Elemi matematika 1g

1. Osztók és többszörösök

1. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, ..., 1999, 2000 számokat (az első 2000 darab pozitív egészet). Ezek közül két tetszőleges számot letöröltünk, és helyettük a különbségüket írtuk fel. Ezt az eljárást addig ismételtük, amíg egyetlen szám maradt. Meg lehet-e mondani, hogy ez páros, vagy páratlan?

Ha nem 2000-ig, hanem n-ig írtuk fel a számokat, akkor mi lesz az utolsó szám paritása?

2. Állapítsuk meg, hogy az alábbi következtetések közül melyik igaz tetszőleges x egész számra!

(a)	$(6 \mid x$ és $5 \mid x$ és $11 \mid x)$	$\Rightarrow 330 \mid x$	
(b)	$(6 \mid x$ és $20 \mid x)$	$\Rightarrow 120 \mid x$	
(c)	$13 \mid 120x$	$\Rightarrow 13 \mid x$	
(d)	$7 \mid x^2$	$\Rightarrow 7 \mid x$	$\Rightarrow 49 \mid x^2$
(e)	$15 \mid x^2$	$\Rightarrow 15 \mid x$	$\Rightarrow 225 \mid x^2$
(f)	$12 \mid x^2$	$\Rightarrow 12 \mid x$	$\Rightarrow 144 \mid x^2$
(g)	$11 \mid xyz$	$\Rightarrow (11 \mid x$ vagy $11 \mid y$ vagy $11 \mid z)$	
(h)	$15 \mid xy$	$\Rightarrow (15 \mid x$ vagy $15 \mid y)$	

3. Adjuk meg prímtényezős alakban azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyre igaz az állítás:

(a) 5-tel osztható négyzetszám
(b) 10-zel osztható négyzetszám
(c) 21-gyel osztható négyzetszám
(d) 3-mal osztható páros négyzetszám
(e) 5-tel osztható 0-ra végződő négyzetszám
(f) 12-vel osztható köbszám
(g) 27-tel és 24-gyel osztható négyzetszám
(h) páros, 3-mal osztható, de 18-cal nem osztható négyzetszám
(i) 20-szal osztható és a duplája négyzetszám

4. Ketten játszanak. Felváltva írnak be egy-egy („+” vagy „−”) műveleti jelet minden szám elé (az 1-es elé is tehetnek + vagy − előjelet) az alábbi sorban:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

(a) „Kezdő” azt szeretné, hogy a legvégül kapott előjeles összeg páros legyen, míg „Második” azt szeretné, hogy páratlan legyen. Hogyan érdemes játszani?
Kinek kedvező a játék?
(b) Mi a helyzet akkor, ha megfordítjuk a szerepeket, vagyis ha „Második” célja, hogy az összeg páros legyen?

5. Ketten játszanak. Felváltva írnak be egy-egy („+” vagy „−”) műveleti jelet minden szám elé (az 1-es elé is tehetnek + vagy − előjelet) az alábbi sorban:

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9$$

(a) „Kezdő” azt szeretné, hogy a legvégül kapott előjeles összeg osztható legyen hárommal, míg „Második” azt szeretné, hogy ne legyen osztható vele. Hogyan érdemes játszani? Kinek kedvező a játék?

(b) Mi a helyzet akkor, ha megfordítjuk a szerepeket, vagyis ha „Második” célja az összeg hárommal való oszthatósága.

6. Keressünk megfelelő m, n, k számokat, amelyekre valamennyi alábbi feltétel teljesül! ($(a; b)$ az a és b egész számok legnagyobb közös osztóját jelenti, $[a; b]$ pedig a legkisebb közös többszörösüket.)

(a) $(m; n) = 12$, $(m; k) = 80$ és $(n; k) = 77$

(b) $(m; n) = 21$ és $[m; n] = 3689$

(c) $(m; n) = 120$ és $5mn$ négyzetszám.

7. Rajzoljuk le az

(a) 2-vel, a 3-mal, a 4-gyel;

(b) 4-gyel, a 6-tal, a 12-vel;

(c) 3-mal, 4-gyel, a 6-tal;

(d) 30-cal, a 42-vel, a 70-nel, a 105-tel;

(e) 12-vel, a 10-zel, a 15-tel, 20-szal

osztható számok halmazait „optimális” Venn-diagramon, tehát a diagramon ne legyen olyan tartomány, ahová nem írható egész szám, de minden egész számot be lehessen írni egy és csakis egy tartományba.

8. (a) Hány 0-ra végződik a 100!?

(b) Mi az utolsó nem 0 számjegye a 100!-nak?

9. Hány olyan különböző számpár van, amelyeknek legnagyobb közös osztója 7, a legkisebb közös többszöröse pedig 186 340?

10. Melyik az a legnagyobb négyzetszám, amely osztója az 50!-nak?

11. (a) Hány olyan 600-nál kisebb természetes szám van, amelyik sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható?

(b) Hány olyan természetes szám van, amelyik 6000-nél kisebb és relatív prím a 6000-hez?

12. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy szám páros osztóinak összege kisebb legyen a páratlan osztók összegénél?

13. (a) Egy sorban elhelyeztünk 100 korongot, amelyek egyik fele piros, a másik kék. Kezdetben minden korongnak a piros fele van felül. Ezután első lépésben az összes korongot megfordítjuk. Második lépésben minden másodikat megfordítunk, a harmadik lépésben minden harmadikat és így tovább, a k-adik lépésben minden k-adik korongot megfordítunk, végül csak a századikat. Hány korongnak lesz végül a kék fele felül?

(b) Mi a helyzet akkor, ha minden k-adik lépésben minden k-adik korongot k-szor fordítunk meg?

14. Egy kupacban 20 szál gyufa van. Ketten felváltva vesznek el gyufákat a kupacból, egyszerre 1-et, 2-t vagy 3-at saját döntésük szerint. Az nyer, aki az utolsónak maradt gyufát vagy gyufákat veszi el.

(a) Kinek van nyerő stratégiája, a kezdőnek vagy az ellenfelének? Hogyan kell játszania, hogy nyerjen?

(b) Hogyan módosul a válasz 20 helyett más gyufaszám esetén?

(c) Elemezzük a játékot az általános esetben is, tehát amikor n számú gyufával játszanak, és 1-től m-ig tetszőleges számú gyufaszálat vehetnek el!

15. Piroska és Farkas egy hosszú táblán játszik, amelynek mezői 0-tól 100-ig vannak számozva. Kezdetben Piroska bábuja a 100-on, Farkasé a 0-n áll. A két játékos felváltva lép, Farkas mindig a nagyobb sorszámú mezők irányában 1-gyel, 2-vel vagy 3-mal teszi arrébb a bábuját, míg Piroska az ellenkező irányba lép szintén 1-et, 2-t vagy 3-at. Az nyer, aki kiüti a másik figuráját, azaz lépésével épp oda jut, ahol a másik áll. Kinek kedvező a játék, annak, aki elsőnek lép, vagy annak, aki másodiknak?

16. (a) Előáll-e a 2000 valahány (legalább kettő) egymást követő egész szám összegeként?

(b) Előáll-e a 2000 valahány (legalább kettő) egymást követő pozitív egész összegeként?

(c) A fenti [(a), (b)] esetekben hányféle előállítás van?

(d) Előáll-e a 2000 szomszédos páros természetes számok összegeként?

(e) Mi a helyzet más számokkal?

17. 1-től 10-ig a számokat számkártyákra írtuk. Szét lehet-e ezeket a kártyákat osztani 2 (3, 4, 5) dobozba úgy, hogy a számok

(a) összege, (b) szorzata

mindegyik dobozban ugyanannyi legyen?

18. Legyen n 4-gyel osztható egész, és jelentse S az $[1, n]$ intervallumba eső, n-hez relatív prímszámok összegét, T az $\left[1, \frac{n}{2}\right]$ intervallumba eső, n-hez relatív prímszámok összegét. Tehát pl. amikor $n = 4$, akkor $S = 1 + 3$; $T = 1$. Bizonyítsuk be, hogy az $\frac{S}{T}$ hányados n-től függetlenül mindig 4.

19. (a) Igaz-e, hogy 5 (nem feltétlenül különböző) egész szám közül mindig ki lehet választani hármat úgy, hogy az összegük osztható legyen 3-mal?

(b) Igaz-e, hogy 3 (nem feltétlenül különböző) egész szám közül mindig ki lehet választani valahányat úgy, hogy az összeg osztható legyen 3-mal? (Az egytagú összeget is összegnek tekintjük.)

(c) Igaz-e minden k pozitív egészre, hogy k darab szám közül mindig kiválasztható néhány, amelyek összege osztható k-val?

20. 10 db számkártyára felírtunk egyet-egyet a 0, 1, 2, 3, …, 9 számjegyek közül. Egymás mellé rakva valahány számkártyát számokat készítünk. Minden kártyát pontosan egyszer használunk fel. Lehet-e az így elkészített számok összege 100?

21. Egy adott körvonalon 44 fa helyezkedik el. Mindegyik fán ül egy majom. Adott jelre valamelyik két majom átugrik a szomszéd fára, az egyik az óramutató járásával azonos, a másik az óramutató járásával ellentétes irányba. Ilyen ugrásokkal elérhető-e, hogy minden majom ugyanazon a fán legyen?

22. A 2, 22, 222, 2222, …. Tartalmaz-e a mindig eggyel több kettes számjegyet tartalmazó számok sorozata végtelen sok

(a) hárommal; (b) héttel; (c) kilenccel; (d) 111-gyel

osztható számot?

Figyelje meg ugyanezt más számmal való oszthatóságokra is!

23. Milyen p prímszámokra igaz az, hogy akármilyen a egész szám esetén $(a+1)^2+(a+2)^2+\cdots+(a+p)^2$ osztható p-vel?

24. Legyen n pozitív egész szám és nem prímszám. Legyen p az n legkisebb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy $p > \sqrt[3]{n}$ esetén $\frac{n}{p}$ is prím!

25. Legyen a 1-nél nagyobb szám és nem egész, legyen továbbá n az a-nál kisebb pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{n}{n+1} \cdot a$ és a között van egész szám!

2. Oszthatósági szabályok

26. Tudjuk – mert valaki megmondta, akinek elhisszük –, hogy

$$35! = 10333147966386144929ab6651337523200\ldots,$$

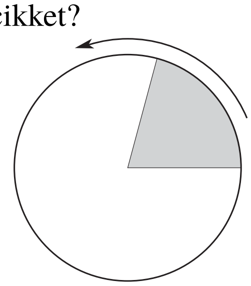
ahol a kipontozott helyen már csak 0-k állnak. Határozzuk meg az a és a b számjegyet!

27. Keressünk olyan négyzetszámot, amelyben 150 a számjegyek összege!

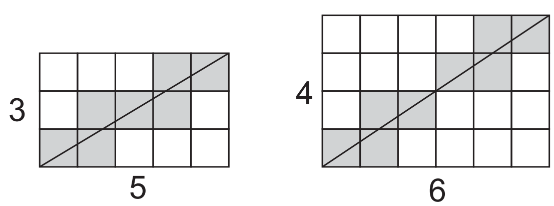
28. Adjunk meg három különböző számot úgy, hogy semelyik kettő ne legyen relatív prím, de a három szám relatív prím legyen!

Adjunk meg végtelen sok ilyen számhármast!

29. Az ábrán látható 75°-os körcikket elforgatjuk 75°-kal az óra járásával ellenkező forgásirányban. A kapott körcikket újból elforgatjuk 75°-kal stb. Hányszor kell a forgatást elvégezni, hogy az elforgatott körcikk pontosan fedje az eredeti körcikket?



30. Egy $a \times b$-s rácstéglalapnak behúzzuk az egyik átlóját, és kiszínezzük azokat a rácsnégyzeteket, amelyekbe az átló belemetsz (amelyeknek közös szakasza van az átlóval). (Lásd az ábrát!) Hány mező lesz kiszínezve?



31. Melyik a legkisebb pozitív egész szám, amely csak 0 és 1-es számjegyet tartalmaz, és osztható 792-vel?

3. Számrendszerek

32. Írjuk fel tízes számrendszerben azokat a számokat, amelyek tizenegyes számrendszerben $\overline{a0b}$, a kilences számrendszerben pedig $\overline{b0a}$ alakúak!

33. Állítsuk elő 2010-et kettes számrendszerben, azaz

$$\sum_{k=0}^{n} n_k \cdot 2^k = n_m \cdot 2^m + n_{m-1} \cdot 2^{m-1} + \ldots + n_3 \cdot 2^3 + n_2 \cdot 2^2 + n_1 \cdot 2^1 + n_0 \cdot 2^0 \tag{1}$$

alakban, ahol $m, n_0, n_1, \ldots, n_m$ egészek, m pozitív, és $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $0 \le n_k \le 1$.

34. A tízes számrendszerbeli 2010, tehát 2010_{10} nem osztható héttel.

(a) Mutassuk meg, hogy ha a számrendszer alapszáma osztható 7-tel, akkor abban a számrendszerben a 2010 alakban leírt szám is osztható 7-tel.

(b) Van-e olyan, héttel nem osztható a alap, hogy a 2010_a szám osztható 7-tel?

(c) Van-e olyan tizeneggyel nem osztható a alap, hogy a 2010_a szám osztható 11-gyel?

35. Bizonyítandó, hogy egy szám akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha utolsó számjegyének kilencszeresét levonva az utolsó számjegy levágásával keletkező (1-gyel kevesebb jegyű számból) 7-tel osztható számot kapunk.

36. Milyen maradékot ad az $125\,574\,392\,777\,540\,024\,307_{10}$ szám 2-vel, 3-mal, …, 9-cel, 10-zel osztva? Mi a helyzet 8-as, illetve 9-es számrendszerben?

37. Melyek azok a számrendszerek, amelyekben az

(a) 169; (b) 196; (c) 225

számjegysorozattal leírt szám négyzetszám?

38. Egy háromjegyű szám 100-as helyiértéken levő jegyét töröltük, majd a kapott kétjegyű számot megszoroztuk 7-tel. Eredményül az eredeti háromjegyű számot kaptuk. Mi lehetett ez a háromjegyű szám?

39. (a) Melyik az a számrendszer, amelyben a 2222 és a $0{,}201\,020\,102\,010\,201\,0\ldots$ számok szorzata egész szám?

(b) Melyik számrendszerben teljesül a

$$2010 \cdot 0{,}2222222\cdots = 2222 \cdot 0{,}201\,020\,102\,010\ldots$$

összefüggés?

40. Állítsuk elő 2010-et faktoriális számrendszerben, azaz

$$\sum_{k=0} mn_k \cdot k! = n_m \cdot m! + n_{m-1} \cdot (m-1)! + \ldots + n_3 \cdot 3! + n_2 \cdot 2! + n_1 \cdot 1! + n_0 \cdot 0! \qquad (2)$$

alakban, ahol $m, n_0, n_1, n_2, \ldots, n_m$ egészek, m pozitív, és $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ esetén $0 \le n_k \le k$.

41. Ketten a következő játékot játsszák. Két kupacban gyufaszálak vannak, az egyikben 5, a másikban 7 szál. A két játékos felváltva vesz el gyufát. Egy lépésben akárhány – de legalább egy – gyufaszál elvehető, de egyszerre csak az egyik kupacból szabad elvenni. Az nyer, aki utolára vesz el gyufát, lépése után már egyik kupacban sem marad szál. Tud-e valamelyikük úgy játszani, hogy mindenképpen nyerjen? Hogyan játsszon?

42. Ketten a következő játékot játsszák. Egy 6×8-as tábla jobb felső sarkába helyeznek egy bástyát. A két játékos felváltva lép a bástyával, mindig lefelé (akárhány mezőt), vagy balra (tetszőleges számú mezőt). Passzolni nem lehet. Az

(a) nyer; (b) veszít,

aki a bal alsó sarokba lép a bástyával. Tud-e valamelyikük úgy játszani, hogy mindenképpen nyerjen?

Hogyan játsszon?

43. Egy 6×8-as tábla jobb felső sarkában áll a királynő. Ketten a következő játékot játsszák. A két játékos felváltva lép a királynővel, mindig lefelé (akárhány mezőt), vagy balra (tetszőleges számú mezőt), vagy átlósan balra lefelé akármennyit. Az nyer, aki a bal alsó sarokba helyezi a királynőt.

Döntsük el, hogy kinek van nyerő stratégiája, Kezdőnek vagy Másodiknak?

44. (a) Bizonyítsuk be, hogy minden 6-nál nagyobb egész szám előáll *különböző* prímszámok összegeként!

(b) Tekintsük az $f_1 = 1$; $f_2 = 2$ és $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ sorozatot. (Ez a Fibonacci-sorozat, e sorozat tagjait Fibonacci-számoknak is nevezzük.) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész szám előáll *különböző* Fibonacci-számok összegeként!

(Mind az (a), mind a (b) feladatban a számokat tekinthetjük egytagú összegnek!)

4. Maradékok

45. Hat kosárban tojások voltak. Némelyikben tyúktojások, másokban kacsatojások, mindegyik kosárban csak egyféle. Az egyes kosarakban sorra 8, 13, 15, 18, 19 és 21 tojás volt. „Ha eladom ezt a kosár tojást, akkor kétszer annyi tyúktojásom marad, mint kacsatojásom.” Melyik kosárról lehet szó?

46. (a) Van-e az 59-nek olyan többszöröse, amely 4 darab 1-es számjegyre végződik?

(b) Ha igen, keressük meg a legkisebb ilyen pozitív többszöröst!

47. (a) Bizonyítsuk be, hogy öt egész szám közül ki lehet választani hármat, amelyeknek az összege osztható hárommal!

(b) Igaz-e, hogy $2n - 2$ egész szám közül ki lehet választani n-et, amelyeknek összege osztható n-nel?

48. Mutassuk meg, hogy bármely n természetes számhoz létezik olyan csak valahány egyesből, majd utána néhány 0-ból álló szám ($111\dots1100\dots0$), amely osztható n-nel.

49. Mi az utolsó számjegye a 2014^{2014}-nek?

50. Mi az utolsó számjegye a 2014^{2014}-nek hetes számrendszerben?

51. Mit ad maradékul 2015^{2016} 2017-tel osztva?

5. Egy kis algebrával

52. Gondoljunk egy 3-jegyű számra! Ha leírjuk kétszer egymás mellé, akkor egy hatjegyű számot kapunk. Osszuk el ezt a hatjegyű számot 13-mal, azután az eredményt 11-gyel, majd az így kapott eredményt 7-tel. Mit tapasztalunk? Mi a magyarázat?

53. Gondoljunk egy 3-jegyű számra! Készítsük el a fordítottját, és vonjuk ki a nem kisebből a nem nagyobbat. Az eredményhez adjunk hozzá annak fordítottját. Mit tapasztalunk különböző számokkal próbálkozva? Mi a magyarázat?

54. Bizonyítsuk be, hogy ha egy ötjegyű szám osztható 271-gyel, akkor, ha néhány számjegyet levágunk a végéről és a szám elejére tesszük, az így kapott szám is osztható lesz 271-gyel!

55. Egy 6-ra végződő, hatjegyű szám végén álló 6-os számjegyet a szám elejére rakva a kapott hatjegyű szám éppen 4-szerese az eredetinek. Mi lehet ez a szám?

56. (a) Igaz-e az az óegyiptomi észrevétel, hogy minden 0 és 1 közötti törtszám kifejezhető különböző, véges sok törzstört összegeként, ahol a törzstörtön 1 számlálójú törtet értünk?

(b) Legfeljebb hánytagú összeget kapunk, amikor ez sikerül?

(c) Mutassa meg, hogy bármely $k < n$ esetén a $\frac{k}{n}$ tört előállítható pontosan n darab különböző törzstört összegeként.

57. Van-e olyan tízes számrendszerbeli szám, amelynek középső jegyét törölve a belőle így nyert kétjegyű szám az eredetinek

(a) hetede; (b) nyolcada; (c) kilencede?

58. Jancsinak 37-et kellett volna megszoroznia egy kétjegyű számmal, amelyben a tízesek helyén álló számjegy készer akkora, mint az egyesek helyén álló számjegy. A példa leírásakor véletlenül felcserélte a szorzó két számjegyét, és így a szorzat a keresettnél 666-tal kisebb lett. Melyik számmal kellett volna szoroznia?

59. Helyezzen a számok közé (ahol szükséges) műveleti jeleket, zárójeleket úgy, hogy az eredmény 2007 legyen!

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \quad 9 = 2007$$

60. Előáll-e a 2007 két négyzetszám

(a) összegeként; (b) különbségeként?

6. Diofantikus egyenletek

61. Oresztész egy papírlapot felvágott 7 részre. Az így kapott részek közül az egyik részt felvágta 13 részre, majd a kapott részek egyikét ismét 7 részre, és így folytatta, arra sem ügyelve, hogy a 7, illetve a 13 részre vágást felváltva végezze. Bizonyos számú osztás után megszámolta a kapott részeket, és azt állította, hogy 2000 részt kapott.

(a) Lehet-e, hogy jól számolt?

(b) Milyen 2000 körüli darabszámokat kaphatott?

Milyen darabszámokat kaphat Oresztész, ha egy lépésben

(c) 7 vagy 16; (d) 7 vagy 14

részre vág?

62. Melyek azok a pozitív egész számok, amelyeknek pontosan négy (pozitív) osztója van, és az osztóik összege 108?

63. Milyen rácstéglalapokra teljesül, hogy a kerületük és területük mérőszáma megegyezik?

64. Egy téglalap alakú sütemény széle megégett. A sütit az oldalaival párhuzamos – teljesen végig érő – vágásokkal kisebb darabokra vágtuk. Azt tapasztaltuk, hogy az égett – tehát a süti széléről származó – darabok száma megegyezik az égett részt nem tartalmazó – belső – szeletek számával. Hány részre vágtuk fel a süteményt?

65. Az első Föld–Mars találkozón kiderült, hogy a marslakók lába éppen olyan, mint az embereké, de a kezek és rajtuk az ujjak száma már más. Noha a marslakók hattal többen voltak, mint a földiek, ujjaikból (a kezeket és a lábakat is figyelembe véve) összesen 1-gyel kevesebb volt. Hány résztvevője volt az első találkozónak?

66. Egy gazda házinyulakat és tyúkokat tartott. Ezeknek az állatoknak volt összesen 50 feje és 140 lába. Hány tyúkja és hány nyula volt a gazdának?

67. Egy 8 és egy 5 literes edényünk van, amelyekkel vizet merhetünk egy közeli forrásból.

(a) El tudjuk-e érni, hogy a nagyobbik edényben pontosan 7 liter víz legyen?

(b) El tudjuk-e érni, hogy pontosan 1 l, 2 l, 3 l, 4 l, illetve 6 l legyen valamelyik edényben?

7. Számhalmazok

68. Az 1-nél nem kisebb, 100-nál nem nagyobb természetes számok közül maximum hányat lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztottak közül bármelyik kettőt kiválasztva

(a) az egyik osztója legyen a másiknak?

(b) azok ne legyenek relatív prímek?

(c) egyik se legyen többszöröse a másiknak?

(d) azok relatív prímek legyenek?

69. Adott 12 darab 1200-nál nem nagyobb összetett szám. Bizonyítsuk be, hogy van kettő közöttük, amelyeknek van 1-nél nagyobb közös osztójuk!

70. Racionális vagy irracionális szám a tg $1°$?

8. Számsorozatok

71. (a) Adjuk meg az összes olyan három pozitív egész számból álló számtani sorozatot, amelynek differenciája 2, és minden eleme prím!

(b) Mi lehet a lehető legkisebb differenciája egy öt különböző pozitív prímszámból álló számtani sorozatnak?

(c) Igazoljuk, hogy ha egy számtani sorozat olyan, hogy minden tagja prímszám és 15 tagú, akkor a differenciája nagyobb 30 000-nél!

72. Bizonyítsuk be, hogy nincs csak prímszámokból álló, nem konstans végtelen számtani sorozat!

73. Igaz-e, hogy n egymást követő egész szám szorzata mindig osztható $n!$-sal?

74. Ebben a feladatban a Fibonacci-sorozatot ($f_0 = 0$, $f_1 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, ha $n > 1$) vizsgáljuk.

Hányadik helyeken vannak a

(a) kettővel; (b) hárommal; (c) tízzel

osztható számok a sorozatban?

(d) Mutassuk meg, hogy minden egész számnak van pozitív többszöröse a sorozatban!

(e) Vizsgáljuk a Fibonacci-sorozat k-val osztható elemeit! Igazoljuk, hogy ha az $F_0 = 0$-tól különböző legkisebb ilyen elem az F_m, akkor $k \mid F_n \Leftrightarrow m \mid n$!

(f) Mutassuk meg, hogy $(F_a, F_b) = F_{(a,b)}$. Például $F_8 = 21$, $F_{12} = 144$, ahol $(8; 12) = 4$, $(21; 144) = 3$, és valóban: $F_4 = 3$.

75. Tekintsünk egy természetes számokból álló növekvő számtani sorozatot.

Bizonyítsuk be, hogy bármely k-ra van e sorozatnak k egymást követő tagja, amelyik összetett szám!

76. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan különböző természetes számokból álló számtani sorozat, amelynek minden eleme hatványszám (azaz n^k, $k \geq 2$ alakú)!

77. Rögzíteni szeretnénk a függönyt a karnisra. Az egyenlő távolságokat úgy biztosítjuk, hogy két felcsíptetett csipesz közé a maradék részben pontosan középre is beteszünk egyet. (A felrakást a függöny két szélén kezdjük.) Hány csipeszre lehet szükségünk?

78. Fölírtuk sorban a táblára a természetes számokat 1-től 2010-ig. Először letöröljük a páratlan számokat. Ezután a megmaradtak közül letöröljük a páros helyen álló számokat, majd a megmaradtak közül újból a páratlan helyeken állókat töröljük le. Így haladunk tovább, amíg csak egyetlen szám nem marad. Melyik lesz ez a szám?

79. Felosztható-e 2010 darab (n darab)

(a) négyzetre egy négyzet?
(b) derékszögű háromszögre egy tetszőleges háromszög?
(c) szabályos háromszögre egy szabályos háromszög?
(d) tetszőleges háromszög hozzá hasonló háromszögekre?
(e) egyenlő szárú háromszögre egy tetszőleges háromszög?

9. Vegyes feladatok

80. Leírva a természetes számokat 1-től 2014-ig

(a) milyen számjegy áll a 2014. helyen, ha
  (i) nem hagyunk helyközt az egyes számok között,
  (ii) az egymás után következő számok között egy-egy helyköz van, amelyeket bele is számolunk a 2014 hely közé.
(b) hányat kell felhasználnunk az egyes számjegyekből?

81. Egy négyzet csúcsaiba számokat írtunk. Egy-egy alkalommal két szomszédos csúcs mindegyikében 1-gyel növeljük az ott levő számokat. Elérhető-e hogy mindegyik csúcsban ugyanaz a szám álljon, ha kezdetben

(a) az egyik csúcsban 1, a többiben 0 van?
(b) két szemközti csúcsban 1, a többiben 0 van?

82. Egy háromszög csúcsaihoz gyufákat helyeztünk. Egy lépésben bármelyik csúcstól elvehetünk néhány gyufaszálat, de ekkor a másik két csúcs mindegyikéhez kétszer annyi gyufát kell helyeznünk. Elérhető-e, hogy a három csúcsnál egyenlő számú gyufa legyen, ha kezdetben az egyes csúcsoknál

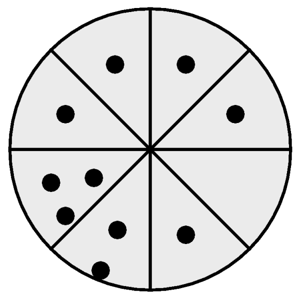
(a) 5, 11, 14; (b) 5, 9, 11

szál gyufa volt?

83. A táblára valaki felírta az 1, 2, 3, …, 20 számokat. Egy lépésben le lehet törölni két számot, ha ugyanakkor felírjuk a két letörölt szám összegének és szorzatának összegét. Így 19 lépés után már csak egy szám lesz a táblán. Mi lehet ez a szám?

84. Egy szigeten 13 szürke, 15 barna, 17 zöld kaméleon él. Ha két különböző színű kaméleon találkozik, akkor annyira megijednek egymástól, hogy mindketten a harmadik színre változtatják bőrük színét. Két azonos színű kaméleon nem ijed meg egymástól, így találkozáskor nem változtatják meg színüket. Lehetséges-e, hogy egy idő múlva minden kaméleon ugyanolyan színű legyen?

85. Egy kör alakú, nyolc részre osztott tábla hét részében kezdetben 10 kavics van (lásd az ábrát). A tábla melletti halomból ráteszünk egyszerre egy-egy kavicsot két egymás melletti részre, majd ezt többször megismételjük azért, hogy mind a nyolc részben ugyanannyi kavics legyen. Hány kavics lesz akkor a táblán, amikor mind a nyolc részben ugyanannyi lesz, és a táblán lévő kavicsok száma a lehető legkevesebb?

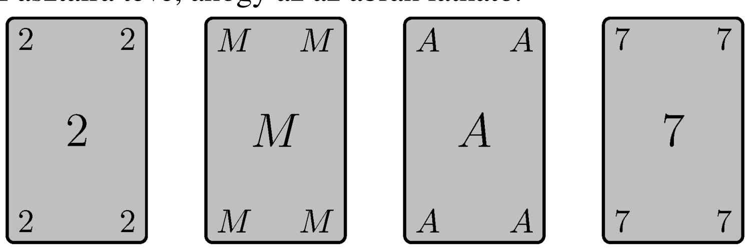


86. Az n számú $(n-1)$-elemű halmaz közül bármelyik $(n-1)$ darab halmaznak van közös eleme, de az n halmaz közös része az üres halmaz. Bizonyítsuk be, hogy ha a halmazok különbözők, akkor a halmazok uniójának pontosan n darab eleme van.

87. Egy gyalogos párhuzamosan haladva a villamossínekkel észrevette, hogy minden 12 percben megelőzi egy villamos, és minden négy percben találkozik egy szembejövő villamossal. A gyalogos is és a villamos is egyenletes sebességgel haladt. Hány perces időközben indultak ki a villamosok a végállomásról?

88. Egy egyetemi hallgató 5 tárgyból vizsgázott. Átlageredménye 3,4 volt. Semmiből nem bukott meg, nem volt egynél több kettese, és nem kapott kettőnél több azonos osztályzatot. Milyen osztályzatokat kapott?

89. Négy kártya van az asztalra téve, ahogy az az ábrán látható.



Mindegyik kártya egyik oldalán egy szám, a másik oldalán egy betű van.

Valaki ezt állítja: „Minden magánhangzó túloldalán 2010 egy osztója van”. Mely kártyákat kell megfordítani ahhoz, hogy ellenőrizzük az állítás helyességét?

90. Három dobozunk van, amelyek mindegyikében két golyó van: az egyikben két arany, a másikban két ezüst, a harmadikban egy arany és egy ezüst golyó. A dobozokon ennek megfelelően a következő feliratok vannak: AA (arany-arany), EE (ezüst-ezüst) AE (arany-ezüst). A probléma csak az, hogy egyik doboz tartalma sem felel meg a doboz feliratának.

Ki szeretnénk találni, hogy melyik doboz mit tartalmaz, de mindössze egyetlen dobozból egyetlen golyót szabad kivennünk.

Melyik dobozból válasszunk golyót, hogy ez sikerüljön?

91. (a) Anyu és Apu külön-külön Éla fülébe súgta kedvenc számát. Éla Ili fülébe súgta a hallott számok szorzatát, és Ezsőébe az összegüket. Ezután az alábbi beszélgetés hangzott el:

Ili: „Nem tudom melyik ez a két szám.”

Ezső: „Én sem tudom melyik ez a két szám.”

Ili: „Akkor én már tudom melyik ez a két szám.”

Ezső: „. . . ”

Melyik ez a két szám? Mit mondott Ezső?

(Ili, Ezső és Éla okosak, tudják is ezt egymásról, de egyikük sem hallotta, milyen számot mondott másikuknak Éla, és a fentieken kívül nem beszéltek egymással.)

(b) És ha a beszélgetés kissé hosszabb volt? Pl. mi lehetett a két szám, az alábbi beszélgetés esetén?

Ili: „Nem tudom.”

Ezső: „Én sem tudom.”

Ili: „Még most sem tudom.”

Ezső: „Akkor én már tudom!”

92. Egy papírlapon a következő állítássorozatot találjuk:

„$2 \cdot 2 = 4$.

Ezen a lapon legfeljebb 1 igaz állítás van.

Ezen a lapon legfeljebb 2 igaz állítás van.

$\vdots$

Ezen a lapon legfeljebb 10 igaz állítás van.”

Hány igaz állítás van a lapon?

93. Alice a felejtés erdejében elfelejtette, hogy a hétnek melyik napja van éppen, és nagyon szerette volna tudni. Találkozott az Oroszlánnal és az Egyszarvúval. Arra szerencsére emlékezett, hogy ezeknek a lényeknek milyen szokásai vannak: az Oroszlán mindig hazudik Hétfőn, Kedden és Szerdán, de a hét többi napjain biztosan igazat mond. Az Egyszarvú mindig hazudik Csütörtökön, Pénteken és Szombaton, a többi napokon pedig igazat mond.

Egy napon Alice találkozott az Oroszlánnal és az Egyszarvúval, akik egy fa alatt pihentek. Alice kérdésére a következőket mondták:

Oroszlán: Tegnap hazudós napom volt.

Egyszarvú: Tegnap nekem is hazudós napom volt.

Ezekből a válaszokból Alice (aki egy nagyon okos kislány), ki tudta találni, hogy milyen nap volt.

94. Három vándor az ítéletidő elől betért egy fogadóba. Hogy elüssék a várakozás idejét, kártyázni kezdtek. Megegyeztek abban, hogy a vesztes minden körben megduplázza a másik két játékos pénzét. Az első körben A, a másodikban B, a harmadikban C veszített. Ezután mindhármuknak 8 aranya volt. Hány aranya volt kezdetben az egyes játékosoknak?

95. Két kupac kavicsunk van, az egyikben 8, a másikban 10. Két játékos felváltva vesz el vagy mindkét kupacból egyet-egyet, vagy az egyik – bármelyik – kupacból egy kavicsot. Mi a nyerő stratégia, ki nyer, az Első vagy a Második, ha

(a) az nyer, aki az utolsó(ka)t húzza?

(b) az veszít, aki az utolsó(ka)t húzza?

96. Legalább hány totószelvény kitöltésével biztosítható, hogy legyen legalább 5-ös találatunk? (Úgy tekintjük, hogy a TOTÓ-n 13 mérkőzésre lehet tippelni.)

97. Van 80 golyónk, közülük 35 piros, 25 zöld, 15 sárga, 5 fekete. Legkevesebb hány darabot kell kivenni, hogy biztosan legyen köztük

(a) piros; (b) piros vagy fekete; (c) piros és fekete;

(d) két különböző színű; (e) valamelyik színből legalább három?

98. Adott 21 különböző pozitív egész szám, mindegyik kisebb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik közt van négy egyenlő!

99. (a) Egy vándor betér egy fogadóba. Nincs nála pénz, csak egy 7 cm hosszú aranyrúd. A fogadós elfogadja, hogy a vándor egy éjszakára egy darab 1 cm hosszú aranyrúddal fizet. A vándor azonban nem tudja, meddig szándékozik maradni (nyilván legfeljebb 7 napot), ezért a fogadós kiköti, hogy naponta fizessen az éjszakákért. A fogadós az addig megkapott darabokkal visszaadni is tud. Legkevesebb hány vágással oldhatják meg ezt?

(b) Variáljuk, folytassuk a fenti alapfeladatot!

100. (a) Egy másik vándor betér ugyanebbe a fogadóba, nála csak egy 7 láncszemből álló aranylánc van. (A lánc nyitott, nem záródik körbe.) A fogadós vele is megköti az üzletet: mindennap, amit ott tölt egy láncszembe fog kerülni. (Attól, hogy egy láncszemet elvág a vándor – akár töb darabra is –, az nem veszít az értékéből.) Azonban ez a vándor sem tudja, meddig szándékozik maradni (nyilván ő is legfeljebb 7 napot.) A fogadós az addig megkapott darabokkal ezúttal is visszaad.

Legkevesebb hány láncszemet kell kettévágni ahhoz, hogy a vándor mindennap ki tudja fizetni a szállását, de a lehető legkevesebb láncszemet vágják ketté?

(b) Ha 20 napig akar a vándor maradni és 20 szemből álló nyitott lánca van, akkor hányat kell vágnia?

(c) Hány napig maradhat, ha csak kettő szemet vághat el? (Mely n-re maradhat n hosszú lánccal 1-től n napig bárhány napra, ha maximum két szemet vághat ketté?)

(d) Mely n-re maradhat n hosszú lánccal 1-től n napig bárhány napra, ha maximum k szemet vághat ketté?

101. Az asztalon áll két egyforma pohár. Az egyikben (2 dl) tiszta víz, a másikban pontosan ugyanolyan mennyiségű bor van. Egy kiskanál (2 cl) bort átteszünk a másikba, jól összekeverjük, majd ugyanazzal a kiskanállal egy kiskanálnyi keveréket visszateszünk a borospohárba.

Az a kérdés, hogy a vizespohárban lesz több bor, vagy a borospohárban lesz több víz?

102. Egy vegyes erdőnek 99%-a fenyőfa. A tulajdonos ki akarja vágatni a fenyőfák egy bizonyos hányadát. A környezetvédők tiltakozó akcióba kezdnek, de a tulajdonos megnyugtatja a nagyközönséget, hogy az állományban a fenyőfák aránya még mindig 98% lesz a tervezett kivágások után.

A teljes erdőállománynak hány százalékát fogja kivágatni a tulajdonos?

103. Valaki 5 órán keresztül gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, aztán megfordult és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 km-t tett meg óránként. Mekkora utat járt be? Elegendők az adatok a megoldáshoz? Miért? Elemezze a kérdést!