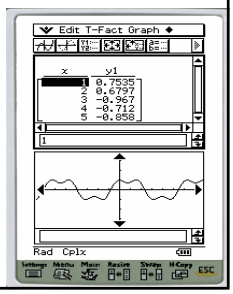
Fejtöréssel vagy gombnyomásra?

Mire (ne) használjuk a kalkulátort?

Vásárhelyi Éva, ELTE TTK
Számítógép a matematika órán 1.

Háttér



Minden nap egy kicsivel

kevesebb írásbeli osztást és kivonást végeznek az emberek.

Különösen az írásbeli osztás forog veszélyben,

- mert egy összetett lépéssorozat hibátlan és csak részben automatizált elvégzését jelenti,
- ceruzával (nem zselés rosttollal) kell végezni a műveletet, mert ha nem jól tippeltünk, akkor …
- Mi magyarok (és az osztrákok) még nehezebbé tettük annyival, hogy visszaszorzáskor a kivonandót le sem írjuk, csak a kivonás eredményét.

Ezzel ráadásul elveszítjük azt az analógiát, ami a polinommal való osztást és az írásbeli osztást összeköti.

Vagy már nincs is polinommal való osztás?

„Mesél a mikrofon”

címmel interjúsorozatot készítettem az Eötvös József Gimnázium diákjaként régi diákokkal.

Gyakran tették fel 70-80 év körüli bácsik a kérdést, hogy meg tudnám-e mutatni a négyzetgyökvonás algoritmusát, mert ők szégyenszemre elfelejtették.

Vajon mit kérdeznek majd a mai gyerekek a hatvanadik érettségi találkozón?

A prímtényezőkre bontást?

Az euklideszi algoritmust?

Az írásbeli osztást?

De hát mitől is félek én,

hiszen ott van kéznél a zsebszámológép, amely lehet sima, tudományos, programozható, grafikus, …

Vagy ha a kalkulátor mégse volna kéznél, vagy éppen nincs benne elem, akkor a mobil telefon is segít a visszajáró pénz kiszámításában.

A CAS programmal ellátott kalkulátorok tudnak közös osztót keresni, törzstényezőre bontani, egyenletet megoldani, függvényt ábrázolni, szélsőértéket számolni, ...

A számítógépről és az Internetről és az egyéb jokerekről nem is beszélve …

Lajtán innen és Lajtán túl

nem vagyok egyedül ezekkel a félelmekkel, ezzel a dilemmával.

A szülők, a tanárok, de különösen az iskolát irányító hatóságok álláspontja nagyon megosztott a szükséges számolási készséget és a segédeszközök alkalmazását illetően.

Az egyik tábor nem akarja megengedni, hogy a gombok nyomogatása „elbutítsa” a gyerekeinket,

a másik tábor elutasítja a „régimódi, lassú, pontatlan” papír-ceruzás vagy fejszámolási eljárásokat.

Kitekintés -CASIO

	Iskolai zsebszámológép SL-450, FX-992S, FX-82Solar, FX-82SX, FX-82MS, FX-820MS, FX-85MS, FX-350MS, FX-115MS, FX-991MS, FX-82ES, FX-991ES		Programozható zsebszámológép FX-3650P, FX-5500LA, FX-4500PA, FX-4800P		Grafikus kalkulátor FX-7400G Plus, CFX-9850GB Plus, FX-9750G Plus, CFX-9850GC Plus, FX 1.0 Plus		Komputer algebrai rendszerek CAS FX 2.0 Plus, ClassPad	
Hely	órán	vizsgán	órán	vizsgán	órán	vizsgán	órán	vizsgán
Baden-Württemberg	5-8	+	szakképzés	szakképzés	gimn. 3.-4. o.	gimn. 3.-4. o.	felsőbb oszt. szakképzés	felsőbb oszt. szakképzés
Bajorország	7-8	+	szakképzés	szakképzés	reálgimn.	reálgimn.	–	–
Berlin	7	+	gimn. 3.-4. o.	gimn. 3.-4. o.	+	+	+	+
Brandenburg	7	+	+	–	+	+	+	+
Bréma	7	+	+	+	+	+	+	+
Hamburg	5-7	+	+	+	+	–	+	–
Hessen	5	+	+	+	+	+	+	+
Mecklenburg	5-7	+	+	–	+	+	+	+
Alsó-Szászország	7 - 8	+	+	+	+	+	+	+
Észak-Rajna-Westfália	7	+	+	+	+	+	+	+
Rajna	7 - 8	+	+	+	+	+	+	+
Saarland	7	+	+	–	+	–	+	–
Szászország	5	+	+	+	gimnázium	gimnázium	–	–
Sachsen-Anhalt	7	+	–	–	+	–	–	–
Schleswig-Holstein	7	+	+	+	+	+	+	+
Türingia	7	+	+	–	+	–	+	+

Az érvek párbaja – a gombnyomás hatása

Pro - Freudenthal 1973:

- Katasztrófához fog vezetni, ha **a matematika órát** olyasmire **pazaroljuk**, ami néhány éven belül zsebszámológépekkel könnyebben és jobban elintézhető lesz.
- A zsebszámológép **leveszi az unalmas számolás terhét** a gyerekekről és időt hagy magasabb rendű feladatok elvégzésére.
- A kalkulátorok szolgáltatásai olyan diákoknak is **betekintést engednek a matematizálás lépéseibe**, akik saját erőből ezt nem érnék el. Pl.: Az elemi függvények grafikonját, menetét, transzformációját jól lehet a grafikus kalkulátorok segítségével tudatosítani.

Az érvek párbaja – a gombnyomás hatása

Kontra:

- A fejszámolás sok gyerek számára kihívás, sikerélmény forrása.
- A gombnyomás a melléütés, a téves leolvasás veszélyét rejti.
- A gép mellett elvész a bizonyítás igénye.
- A kalkulátorral leszoktatjuk a gyerekeket a gondolkodásról és az önálló tevékenységről, ha gombnyomásra redukálódik a problémamegoldás.
- A diákok akkor is elvesztik a számolásban szerzett gyakorlatot, ha csak összetett algebrai és analízisbeli problémák megoldásához használunk kalkulátort.

Az érvek párbaja a gombnyomás megbízhatósága

Pro: A kalkulátor teljesen korrekt megoldásokat szolgáltat.

Kontra: Van úgy, hogy a kalkulátor megoldást jelez, noha nem létezik megoldás, kihagy vagy hamisan ad meg megoldásokat. Még ha jó is az eredmény, áttekinthetetlen a megoldás menete, mert sok lépés kimarad.

Pro: Arra való a füzet meg a tábla. Ez nem zavarja az órát, sőt áttekinthetőbbé teszi: az általános eljárás a táblán, a konkrét számolás a kalkulátoron.

Kontra: Hol marad a szintézis, az összerendezés? Az $x^2 = 4$ egyenlet megoldásaként bekerül a füzetbe az $x = \pm 2$ vagy $x_1 = -2$, $x_2 = 2$ vagy $M = \{-2;2\}$. Ebből tudja a tanuló, hogy $\sqrt{x^2} = |x|$?

Pro: A hagyományos órán sem a részletesen kiírt számolástól érti meg a tanuló, hogy az $x \to \sqrt{x^2}$ és az $x \to |x|$ függvények megegyeznek.

Az érvek párbaja a gombnyomás megbízhatósága

Kontra: Azt azért meg kell beszélni, hogy az $x^2 = 4$ és az $\sqrt{x^2} = 2$ egyenleteknek ugyanazok a gyökei:
$|x| = 2 \Leftrightarrow (x = +2$ vagy $x = -2$; röviden: $x_{1,2} = \pm 2)$

Pro: Ebben nem akadályoz meg egyetlen tanárt sem a kalkulátor.

Kontra: A kalkulátor egy további lépcsőt jelent a munkában, amelynek használatát külön tanulni kell. A tanuló számára érthetetlen módon jelenik meg a megoldás. Már az előzetes beállításnál is zavart okoz, a kérdés, hogy R vagy C felett keressük a megoldást. Mit kezd egy tanuló például a cos *x* = 2 egyenlet megoldásaként kapott $x_1 = i \cdot \ln(\sqrt{3}+2)$, $x_2 = -i \cdot \ln(\sqrt{3}+2)$ $x_3 = 2\pi - i \cdot \ln(\sqrt{3}+2)$ kifejezésekkel?

Pro: Figyelni kell a beállításra, ellenőrizni kell az eredményt.

A katasztrófa jelei

Egy sportoló nyilatkozata:
„A gól 70 % -ban nekem, 40 % -ban csapattársaimnak köszönhető."

Egy eladó a „kínai piacon”:
„Egy harmad?
Nem, én legalább egy negyedet szeretnék.”

Egy sportriporter:
Kétszer volt esélye volt, hogy gólt rúgjon, egy be is ment, ezzel a csapat győzött.
Ezt nevezem az esély százszázalékos kihasználásnak.

A világ összes kalkulátora sem tud segíteni

Lichtenberg megfigyelései már nem csak megmosolyogni valók, hanem igazi katasztrófa-jelek:

Kérdés: Mennyi 8-nak a másfél harmada?

Didaktikai cél: Felismeri-e a megkérdezett, hogy másfél harmad az egy fél?

Szomorú tények

16 tanítójelöltből 10 a zsebszámológéptől kért segítséget, mindössze hárman adtak jó választ.

78 nyolcadikos diák közül 60 rosszul, vagy egyáltalán nem válaszolt.

48 másodikos gimnazistából a fele nem tudott jó választ adni.

Egy ellesett párbeszéd:

D: Mi az a másfél harmad?

T: A harmadot tudod? Hát a másfélszeresét?

D: Egy harmadnak a fele egy hatod. Ezzel az egyharmadot meg kell szorozni vagy el kell osztani?

T: Ismersz más műveletet is?

A számördög

Egy beszédes példa Hans Magnus Enzensberger: Der Zahlenteufel, (A számördög) című könyvéből

Két pék hat óra alatt 444 perecet süt. Mennyi idő kell öt péknek 888 perec elkészítéséhez?

Didaktikai cél: 1 péknek 444 perechez 12 óra, 888 perechez 24 óra kell, 5 péknek 888 perechez 24:5 = 48:10 = 4,8 óra kell.

Egy ellesett párbeszéd:

D: Ilyesmire való a kalkulátor.

T: Nincs kalkulátorod?

D: Van, csak azt nem szabad az iskolában használni.

Küzdelem a számördög ellen

Hogyan számolom ki fejben a 18·17 szorzatot?

T: 180 + 70 = 250; 8·7 = 56; összeadva 306.

D: Külön össze tetszett számolni a tízeseket és utána az egyeseket?

Megértik, Egymásnak adnak hasonló feladatokat …

Ahol a fejszámolás győz

A pozitív egész számok összege 1-től 100-ig.

A nullát is hozzávesszük, nem bántja az összeget.

0	1	2	3	…	99	100	
100	99	98	97		1	0	
100	100	100	100	100	100	100	101·100 = 10100

Az összeg 1-től 100-ig: 5050

Előbb a fejtörés, aztán a gombnyomás

(Ambrus és Hortobágyi) Igaz vagy hamis?

a) $\log_2 7 < \log_3 7$	b) $\log_2 \sqrt{2} < \log_{\sqrt{2}} 2$	c) $\log_{\frac{1}{3}} 3 < \log_{\frac{1}{2}} 3$

Azokon a kalkulátorokon, amelyeken csak tízes és természetes alapú logaritmus szerepel, előbb „beüthető” alakra kell hozni a kifejezéseket. A különböző alapú logaritmus értékekkel vagy CAS-szolgáltatással rendelkező gépeknél a közelítő értékek alapján megállapíthatjuk, hogy a) és c) hamis. Hátra marad az indoklás, hogy miért?

Például az a) eset elegáns megoldása lehet sokkal meggyőzőbb, mint bármely tiltás vagy ellenjavallat:

$\log_2 7 > \log_2 4 = 2 = \log_3 9 > \log_3 7$.

A négyzetgyök és a logaritmus fogalmának megértéséhez mindenképpen szükségesek hasonló becslések és (kézi) átalakítások.

A b) esetben az állítás igaz volta miatt kevesebb tanulóban ébreszt meggondolási igényeket, de indoklását érdemes elvégezni, mert egyszerű és alapismeretekre támaszkodik.

$\log_2 \sqrt{2} < \log_2 2 = 1 = \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} < \log_{\sqrt{2}} 2$.

Hasonlóan alapismereteken nyugszik a c) állítás cáfolata is:

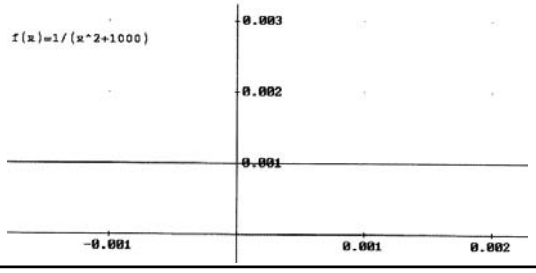
$\log_{\frac{1}{3}} 3 = -1 = \log_{\frac{1}{2}} 2 > \log_{\frac{1}{2}} 3$.

A logaritmusfüggvény monotonitását, az 1-nél nagyobb alapú növekedését és az 1-nél kisebb alapú csökkenését a grafikus kalkulátorok segítségével jól lehet rögzíteni.

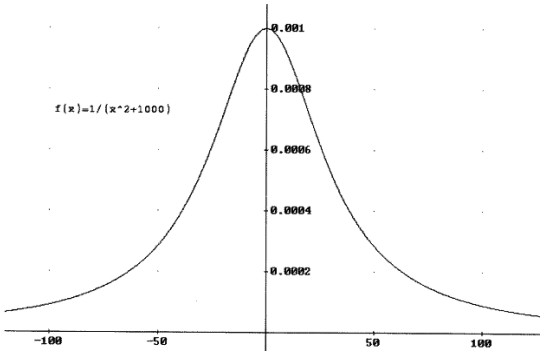
Nem hihetünk a szemünknek

Valóban konstans az f(x) = $\frac{1}{x^2+1000}$ *függvény?*

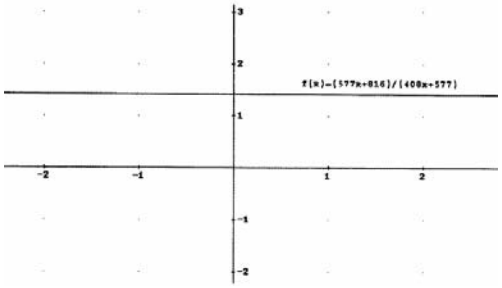
Nyilván nem az, de a szemléltetés ugye fontos, hogy is néz ki ez a függvény? Werner Blum számolt be arról, hogy 3. osztályos gimnazisták „gombnyomásra” a következő grafikont kapták és megállapították, hogy a függvény konstans.



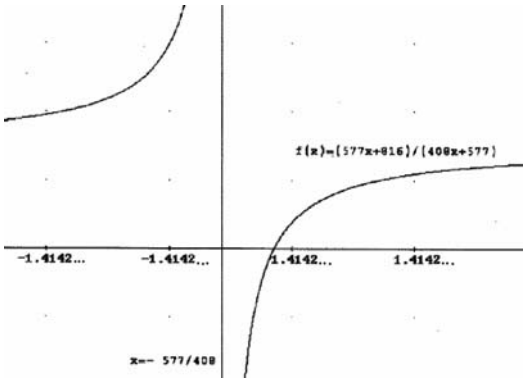
Csak egy kicsit távolabbról nézve ismerték fel a grafikon tényleges alakját.



Az f(x)= $\frac{577x+816}{408x+577}$ *függvény éppen „messziről nézve” viselkedik furcsán:*



Csak a nulla közelében sejtett rendellenességek tudatában érezzük fontosnak ezt a környéket egy kicsit jobban megnézni:



A kalkulátoros számolás korlátai ERROR

Különböző kalkulátorok más-más szinten érnek el „nagy“ számokhoz. Jó esetben hibajelzést kapunk, de az is lehet, hogy a kijelzőn megjelenik valami értelmezendő, értékelendő „eredmény”. Ilyenkor hajlamosak a diákok inkább a technikának hinni, mint kételkedni és tollat ragadni.

Számítsuk ki az a = $\frac{729^{35} - 81^{52}}{27^{69}}$ *kifejezés értékét hagyományosan és számológéppel is!*

Volt az osztályomban olyan TI és olyan Casio típus, amely 24-et jelzett ki eredményként, de számos zsebszámológép csődöt mondott, megjelent az ERROR felirat. Ez volt a szerencsénk. Se a hibajelzésnek, se a jó eredménynek nem vettem volna ennyi hasznát. Munkához láttunk. Még a leggyengébbek is gyűjtöttek egyszerű „kutatási eredményeket” – akár számológéppel:

$$27 = 3^3,\ 81 = 3^4 \text{ és } 729 = 3^6.$$

Ezeket beírtuk a formulába, használtuk a hatványozás azonosságait, kiemeltünk, egyszerűsítettünk és meghoztuk a döntést:

$$\frac{(3^6)^{35} - (3^4)^{52}}{(3^3)^{69}} = \frac{3^{210} - 3^{208}}{(3^3)^{69}} = \frac{3^{208}(3^2 - 1)}{3^{207}} = 3 \cdot 8 = 24.$$

Tesztötletek

Számítsuk ki az a = 2^n (n = 0, 1, 2, 3, ...) kifejezés értékét hagyományosan és számológéppel is!

Egészen 2^{19}-ig jó eredményt kaptunk a kalkulátorral és átadtuk a „vezetést“ a gépnek. 2^{100}-nál az eredmények közötti eltérés ($\approx 5{,}1 \cdot 10^{25}$) lett. Az ellenőrzést a „biztos“ kézi részeredménnyel való visszaosztással végezték a tanulók.

Számítsuk ki az a = $2^{30} - 2^{16} \cdot 2^{14}$ kifejezés értékét hagyományosan és számológéppel is!

Hát nem tudja a kalkulátor, hogy ez 0?

A valós számok helyett kalkulátor-számokkal számolunk, ami számos csalódás forrása lehet.

Ellenőrizhetjük a kalkulátorunkat a következő sorozat elemeinek kiszámításával: $a_1 = 1{,}000\,000\,1$, $a_n = (a_{n-1})^2$.

Hamar, 15-20 lépés után elérjük a számológép korlátait.

Kalkulátor-konvergencia - Herget

Konvergens-e az $a_n = \frac{1}{3} + \frac{(11-n)^9}{(9+n)^9}$ sorozat?

Ha csak a kalkulátor kijelzőjére hagyatkozunk, akkor a jó válasz, rossz okoskodás tipikus esetét kapjuk.

Az első 15 tag után még kétszer ugyanazt az eredményt kapjuk, és kezdik elhinni tanulók, hogy a sorozat konvergens és 0,333 333-hoz tart.

A „fejtörés” eredménye, hogy n $\to\infty$ esetén a 2. tag -1-hez tart, így $-\frac{2}{3}$ a határérték.

De hát nem is a számológép kijelzője alapján akarjuk megállapítani, hogy

$a_n = (1 + \frac{1}{n})$ tart 1-hez.

n	a_n
0	6,41960
1	1,33333
2	0,497637
3	0,359345
4	0,337138
5	0,333821
6	0,333384
7	0,333333
	...
17	0,333333
18	0,333328
1 000	-0,501781
1 000 000	- 0,666486
100000000	- 0,666666

A kalkulátor többet tud – faktorizálás …

Ez az előadás nem jött volna létre, ha nem ismernénk számolatlanul olyan eseteket, amikor a kalkulátor CAS szolgáltatása győz a kézi-fejbeni módszerekkel szemben. Ilyenek a „csúnya” vagy a nagy számokkal való müveletek is.

Hol kezdődnek a nagy számok?

Cole 1903-ban bebizonyította, hogy a 67. Mersenne-szám, az $a_{67} = 2^{67} – 1$ nem prím, hanem összetett,

$2^{67} - 1 = 193\,707\,721 \cdot 761\,838\,257\,287 = 147573952589676412 92$.

Amikor megkérdezték tőle, hogy mennyi idejébe telt ezt a felbontást megtalálni, akkor azt válaszolta, hogy három évig minden vasárnap ezt számolta.

Azóta éppen a gépi számolás segítségével átalakult a „nagy szám” fogalma, az 2005. decemberében ismert legnagyobb Mersenne prím egy 9 152 052 jegyű szám volt!

Bontsuk törzstényezőkre az a = 123 456 számot!

A megoldást jelentősen megkönnyíti, hogy a osztható hárommal. Mégis jobban járunk, ha kalkulátort használunk a felbontáshoz: $123\,456 = 2^6 \cdot 3 \cdot 643$.

Alakítsuk szorzattá az $x^4 + 4$ kifejezést!

Ez a feladat is - mint az előző - megoldható hagyományosan és kalkulátorral is.

Azt gondolom, hogy a $0 = 4x^2 - 4x^2$ „trükk” megismerése egyetlen diák személyiségében sem tesz kárt, míg elmaradása a matematizálás fontos lépéseinek (olyan kognitív stratégiák alkalmazásának, mint nézőpontváltás, átértelmezés, stb) egyszerű terepen való megismerésétől fosztja meg a diákokat:

$$x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 - 4x^2 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 =$$
$$= (x^2)^2 + 2 \cdot (x^2) \cdot 2 + 2^2 - 4x^2 =$$
$$= (x^2 + 2)^2 – (2x)^2 = (x^2+2+ 2x) \cdot (x^2+2-2x).$$

Összegzés

A hagyományos és a számológépes eljárások a matematika és a matematikadidaktika szempontjait szem előtt tartva egymás mellé illeszthetők, összehangoltan a tanulás szolgálatába állíthatók:

- Megmutatjuk, hogy mire jó és mire nem jó a kalkulátor, milyen algoritmus húzódik meg a „gombnyomás” mögött, mi várható tőle.
- Ellenőrzési módszereket mutatunk, amivel a kijelzőn megjelenő eredmény hitelességét vagy hibás voltát meg lehet állapítani.

Ez olyan lehetőségeket kínál, amelyek sem hagyományosan, sem gépesítve nem kínálkoznának:

- Fárasztó rutinszámolások görcsös végzése helyett az eljárásra, a problémamegoldás egész folyamatára koncentrálhat a tanuló. Egy kifejezés szerkezetének felismerése kerülhet a figyelem központjába.
- Az átlagos matematikai érdeklődésű tanuló is megismerhet olyan elveket, technikákat, amelyekre a segédeszköz nélkül nem jutna energiája.

fejtöréssel ÉS gombnyomással

Tanuláspszichológiai, motivációs szempontból és a probléma-megoldási készség fejlesztése érdekében is jelentős többletet jelenthet a a különböző reprezentációk párhuzamos használata, a többféle szemléltető eszközzel való kísérletezés, megfigyelés.

A matematikaoktatás hagyományos céljai, módszerei és tartalmi elemei közül néhány háttérbe szorul, vagy jelentéktelenné válik. Az alapvető számolási készség, kifejezések átalakítása, egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása nem eshet ennek a tendenciának áldozatul. Sőt, a grafikus és numerikus lehetőségeket kihasználva ezek háttere jobban megvilágítható.

Hangsúlyeltolódás várható a matematika oktatásában, gyakrabban nyúlnak diákjaink a kalkulátorhoz, még akkor is, ha (pl. fejszámolási gyakorlatokkal) küzdünk is ellene.

Amíg a MIÉRT gomb meg nem jelenik a billentyűzeten, addig a gombnyomáshoz is szükség lesz fejtörésre!

Irodalom

AMBRUS, A.&HORTOBÁGYI, L. (2000): Aufgaben zum Festigen des Funktionsbegriffs. In: Flade, L.; Herget, W. (Hrsg.): Mathematik. Lehren und Lernen nach TIMSS. Berlin: Volk und Wissen, 125-132.

BLUM, W. (2000): Perspektiven für den Analysisunterricht. In: Mathematikunterricht 46 4/5, 5-17.

BUCHBERGER, B. (2000): Computer-Algebra: Das Ende der Mathematik? In: DMV-Mitteilungen

ENZENSBERGER, H. M. (1997). Der Zahlenteufel, (A számördög) München /Wien: Hanser

FREUD. R. (2005): Tökéletes számok és Mersenne-prímek http://matek.fazekas.hu/portal/eloadas/2005/eloadas_2005_11_22_freud.html

FREUDENTHAL, H. (1973): Mathematik als pädagogische Aufgabe, Bd.1, Stuttgart: Klett, 1973

HERGET, W. (1990): Konvergenz-Experimente mit dem Computer? Mathematik lehren 39, 49-55.

KÖRNER, H. (2000): Was bleibt von Kurvendiskussionen im Zeitalter grafikfähiger Taschenrechner? In: Herget, W.; Weigand, H.-G.; Weth, T. (Hrsg.): Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht. Hildesheim / Berlin: Franzbecker, 2000, 113-121.

LEHMANN, L. (1985/86): Zu den Grundlagen des Rechnens mit Taschenrechner-Zahlen. Math. Schule 23, 24

LEHMANN, L. (1996a): Wie symmetrisch sind die sieben Grundrechenarten? Math. Schule 34

LEHMANN, L. (1996b): Zum Lösen von Gleichungen - mit Tafel und Kreide oder Computer? Math. Schule 34

LEHMANN, L. (2000): Für und Wider von Termumformungen mit einem CAS. In: Herget, W.; Weigand, H.-G.; Weth, T. (Hrsg.): Standardthemen des Mathematikunterrichts in moderner Sicht. Hildesheim / Berlin: Franzbecker

VÁSÁRHELYI, É.: Matematikadidaktikai fórum. http://Mathdid.inhun.com

WEIGAND, H.-G. (2000): Angst vor dem Computer? In: mathematik lehren 102, 4 – 8.