π értékének közelítő meghatározása, a közelítés alapja

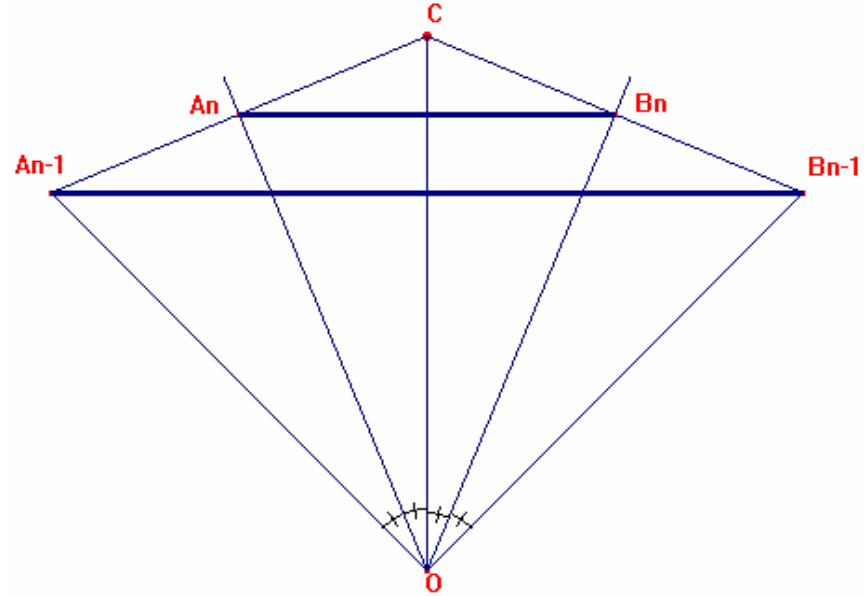
A PI szám definíció szerint az egység sugarú kör kerületének fele. (Mivel bármaly két kör hasonló és a hasonlóság aránya a körök sugarának aránya, így tetszőleges r sugarú kör kerülete 2rπ) Olyan eljárást keresünk, amely bizonyíthatóan jól közelíti értékét. Milyen kritériumoknak kell megfeleljen egy ilyen eljárás:

1. végtelen sok lépésen át folytatható kell legyen
2. az előállított számsorozat határértéke π kell legyen.

Tekintsük az első kritériumot és ellenőrizzük a következő eljárás esetében:

Vegyünk egy 2 egység kerületű négyzetet. Szerkesszük meg a vele azonos kerületű 8, majd 16, 32… (azaz az oldalszám minden lépésben megkétszereződik, míg a kerület változatlan marad) oldalú szabályos sokszöget. Nyilvánvalóan nem véges a végrehajtható lépések száma, amennyiben tudunk olyan eljárást mutatni, mely tetszőleges oldalszámú szabályos sokszögből kiindulva a vele azonos kerületű kétszeres oldalszámú szabályos sokszög szerkesztésére vezet. A körért körök sugara fogy, a beírtaké nő, határértékük közös, reciprokuk határértéke π.

Dupla oldalszámú azonos kerületű sokszög

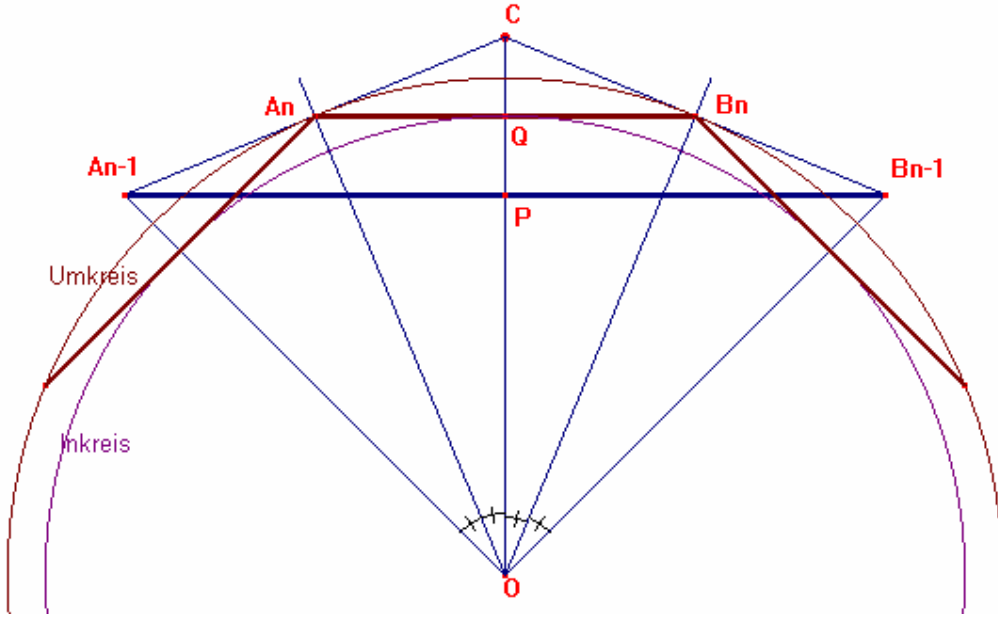


C az (n-1)-ik sokszög $A_{n-1}B_{n-1}$ oldala fölötti ív felezőpontja, O a sokszög centruma.

OA_n a COA_{n-1} háromszög szimmetriatengelye, OB_n pedig a COB_{n-1} háromszögé. Így az n-1-edik sokszög $A_{n-1}B_{n-1}$ oldalához tartozó középponti szögét 4 egyenlő részre osztottuk.

A_nB_n az $A_{n-1}B_{n-1}C$ háromszög középvonala, ezért hossza fele az $A_{n-1}B_{n-1}$ húrének.

A sokszögek beírt és köréírt köreinek sugara k_n és b_n



P a $A_{n-1}B_{n-1}$ szakasz felezőpontja, Q pedig az A_nB_n szakaszé.

A szerkesztésből adódóan

$k_{n-1} = OA_{n-1} = OC = OB_{n-1}$, $b_{n-1} = OP$ és

$k_n = OA_n = OB_n$, $b_n = OQ = \frac{1}{2} \cdot (OP + OC) = \frac{1}{2} \cdot (k_{n-1} + bi_{n-1})$.

OB_n az OA_nC háromszög egyik befogója, tehát

$k_n = OA_n = \sqrt{OQ \cdot OC} = \sqrt{k_{n-1} \cdot b_n}$.