogható!

(c) Hol nem fogható egyáltalán adás?

61. Egy körív alakú hidat helyezzen el úgy egy koordináta-rendszerben, hogy a híd legmagasabb pontja legyen a rendszer középpontja, és a híd útteste az x tengellyel párhuzamos legyen!

Mi lesz az ív egyenlete, ha a hídfők távolsága 100 méter, és a híd legmagasabb pontja a hídfőkhöz képest 5 méterrel magasabban van?

62. (a) Adja meg az $A = (2; 1)$, $B = (0; 4)$ és $C = (-5; -2)$ pontok által meghatározott háromszög súlypontjának koordinátáit!

(b) Adja meg az ABC köré írt kör középpontjának koordinátáit!

(c) Adja meg ABC magasságpontjának koordinátáit!

63. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő!

64. (a) Egy paralelogramma A csúcsából induló két élvektorát jelölje $\mathbf{a}$, illetve $\mathbf{b}$. Hogyan határozható ezekkel a paralelogramma A csúcsából az átlói felezőpontjába mutató vektor?

(b) Egy $ABCD$ trapéz $a = AB$ és $c = CD$ párhuzamos oldalpárjára $|c| = |a|/2$. Legyen továbbá $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$. Írjuk fel ezekkel a vektorokkal az A csúcsból az átlók felezőpontjába mutató vektort.

(c) Hogyan határozható meg egy $ABCD$ általános négyszög középvonalainak metszéspontjába mutató vektor, ha a sík egy pontjából a négyszög csúcsaihoz vezető vektorok rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$?

65. Egy $ABCD$ konvex négyszögben az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadolópontját, H-t kössük össze a DC szakasz D-hez közelebbi harmadolópontjával, J-vel, valamint az AD szakasz ismét A-hoz közelebbi harmadolópontját, K-t a BC szakasz B-hez közelebbi harmadolópontjával, I-vel.

Milyen arányban osztja a HJ szakaszt az IK szakasz?

66. Jelölje az egység élhosszúságú szabályos tetraéder egy csúcsából kiinduló élvektorait $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. Mi az eredménye a következő műveleteknek:

(a) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}$ (b) $(\mathbf{a} + \mathbf{b})(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (c) $(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})(\mathbf{a} - \mathbf{c})$?

67. Mekkora az a szög, amely a mellékszögének (a) $\frac{2}{3}$-ával, (b) $\frac{3}{7}$-ével, (c) $\frac{3}{5}$-ével egyenlő? (d) $\frac{p}{q}$ részével egyenlő?

68. (a) Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszöget az átfogóhoz tartozó súlyvonal két egyenlő szárú háromszögre bontja.

(b) Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszögben az egyik szög 30°-os, akkor az ezzel szemközti befogó fele az átfogónak!

(c) Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge 15°-os, akkor az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak!

69. (a) Szerkesszünk $1 + \sqrt{5}$ hosszúságú szakaszt, ha ismert az egység hosszú szakasz!

(b) Szerkesszünk $36°$-os szöget!

(c) Szerkesszünk szabályos 10-szöget!

70. (a) Szerkesszük meg az a és b szakaszhoz, az $\sqrt{ab}$ hosszúságú szakaszt!

(b) Adott egy a és egy a^2 hosszúságú szakasz. Szerkesszünk egységnyi hosszúságú szakaszt!

(c) Megszerkeszthető-e adott a, b hosszú szakaszokból az egységnyi hosszúságú szakasz?

(d) Szerkesszünk a és b hosszúságú szakaszokat, ha adott egy $|a-b| > 0$ és egy $\sqrt{ab}$ hosszú szakasz.

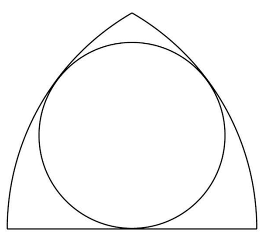
71. (a) Szerkesszünk $\sqrt[4]{17 + \sqrt{13}}$ hosszúságú szakaszt, ha ismert az egység!

(b) Szerkesszünk egység hosszú szakaszt, ha ismert a $\sqrt[4]{17 + \sqrt{13}}$ hosszúságú szakasz!

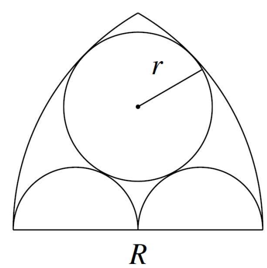
72. Szerkesszünk derékszögű háromszöget, ha ismerjük azt a két szeletet, amelyekre az egyik hegyesszög felezője vágja szét a szemközti oldalt.

73. (a) Egy gótikus ablak felső része két körívből áll. Ezek sugara egyenlő az ablak a szélességével. Mekkora annak a körnek a sugara, amely a két körívet és a vízszintes keresztfát érinti?

(b) Számítsuk ki az ábrán r-rel jelölt sugarat, ha R-et ismertnek tételezzük fel.



a)



b)

74. Legyen M az $ABCD$ húrnégyszög AC és BD átlóinak metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy

$$AM \cdot BC \cdot CD = CM \cdot AB \cdot AD.$$

75. Az $ABCD$ szimmetrikus trapéz (húrtrapéz) párhuzamos oldalai $AB = 12$, $CD = 6$, a szárak 5 hosszúak. A trapézt elvágtuk egy olyan, az AC átlóval párhuzamos egyenessel, amely felezi a trapéz területét. Hol metszi ez az egyenes a trapéz AB oldalát?

76. Az ABC háromszög AB oldalának F felezőpontján át húzzunk párhuzamost a szemközti szög szögfelezőjével! Ez az AC oldal egyenesét B'-ben, a BC oldal egyenesét A'-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy $AB' = BA'$!

77. (a) Szerkesszük meg a háromszöget, ha ismert az a oldala, a szemben fekvő α szög, valamint a beírt kör sugara!

(b) Szerkesszük meg a háromszöget, ha ismert az a oldala, a szemben fekvő α szög, valamint az a oldalhoz kívülről írt kör sugara!

78. (a) Bizonyítsuk be, hogy egy trapéz átlói a párhuzamos oldalak arányában osztják egymást!

(b) Egy trapéz párhuzamos oldalai hossza 9 és 12. Egy ezekkel párhuzamos szakasz a szárakat a hosszabb alaptól számítva $1 : 2$ arányban osztja. Milyen hosszú részekre osztja a trapéz egyik átlója ezt a szakaszt?

79. Igazoljuk, hogy a kör egy pontjának egy húr egyenesétől mért távolsága mértani közepe a húrvégpontokhoz tartozó érintőktől mért távolságoknak.

Egy tetszőleges paralelepipedon csúcsainak sztenderd betűzése a következőt fogja jelenteni. A csúcsok neve A, B, C, D, E, F, G és H. ABCD az egyik lapja, EFGH a szemközti lap úgy, hogy AE, BF, CG, DH is egy-egy él. A továbbiakban minden paralelepipedon csúcsait sztenderd betűzését fogjuk használni.

80. Adott két metsző sík és egy rájuk nem illeszkedő pont. Állítsunk a pontból a síkokra merőleges egyeneseket. Bizonyítsuk be, hogy a merőlegesek talppontját összekötő egyenes merőleges a síkok metszésvonalára!

81. Adottak a térbeli a, b, c egyenesek, valamint egy P, ezekre nem illeszkedő pont. Adjunk meg olyan síkot, amely tartalmazza a P pontot, és ugyanakkora szöget zár be az adott egyenesekkel.

82. (a) Mekkora szöget zár be a kocka két átlója?

(b) Mekkora szöget zár be a kocka testátlója egy éllel?

83. Bizonyítsuk be, hogy a téglatest testátlóinak négyzetösszege egyenlő az élek négyzetösszegével!

84. Számítsuk ki az egység élű szabályos tetraéder köré írható kör sugarát!

85. Hány fokos, testátló körüli forgatás viszi a kockát önmagába?

86. (I) (a) Válasszuk ki a sík két tetszőleges különböző egyenesét. Határozzuk meg, hogy ezeket mint tükörtengelyeket tekintve milyen transzformációt kaphatunk a két tükrözés szorzataként! (Sorrend?)

(b) Határozzuk meg a transzformációk fixpontjait, fixegyeneseit, fixköreit!

(c) Jellemezzük a transzformációk fixalakzatait!

(d) Milyen tulajdonságokat tart meg (szög, távolság, körüljárás, arány)?

(II) (a) Válasszuk ki a sík három tetszőleges, egymástól különböző egyenesét. Határozzuk meg, hogy ezeket mint tükörtengelyeket tekintve milyen transzformációt kaphatunk a három tükrözés szorzataként!

(b) Határozzuk meg a transzformációk fixpontjait, fixegyeneseit, fixköreit!

(c) Jellemezzük a transzformációk fixalakzatait!

(d) Milyen tulajdonságokat tart meg (szög, távolság, körüljárás, arány)?

87. (I) Adott az AB és CD két egyenlő hosszúságú, párhuzamos szakasz. A sík tetszőleges pontját centrálisan tükrözzük az A, majd a B pontra, illetve a C, majd a D pontra. Mi a két kapott pont viszonya?

(II) Adottak egy n-szög oldalfelező pontjai. Szerkesztendő az n-szög, ha n értéke

(a) 3, (b) 5, (c) 7, (d) 4, (e) $2k + 1$, (f) $2k$

Mi a kapcsolat az (I) résszel?

88. Egy alakzatnak van n

(a) tükörtengelye; (b) szimmetriacentruma.

Mi mondható az alakzatról szimmetria szempontból?

89. Fektessünk a tér adott P pontján át olyan egyenest, amely metszi a tér két adott egyenesét.

90. Adott a térben n egyenes, amelyek közül bármely kettő metszi egymást. Igazoljuk, hogy az egyenesek vagy mind egy síkban vannak, vagy mind egy ponton mennek át!

91. Határozzuk meg azt az e egyenest, amely az a és b kitérő egyeneseket metszi, és párhuzamos az adott c egyenessel!

92. Egy AB szakasz végpontjainak távolsága az S síktól a, illetve b. A szakasz C pontja $m : n$ arányban osztja a szakaszt. Mekkora a C pont S síktól mért távolsága?

93. (a) Egy négyszög három csúcsát rögzítve a negyedik csúcsot egy egyenesen mozgatjuk. Adjuk meg az oldalfelező pontok által meghatározott paralelogrammák középpontjának mértani helyét!

(b) Egy négyszög három csúcsát rögzítve a negyedik csúcsot egy síkon mozgatjuk. Adjuk meg az oldalfelező pontok által meghatározott paralelogrammák középpontjának mértani helyét!

94. Egy parabola keresztmetszetű tükör keresztmetszetét rajzolja le úgy egy koordináta-rendszerben az y tengelyre szimmetrikusan, hogy a parabola „fenékpontja” éppen az origóban legyen. Ekkor a tükör parabolametszete egyik szélső pontjának koordinátái $(4; 4)$.

(a) Mi a parabola egyenlete?

(b) Mi annak az 5 egység sugarú körnek az egyenlete, amely átmegy a megadott $(4; 4)$ ponton és a parabola fenékpontján?

95. Adott az $A(2; 3)$ és $B(10; 6)$ pont. Hol helyezkednek el a síkban azok a P pontok, amelyekre $|AP|^2 - |BP|^2 = 20$ teljesül?

96. Az e egyenesen felvesszük az A, B, C pontokat ebben a sorrendben. Az AB szakaszra írjuk az $ABXY$, a BC szakaszra a $BCUV$ négyzetet! Igazoljuk, hogy az AU és BY szakaszok P metszéspontja illeszkedik az e-re B-ben emelt merőlegesre!

Meghatározható-e a $BP : PX$, illetve a $BP : PV$ arány?

97. Írja fel az $(u; v)$ középpontú P ponton átmenő kör egyenletét, valamint a Q pontbeli érintőjének egyenletét!

98. Egy $10\,\text{m} \times 10\,\text{m}$-es kertben két átellenes sarokban kikötöttek egy-egy kutyát. Az egyiknek 8 méteres, a másiknak 7 méteres a póráza. Át akarok vágni a telken a másik két átellenes sarok között.

(a) Mekkora a legrövidebb útszakasz, amelyet a két kutya által közösen őrzött területen be kell járnom?

(b) Ha úgy vágok át a telken, hogy a két kutya által közösen bejárható részen a lehető legrövidebb utat tegyem meg, és a teljes út is a lehető legrövidebb legyen, akkor milyen hosszú utat kell bejárnom?

99. Az $ABCD$ négyszögben $\mathbf{a} = \overrightarrow{DC}$ és $\mathbf{b} = \overrightarrow{DC}$ vektorok egy négyszög szemközti oldalvektorai. Igazoljuk, hogy az AD oldal F_1 és BC oldal F_2 felezőpontjaira $\mathbf{k} := \overrightarrow{F_1F_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

100. Egy körben vegyünk fel három, sugár hosszúságú húrt: AB, CD, EF. Bizonyítsuk be, hogy BC, DE, FA szakaszok felezőpontjai egy szabályos háromszög csúcsai. (Segítség: Egy $\mathbf{a}$ vektor 60°-os, illetve 120°-os elforgatottjára, $\mathbf{a}'$-re, illetve $\mathbf{a}''$-re fennáll, hogy $\mathbf{a}' = \mathbf{a}'' + \mathbf{a}$. Igazoljuk!)

101. Ismert, hogy egy konvex négyszög oldalfelezőpontjai egy paralelogrammát határoznak meg. Milyen feltételek mellett lesz ez a paralelogramma (a) rombusz; (b) téglalap; (c) négyzet?

102. Szerkesszünk paralelogrammát, ha egyik szemközti oldalpárja két adott párhuzamos egyenesen van, a másik szemközti oldalpárjának egyenesei egy-egy adott pontra illeszkednek, és adott még az egyik átló iránya!

103. Hol a hiba a következő gondolatmenetben? Vegyük fel a síkon az A, B, C, D pontokat úgy, hogy ne legyenek egy körön, továbbá, az A, B és C, D pontpárok ne legyenek párhuzamos egyeneseken. Ekkor az AB felező merőlegese és CD felező merőlegese metszik egymást egy O pontban, de ez az O egyenlő távolságban van az A-tól és B-től – hiszen rajta van AB felező merőlegesén – és ugyanilyen oknál fogva C-től és D-től is, így O egyenlő távolságra van mind a négy ponttól, ezért van olyan O középpontú kör, amely tartalmazza a pontokat, holott ezeket úgy vettük fel, hogy ne legyenek egy körön.

104. Milyen hibába lehet beleesni a következő kérdés megválaszolásakor? Mi azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyeknek egy szög két szárától mért távolságainak különbsége egy adott szakasz hosszával egyenlő?

105. Adott két pont. Bizonyítsuk be, hogy azoknak a pontoknak a mértani helye, amelyekre e két ponttól mért távolságok aránya állandó, kör (ún. Apollonius-kör).

106. Adott a sík A és B pontja. Mi azoknak a C pontoknak a mértani helye, amelyekre $AC^2 + BC^2$ állandó érték?

107. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyek két adott síktól mért távolságainak aránya adott állandó.

108. Határozzuk meg a tér olyan pontjainak halmazát, amelyek két adott síktól mért távolságainak összege vagy különbsége adott állandó.

109. Adott egy pont és egy sík és rajta kívül két pont. Határozzuk meg az adott pontokon átmenő és a síkot érintő gömbök középpontjainak mértani helyét.

110. Határozzuk meg az olyan pontok mértani helyét, amelyekből két adott gömbhöz egyenlő hosszú érintők húzhatók.

111. Határozzuk meg egy adott ponton átmenő, adott egyenessel adott szöget bezáró egyenesek mértani helyét.

112. Igaz-e az alábbi állítás? Ha egy tetraéder szemközti élei egymásra merőlegesek, akkor bármelyik csúcspontnak a szemközti lapra eső merőleges vetülete a lap magasságpontja!

113. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder két magassága metszi egymást, akkor a másik kettő is metszi egymást!

114. Bizonyítsuk be, hogy két, egybevágó triéderrel (térszöglet) rendelkező tetraéder térfogatának aránya egyenlő a triéderekhez tartozó élek szorzatának arányával!

115. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraéderhez található olyan gömb, amely a tetraéder egyik oldalát, továbbá a három másik oldal síkját érinti. (Négy ilyen, ún. hozzáírt gömb van.)

116. Bizonyítsuk be, hogy ha a tetraéder szemközti éleinek összege mindhárom élpárra ugyanannyi, akkor a tetraédernek van érintőgömbje.

117. Bizonyítsuk be, hogy az $ABCD$ tetraéder AB élén átmenő belső lapszögfelező sík a CD élt olyan M pontban metszi, amelyre a CM és MD szakaszok aránya megegyezik az ABC és ABD háromszögek területének arányával.

118. Bizonyítsuk be, hogy ha egy tetraéder lapjai egyenlő területűek, akkor egybevágóak is.

119. Igazolja, hogy három, nem kollineáris középpontú kör hasonlósági pontjai egy egyenesen vannak.

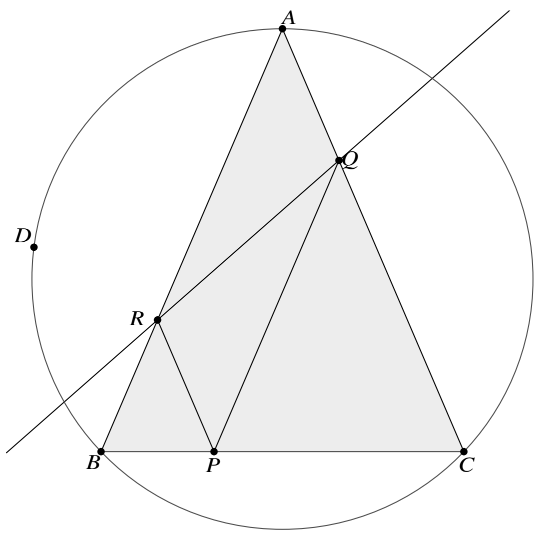
„Egy feladat több megoldása” – adalék elemzéshez

Az elemzés szempontrendszere a honlapunkon olvasható. Alaplépései vázlatosan:

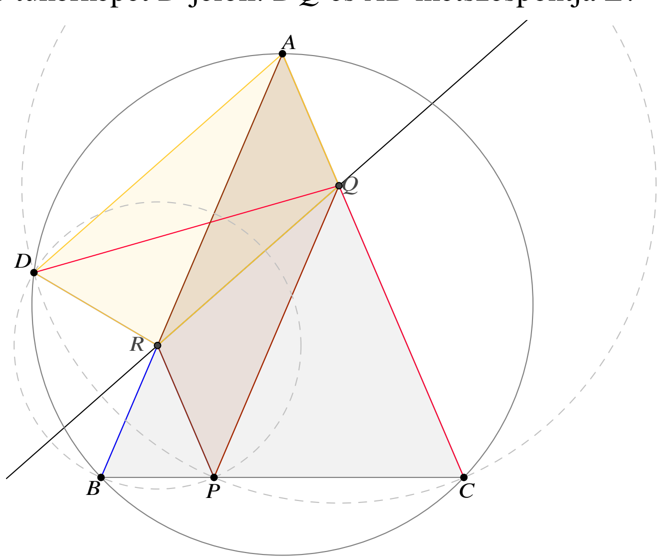
1. a feladat értelmezése; 2. a megoldás terve; 3. a terv megvalósítása; 4. reflexió.

Vizsgáljuk meg az alábbi feladatra adott megoldásokat! Gondoljuk meg, hogy melyikhez milyen megközelítéssel lehet eljutni! Állítsunk fel nehézségi sorrendet a megoldások között. Diszkutáljuk a feladatot. Vizsgáljuk meg, hogy mennyire kötődnek az ábrához a megoldások.

Feladat: Egy egyenlő szárú háromszög alapján felvett P pontból a szárakkal párhuzamost húzunk, ezek a szárakat Q és R pontban metszik. Bizonyítandó, hogy a P pontnak a QR egyenesre vonatkozó tükörképe a háromszög köré írt kör kerületén van.



1. megoldás. Az egyenlő szárú háromszög alappal szemközti csúcsát A-val, alapon lévő másik két csúcsát B-vel és C-vel jelöljük. A Q pont az AC száron, az R pont az AB száron van. A P pontnak a QR egyenesre vonatkozó tükörképét D jelöli. DQ és AB metszéspontja E.



Az A, B, C, D pontok egy körön vannak, ha

$$ABD\sphericalangle = ACD\sphericalangle.$$

Feladatunk megoldása ennek az egyenlőségnek igazolását jelenti. A szerkesztésből következik, hogy a $QPC\triangle$ és $RBP\triangle$ hasonló az $ABC\triangle$-höz. Tehát ezek is egyenlő szárúak, azaz $QC = QP$ és $RB = RP$. A tükrözés következménye, hogy $QP = QD$ és $RP = RD$. Eredményeinket összevetve $QC = QD$ és $RB = RD$, azaz a $QCD\triangle$ és $RBD\triangle$ egyenlő szárú. E két háromszög alapjánál fekvő szögek egyenlőségének bizonyítását tűztük ki éppen célunkul. Egyenlő szárú háromszögek alapjánál fekvő szögei egyenlők, ha csúcsuknál lévő szögeik egyenlők. A $QCD\triangle$ és $RBD\triangle$ csúcsánál fekvő szöge egyenlő, ha mellékszögeik egyenlők:

$$AQD\sphericalangle = ARD\sphericalangle.$$

E szögegyenlőséget kell tehát bizonyítanunk. Ezek a szögek az $AQE\triangle$-ben és a $DRE\triangle$-ben szerepelnek. E háromszögeknek E-nél lévő szögei csúcsszögek s így egyenlők. A bizonyítandó egyenlőség tehát igaz, ha a háromszögek harmadik szögei egyenlők:

$$QAR\sphericalangle QDR\sphericalangle.$$

E két szög viszont egyenlő, mert mindkettő egyenlő a $QPR\sphericalangle$-gel: az egyik tükörképe, a másik az $AQPR$ paralelogrammában vele szemközti szög.

2. megoldás. Ki kell mutatnunk, hogy az $ABCD$ négyszög húrnégyszög. Ehhez viszont elég azt belátni, hogy e négyszög szemközti szögeinek összege egyenlő, ábránk esetében:

$$A\sphericalangle + B\sphericalangle = C\sphericalangle + D\sphericalangle$$

Ugyanis e négy szög összege 360°, és így – ha az állított egyenlőség fennáll – az $ABCD$ négyszög szemközti szögeinek összege 180°, tehát e négyszög húrnégyszög.

Az egyenlő szárú $ABC\triangle$ alapjánál fekvő szögei (egyíves) egyenlők. Az első megoldásból tudjuk, hogy az $RBD\triangle$ egyenlő szárú, s így az ennek alapjánál fekvő szögek (kétíves) is egyenlők. Az $AQRD$ négyszög szimmetrikus trapéz, ugyanis átlói egyenlők: $AR = QD$ (mindkettő egyenlő a QP távolsággal, egyrészt az $AQPR$ paralelogramma szemközti oldalaiként, másrészt a tükrözés folytán), és két szemközti oldala egyenlő (az előbbi indokolás szerint mindkettő egyenlő az RP távolsággal). Az $AQRD$ szimmetrikus trapéz egyik párhuzamos oldalánál fekvő szögei (háromíves) tehát egyenlők.

Az állított szögegyenlőség mindkét oldala egy-egy egyíves, kétíves és háromíves szög összege. Ezért ez az egyenlőség valóban fennáll.

3. megoldás. Az első megoldásnál már beláttuk, hogy $QC = QP = QD$ és $RB = RP = RD$. Tehát a C, P, D pontokon áthaladó kör középpontja Q, a B, P, D pontokon áthaladó kör középpontja pedig R. E körökre alkalmazzuk a kerületi és ugyanazon íven nyugvó középponti szögek tételét. E tétel szerint:

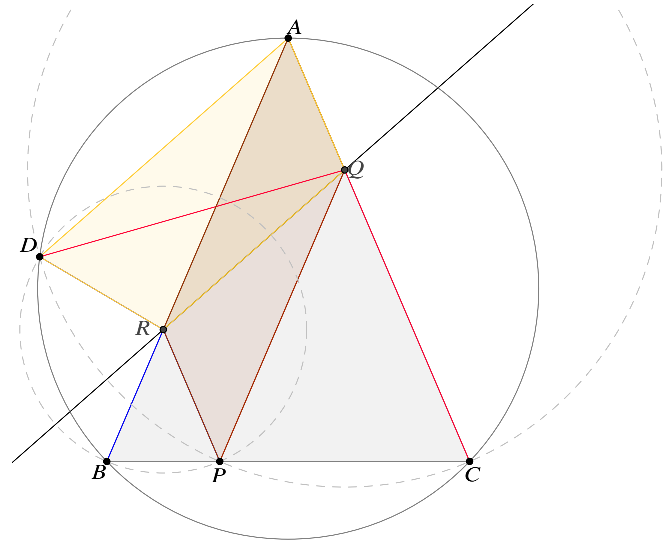
$$CDP\sphericalangle = \frac{1}{2}CQP\sphericalangle,$$
$$PDB\sphericalangle = \frac{1}{2}PRB\sphericalangle.$$

A jobb oldalakon szereplő szögek s a $CAB\sphericalangle$ egyenlők, mert száraik párhuzamosak és egyirányúak. A bal oldali szögek összege $CDB\sphericalangle$. Egyenleteink összeadásából tehát

$$CDB\sphericalangle = CAB\sphericalangle$$

adódik s így A és D ugyanazon a B és C ponton áthaladó köríven van.

4. megoldás. A második megoldásnál már beláttuk, hogy az $AQRD$ négyszög szimmetrikus trapéz. Tehát a D pont az A pontnak tükörképe a QR távolság felező merőlegesére vonatkozólag. A kör



kerületének egy pontját egy egyenesre tükrözve újból a kör kerületén lévő pontot kapunk, ha az egyenes áthalad a kör középpontján. Tehát azt kell belátnunk, hogy QR felező merőlegese áthalad az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontján.

Két pont távolságának felező merőlegese akkor halad át egy kör középpontján, ha a két pont a kör középpontjától egyenlő távolságra van. Azt kell tehát igazolnunk, hogy Q és R az $ABC\triangle$ köré írt kör O középpontjától egyenlő távolságra van.

Az $ABC\triangle$ köré írt körben, a kör középpontja körül elforgatjuk a BA húrt, amíg a (vele egyenlő hosszú) AC húrt nem fedi. E forgatás az R pontot a Q pontba viszi, hiszen $BR = AQ$, mert a szerkesztés folytán mindkettő egyenlő a PR távolsággal. A kör középpontja körül való forgatással egymásba átvihető pontok a kör középpontjától egyenlő távolságra vannak. Tehát Q és R valóban egyenlő távolságra van az $ABC\triangle$ köré írt kör középpontjától.

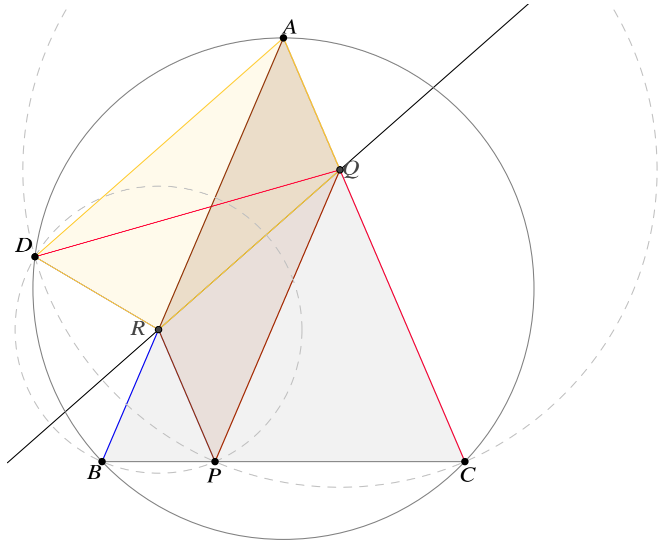
5. megoldás. Rajzoljuk meg a harmadik megoldásban már szerepelt Q középpontú kört a C, P, D pontokon át s az R középpontú kört a B, P, D pontokon át. E körök C, illetve B pontban szerkesztett érintői merőlegesek az AC, illetve AB szárra. Tehát ezek az érintők egymást az $ABC\triangle$ tükörtengelyén lévő M pontban metszik és így $MB = MC$.[1] Az M pontnak hatványa a szereplő két körre vonatkozólag MB, illetve MC négyzete. Ezek egyenlősége folytán M rajta van a két kör hatványvonalán. Ez a hatványvonal áthalad a körök metszéspontjain: a P ponton s ennek a körök középpontjait összekötő QR egyenesre vonatkozó tükörképén, a D ponton.

Tehát M, P, D egy egyenesen helyezkednek el, és a hatvány értelmezése szerint:

$$\overline{MP} \cdot \overline{MD} = \overline{MB}^2 = \overline{MC}^2.$$

Az inverzió fogalom felhasználásával megállapításunkat úgy is szövegezhetjük, hogy a D pont a P pontnak az M körül $MB = MC$ sugárral írt körre vonatkozó inverze. Minthogy P a BC egyenesen van, a D pont ennek az egyenesnek inverzén van rajta. Tudjuk, hogy egy egyenes inverze egy, az inverzió pólusán áthaladó kör. Mivel a B és C pont önmagának inverze, a BC egyenes inverze az M, B,

[1] Belátható, hogy M illeszkedik a háromszög köré írható körre. Belátható – az alábbi állításból – , hogy D is illeszkedik erre a körre. (Az állítás: Az ABC háromszög BC oldalán felvesszük az E (belső) pontot, majd az E-n átmenő, az AB, illetve az AC egyenesét B-ben, illetve C-ben érintő köröket szerkesztünk. Igazolja, hogy az érintő körök másik metszéspontja rajta van a háromszög köré írható körön!) Hogyan?



C pontokon áthaladó kör. Egy kör közös végpontú húrjainak másik végpontjában emelt merőlegesek a körön metszik egymást. Ezért az M, B, C pontokon áthaladó kör áthalad az MB és MC húrok végpontjaiban emelt merőlegesek A metszéspontján. Tehát a D pont rajta van az A, B, C pontokon áthaladó körön.