ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ

Deák Ervin

Kísérő füzetek a „A matematika-tudomány története” c. kurzushoz

3. füzet

Kézirat, 3., átdolgozott és bővített változat

2012

Eszmetörténeti vonalak a számszerű „területmérés” fogalomkörében

Euklidész, Arkhimédész. Kepler, Cavalieri; az infinitezimálisok „továbbélése” a 17. század után. A 18. század: Euler, Lacroix, Poisson. A 19. század: Cauchy, Riemann, Weierstrass. A modern területmérés: Peano, Jordan és a terület általános fogalma. Kitekintés a modern mértékelméletre. A Bolyai−Gerwien-tétel és a szintetikus geometriai területfogalmak évezredes fogalmi diszharmóniáinak a felszámolása.

3 A. Euklidész, Arkhimédész

3.0 (a) Az eddig követett szintetikus geometriai nézőpont után most már a számszerű terület mértékgeometriai fogalomkörében fogunk haladni, bár ennek − a mai felfogásunkban − előfeltétele a valós számtest jól megalapozott fogalma[1]. (A füzet utolsó alfejezetében majd össze is kapcsolódik a két aspektus.) Magával a valós számtesttel azonban csak a következő füzetben fogunk történetileg foglalkozni.

(b) Érdekes − és a matematikatörténet mélyebb megértéséhez elengedhetetlenül szükséges tudatosítanunk −, hogy a történeti folyamatok is ilyen ellentmondásosan haladtak: A mértékgeometria − megalapozatlan − fejlesztése évezredeken át megelőzte a megbízható fogalmi alapok megteremtését.

Ebben a füzetben érzékeltetni kívánunk egy sajátosan dialektikus (ti. a belső ellentmondások által indukált) mozgást is: A megbízhatatlan fogalmi alapok fölötti analitikus (számolástechnikai, algoritmikus) fejlődés sok évszázados akkumulációja előkészítette és végül is kiváltotta önmaga ellentétének a kirobbanó uralomra jutását.

3.1 (a) A *sokszögek* körén túl a „területmérés” problematikájának legtermészetesebb konkrét terrénuma a körmérés.[2]

Nem foglalkozunk itt azokkal a görög matematikát megelőző vagy attól függetlenül fejlődő matematikai kultúrákkal, amelyekben a körterület-mérés különböző technikái lényegében fogalmi megalapozás nélkül jelentek meg. (Ennek érdekes példáival nem nehéz megismerkedni a megadott irodalomból). Ismertetésünkben a görög matematika két csomópontját állítjuk a középpontba: az Euklidész-féle *Elemek*-et és Arkhimédész munkásságának idevágó részeit. Ezek már komplex kidolgozásai a körterület-mérés témakörének, ahol lappangva jelen vannak azok az ellentmondások, amelyekre céloztunk.

(b) Az ellentmondások lényegében három forrásból fakadnak:

1. Nincs egységes szintetikus-geometriai területfogalom, mégis úgy beszélnek és dolgoznak ebben a kultúrában, mintha lenne.

2. Nincs számszerű területfogalom (nem is lehetne, hiszen nincs valós-szám-fogalom sem), mégis úgy beszélnek és dolgoznak ebben a kultúrában, mintha lenne.

3. A legnagyobb természetességgel − sokszor hallgatólagosan − használnak fel olyan egzisztencia- és ekvivalencia-garanciákat, amelyek matematikailag megalapozatlanok (és azután azok is maradnak egészen a 19. századig).

(c) A körterület-mérés problematikája két részre oszlik:

1. Különböző sugarú körök bizonyos módon elképzelt területének aránya a sugaraik négyzetének arányával kifejezve. Ezt az *Elemek* alapján ismertetjük.[3] Ebből származik a körterület $\pi \cdot r^2$ képlete (r a kör sugarának elképzelt számszerű hossza).[4]

---

[1] Ez történetileg egyáltalán nem volt mindig olyan evidencia a matematikatudományban, mint ma, és az oktatásban uralkodó közfelfogás ma is inkább ezzel szembenálló, több évezredes gondolkodási mintákat követ.

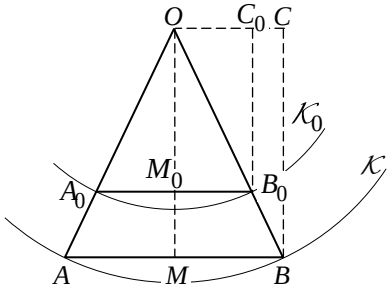
[2] A „körmérés” persze tágabb értelemben a körre vonatkozó ívhossz- és egyéb mérési problematikákat is magába foglalja, de mi ebben a füzetben − az évezredeken átívelő megismerési folyamatok bizonyos általános belső fogalmi konfliktusainak tudatosítása keretében − a területmérésre koncentrálunk. (Ez az iskolai matematikának − amelyben ezek a belső ellentmondások rögzülnek és tükröződnek − nagyon jelentős integráns része.)

[3] Euklidész ugyanezt az átmérők négyzetének az arányával fejezi ki.

2. Ezek után a π számszerű meghatározása a szükségszerűen következő fázis. Ezt pedig majd Arkhimédész körmérési munkássága példáján mutatjuk be.

3.2 (a) Az 1. feladatot az *Elemek* XII. 2. tételének bizonyítását követve oldjuk meg, de a jobb áttekintés érdekében az euklideszi bizonyítás egyes részleteit külön lemmákban tekintjük át.

(b) Tekintsünk két különböző kört: az r_0 sugarú $\mathcal{K}_0$-t és az r sugarú $\mathcal{K}$-t (3.2a ábra). Praktikus előnyökért koncentrikusan helyezzük el őket, a közös O középponttal. Illesszünk a körlemezekbe két egyenlőszárú háromszöget, OAB-t és OA_0B_0-t úgy, hogy A és B a $\mathcal{K}$-n vannak, A_0 ill. B_0 pedig $\mathcal{K}_0$ metszéspontja OA-val ill. OB-vel. Ekkor ezen háromszögek területének viszonya:

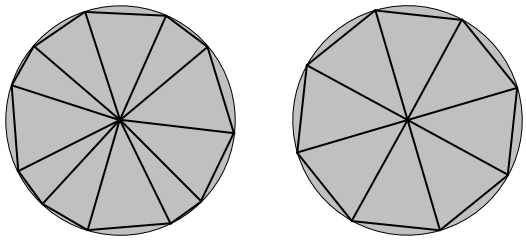


3.2a ábra

$$|OAB|:|OA_0B_0|=|OMBC|:|OM_0B_0C_0|=\frac{|BM|}{|B_0M_0|}\cdot\frac{|OM|}{|OM_0|}=\frac{r}{r_0}\cdot\frac{r}{r_0}=\frac{r^2}{r_0^2}.$$

(Itt r és r_0 a sugarak számszerű hosszát jelentik, valamely egységszakasszal mérve).

(c) Ha több ilyen egyenlőszárú-háromszög-párt tekintünk, akkor a nagyobb körhöz tartozó háromszögek együttesének területe szintén úgy aránylik a kisebbhez tartozók együttesének területéhez, mint a nagyobb sugár négyzete a kisebb sugár négyzetéhez. Így van ez akkor is, ha ezek a háromszögek együtt a körökbe írt hasonló sokszögeket alkotnak. Számítási és bizonyítási szempontból nyilván előnyösebb, ha a köröknek az ilyen „kitöltése” szabályos sokszögekkel történik (3.2b ábra); valóban, ősidők óta mind a mai napig ez a konvencionális módja a „kör-kitöltés”-nek.[5]


3.2b ábra

(d) A másik szükséges előkészület annak tisztázása, hogy „mennyire” lehet megközelíteni a körlemez területét a beírt (szabályos) sokszögek területével.[6]

---

[4] Ez a *képlet* természetesen nem szerepel az Elemekben, mint ahogyan az általunk megszokott képletnyelv helyett kizárólag verbális megfogalmazásokkal − és persze ábrákkal − folyik a kommunikáció.

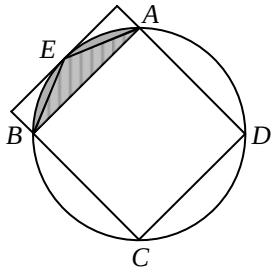
A körterület képletében lévő arányossági tényezőt egyébként a 18. század óta jelölik konvencionálisan π-vel, a görög eredetű periféria (= kerület) görög szó kezdőbetűjével. Kevéssé részletező matematika-történeti művekben gyakran Eulerre vezetik vissza ezt a konvenciót, sőt pontos évszámhoz is kötik. (Sok máig használt matematikai jelölés valóban Euler kezdeményezésének köszönhető.) Valójában azonban a π betűnek ez a használata egy William Jones nevű − a maga korában jól ismert − szerző 1706-os könyvében bukkant fel először. Maga Euler kezdetben sorozatosan a p betűt használta, azután a 40-es években megjelent műveiben egyre rendszeresebben a π-t (nem tudni, hogy Jones hatására vagy saját ötletéből). Euler a levelezésében is ezt használta, akárcsak a levelezőpartnerei. Sok ingadozás után végül a század második felében vált ez sztenderd jelöléssé.

(Ennek a jelölésnek a története beszédes példája annak, hogy a matematika történetében jóformán semmi sem olyan egyszerű, egyenes vonalú; szinte semminek sincs olyan határozott − egyetlen évszámhoz, egyetlen személyhez köthető − kezdete, ahogyan sok közkézen forgó leírás sugallja.)

[5] Az „arkhimédészi körkitöltés”-nél a még nagyobb praktikus előnyök érdekében még tovább specializáljuk a beírt sokszögeket. Ez azonban súlyosbítja a számszerű terület fogalmi problémáit, és ez egyike azoknak a belső ellentmondásoknak, amelyek sokáig fennmaradtak.

[6] Amikor Euklidész nyomán „a körlemez területének megközelítéséről” szólunk, gondolnunk kell arra is, hogy itt „a körlemez területe” definiálatlan fogalom. (L. alább 3.34(c) .)

Írjuk be egy körbe az *ABCD* négyzetet. Ez a körlemezből lefedetlenül hagy négy körszeletet. Tekintsük ezek közül a *BAE* körszeletet. Ha az *AB* körív *E* felezőpontjának felhasználásával a négyzethez csatoljuk a *BAE* háromszöget, akkor ezzel lefedjük az *AEB* körszeletnek több mint a felét (mert a háromszög kétszerese (az ábrán jelzett téglalap) nagyobb a körszeletnél[7].



3.2c ábra

Ha mármost a négyzetet ezen a módon szabályos nyolcszöggé egészítjük ki, akkor ezzel a körlemez azon részének, amely a négyzeten kívül van, több mint a felét lefedjük. Folytassuk ezt a körbe írt szabályos sokszög oldalszámának ismételt megkettőzésével. Az Eudoxosz-axióma szerint (l. 1. füzet 1.12(g)) a körlemeznek tetszőlegesen kicsiny része marad lefedetlen, hacsak ezt a kitöltési eljárást elég sok lépésben folytatjuk.

(e) Most már következhet a 3.1(c) alatti 1. feladat tulajdonképpeni megoldása. Az állítás:

(A) $|\mathcal{K}|:|\mathcal{K}_0| = r^2 : r_0^2$.

(e_1) Ezt Euklidész indirekten bizonyítja azzal, hogy $|\mathcal{K}|:|\mathcal{K}_0| \neq r^2 : r_0^2$ feltételezése mindenképpen ellentmondáshoz vezet, akár $|\mathcal{K}|:|\mathcal{K}_0| > r^2 : r_0^2$, akár $|\mathcal{K}|:|\mathcal{K}_0| < r^2 : r_0^2$.

(e_2) Legyen ui. $\mathcal{S}$ olyan idom, amelyre

(B) $r^2 : r_0^2 = |\mathcal{K}|:|\mathcal{S}|$.[8]

(e_3) Ha $|\mathcal{S}| < |\mathcal{K}_0|$ lenne, akkor létezne − (c) és (d) szerint − olyan, a $\mathcal{K}_0$ körbe írt $\mathcal{R}_0$ sokszög, amelyre

(C) $|\mathcal{S}| < |\mathcal{R}_0| < |\mathcal{K}_0|$.

Írjunk akkor $\mathcal{K}$-ba egy a $\mathcal{R}_0$-hoz hasonló $\mathcal{P}$ sokszöget, amikor is − (b) szerint − $|\mathcal{P}|:|\mathcal{R}_0| = r^2 : r_0^2$, tehát

$$|\mathcal{P}|:|\mathcal{R}_0| = |\mathcal{K}|:|\mathcal{S}|,$$

és minthogy $|\mathcal{P}| < |\mathcal{K}|$, azért

$$|\mathcal{R}_0| < |\mathcal{S}|$$

ami viszont ellentmond (C)-nek.

(e_4) De $|\mathcal{S}| > |\mathcal{K}_0|$ sem lehetséges. Ekkor ui. − (B) szerint −

$$r_0^2 : r^2 \ (= |\mathcal{S}|:|\mathcal{K}|) = |\mathcal{K}_0|:|\mathcal{T}|,$$

ahol $\mathcal{T}$ olyan idom, amelyre $|\mathcal{T}| < |\mathcal{K}|$; ennek lehetetlenségét viszont az imént mutattuk ki (csak a $\mathcal{K}_0$–$\mathcal{K}$, $\mathcal{S}$–$\mathcal{T}$ cseréket kell tekintenünk).

(e_5) Így hát csak $|\mathcal{S}| = |\mathcal{K}_0|$ lehetséges, amivel − lásd (B) − bebizonyítottuk a tételt:

(V_1) *Két körlemez területének aránya egyenlő a sugarak négyzetének arányával.*

A görög matematikában inkább ez a megfogalmazás volt a szokásos:

---

[7] Ebben fontos szerepe van a körlemez konvexitásának. Ez ugyan nagyon egyszerűen belátható (a legelemibb háromszöggeometriai eszközökkel), de említés nélkül hagyni: hiba. A konvexitás fogalma és problematikája viszont általában (nem csak a körre vonatkozólag) kívül esik a görög matematika látókörén.

[8] Ma ezt mondanánk: Legyen *s* az a szám, amelyre $r^2 : r_0^2 = |\mathcal{K}| : s$, vagy másszóval: legyen $s = |\mathcal{K}| \cdot \frac{r_0^2}{r^2}$. Ez azonban idegen attól, amit a görög *geometriai algebrá*nak nevezünk. (Ez a szó nem annyira valamely körülhatárolt tudományterülere utal, ahogyan ma a "„számelmélet”, „differenciálegyenletek elmélete” stb. szavakat használjuk, hanem inkább a görög matematikai gondolkodásmód egy sajátosságára.)

(V_2) *Két körlemez területének aránya egyenlő az átmérők négyzetének arányával.*

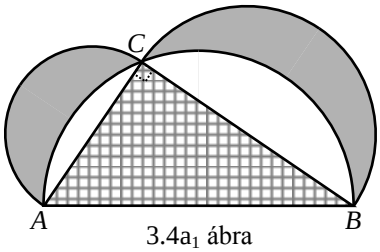
3.3 Ha a 3.2(e) alatti (A) aránypárt (ahol $\mathcal{K}$ és $\mathcal{K}_0$ tetszőleges körök) az ekvivalens

$$|\mathcal{K}|:r^2=|\mathcal{K}_0|:r_0^2$$

aránypárrá alakítjuk át[9], akkor nyilvánvalóvá válik a tétel tartalma ebben a fogalmazásban: *A kör területének és a sugár négyzetének a viszonya állandó (vagyis független a kör ill. a sugár megválasztásától).* Ha ezt az állandót π-vel jelöljük, akkor az r sugarú körlemez területének $\pi\cdot r^2$ képlete adódik. (A kör d átmérőjével kifejezve a területet: $\frac{1}{4}\cdot\pi\cdot d^2$. A görög matematikában inkább ez volt a természetes.)

Ennek a ma π-vel jelölt állandónak a számszerű megállapítása a következő „kihívás” a körmérés problémakörében. Ezzel a 3.6−3.10 szakaszokban foglalkozunk.

3.4 (a) Közbeiktatunk azonban egy látványosan érdekes és matematika-történetileg szinte „kihagyhatatlan” epizódot, amely jól mutatja, hogy milyen fontosságot tulajdonítottak már a korai görög matematikában is a 3.2 alatti (V_2) felismerésnek. Beszédes tanúi ennek <u>*Hippokratész*</u>[10] <u>*holdacskái*</u>, amelyek iránt korunkban sem lankad az érdeklődés.[11] A „holdacskák” két körív határolta olyan „kétszögek” ill. ilyenek egyesítései, amelyeknek a területe megegyezik valamely sokszög területével.



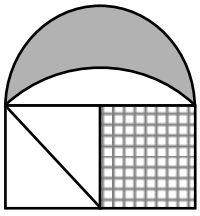
3.4a$_1$ ábra

(b) Példaképpen tekintsük a 3.4a ábra *AC*, *CB* „holdacskáit”; az *ACB* szög derékszög. A pitagorász-tétel és 3.3 szerint

$$|AC\text{ holdacska}|+|CB\text{ holdacska}|+|AC\text{ körszelet}|+|CB\text{ körszelet}|=$$
$$=\frac{1}{2}\cdot|AC|^2\cdot\pi+\frac{1}{2}\cdot|CB|^2\cdot\pi=\frac{1}{2}\cdot|AB|^2\cdot\pi=|ABC\text{V}|+|AC\text{ körszelet}|+$$
$$+|CB\text{ körszelet}|,$$

tehát a két holdacska együttes területe egyenlő a háromszögével.

(c) Hippokrátész más, ennél egyszerűbb és bonyolultabb holdacska-konfigurációkat is vizsgált (lásd a 3.4a$_2$ ábrát − ahol egyetlen, körívek által határolt „holdacskáról” van szó − és a 3F.20 feladatot!). Erről Eudémosz[12] részletes leírásából van tudomásunk, amelynek nem könnyű az értelmezése, de annyi bizonyos, hogy Hippokrátésznak nem volt „igazi” bizonyítása arra a két tételre (va-


3.4a$_2$ ábra

---

[9] A görög geometriai algebrának fontos és széleskörűen művelt területe volt − a pitagoreusok óta − az „arányosságok” (mai szóval: aránypárok) ilyen értelmű elmélete. Euklidész Elemeiben egész tétel-hálózat képviseli ezt.

[10] Chioszi Hippokratész kalandos életútját csak nagyon bizonytalanul ismerjük. Bizonyos azonban, hogy az i. e. 5. század 2. felében a legkiválóbb athéni matematikusok köréhez tartozott, akinek jelentős része volt a matematikai tudományosság térhódításában. Elsőként írt egy kora matematikáját összefoglaló, *Elemek* című művet, amelyben a hagyományt az új munkamódszerekkel és saját fölfedezéseivel ötvözte. Leginkább a három nagy klasszikus probléma kutatásával vált híressé. (Nem azonos a Hippokratész nevű i. e. 460?−377 élt híres orvossal.)

[11] Egy nemrég megjelent dolgozat szerzője a „kvadrálható” (= négyzetesíthető) „holdacskák” átfogó algebrai elméletét dolgozta ki.

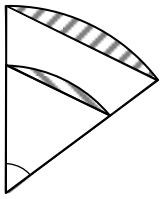
[12] Rhodoszi Eudémosz (i. e. 4. sz.) filozófus, Arisztotelész nagyhírű tanítványa, mesterének ösztönzésére több olyan − csak töredékesen fennmaradt − tudománytörténeti művet írt (köztük a geometria, az aritmetika és az asztronómia történetéről), amelyeket a görög matematika későbbi kutatói kiemelkedően értékes forrásként használtak. Eudémosz fizikai és logikai írásai (amelyek talán saját filozófiai iskolájának szánt tankönyvek voltak) Arisztotelész filozófiájának rendszerezését, fejlesztését és terjesztését szolgálták. Egyik matematikai írásában (csak töredékeit ismerjük) a szög fogalmának értelmezésével foglalkozik. (Ez a görög matematikában egyáltalán nem számított olyan egyszerű fogalmi problémának, ahogyan pl. a mai iskolai matematika is sugallja.)

lójában egy tétel két változatáról van szó), amelyekre az egész „holdacska-elméletet” fölépítette:

Két körlemez területének aránya egyenlő az átmérők négyzetének arányával.

Két különböző, de hasonló körszelet területének aránya egyenlő az átmérők négyzetének arányával.

(Két körszelet *hasonló*, ha a középponti szögük megegyezik; l. 3.4b ábra.)



3.4b ábra

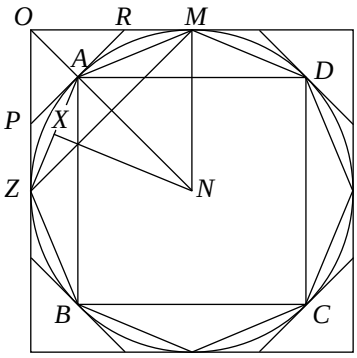
A második könnyen levezethető az elsőből, annak pedig 3.2-ben láttuk az Euklidész *Elemek*-ből − tehát egy két évszázaddal későbbi műből − idézett bizonyítását.

(d) Hippokrátészt nem a holdacskák érdekelték elsősorban, hanem a kör négyzetesítése („euklideszi” szerkesztéssel); a görög matematikusok századokon át főleg azért érdeklődtek a holdacskák iránt, mert azokban biztató jelet láttak arra, hogy nem lehetetlen *általában* görbevonalú idomokkkal egyenlő területű sokszögeket szerkeszteni (amelyeket már könnyen lehet euklideszi szerkesztéssel ugyanolyan területű négyzetekké átalakítani).[13]

3.5 Arkhimédész „Körmérés” c. munkája ezzel a tétellel kezdődik:

„Minden kör egyenlő területű azzal az E derékszögű háromszöggel, amelynek egyik befogója a kör sugara, a másik pedig egyenlő a kör kerületével.” [14]

Arkhimédész indirekt bizonyítása (3.5a ábra[15]) a következő.



3.5a ábra

(a) Ha a körlemez nagyobb lenne *E*-nél, írjuk be a körbe az *ABCD* négyzetet, és felezzük a köríveket ismételten mindaddig, amíg a körlemeznek a beírt sokszög által le nem fedett szeletei összesen kisebbek nem lesznek a körterület és *E* területe közti különbségnél.[16] Akkor a beírt sokszög nagyobb lesz az *E*-nél.

A kör *N* középpontjából *AZ*-re bocsátott *NX* merőleges kisebb a kör sugaránál, vagyis az *E* egyik befogójánál. Ugyanakkor azonban a beírt sokszög kerülete is kisebb, mint az *E* másik befogója[17], és ezért a beírt sokszög kisebb lesz az *E*-nél.

Ez az ellentmondás mutatja, hogy a körlemez nem lehet nagyobb az *E*-nél.

(b) Tegyük fel most, hogy a körlemez kisebb *E*-nél. Írjunk akkor a kör köré egy négyzetet, felezzük a köríveket, és tekintsük a kör érintőit az osztópontokban.[18] Ekkor az *OAR* szög derékszög, tehát OR nagyobb *MR*-nél (minthogy *MR* egyenlő *MA*-val). Ezért az *ROP* háromszög nagyobb, mint az *OZAM* idom. Az oldalszám ismételt felezésével elérhető tehát, hogy a körülírt és a megfelelő beírt sokszög különbsége tetszőlegesen kicsi legyen, így az is, hogy kisebb az *E* és a körlemez különbségénél, ami viszont kisebb, mint az *E* és a beírt sokszög különbsége;

---

[13] Ez hiú reménynek bizonyult, de ezeket a kérdéseket csak sokkal−sokkal később tisztázhatták, az olyan súlyos eredmények felhasználásával, mint a π irracionalitása és az euklidészi szerkeszthetőség algebrai elmélete.

[14] A tétel kimondása a mai matematikai felfogásban feltételezi a körvonal *rektifikálhatóságát* (ívhosszának létezését). Ez a „fogalom” azonban a görög matematikában még ugyanúgy nem létezett *fogalomként*, mint a terület „fogalma” (vagyis csak naiv-intuitív elképzelésként szerepelt).

Mértékgeometriai köntösbe öltöztetve a tétel azt mondja, hogy *k*-val ill. *t*-vel jelölve az *r* sugarú körlemez kerületét ill. területét, $r \cdot k = 2t$, amiből *k* kifejezhető *t*-vel ill. *t* kifejezhető *k*-val.

[15] A pontok betűjelölése azért tűnhet kissé furcsának, mert ez az eredeti − ill. az arab közvetítéssel fennmaradt − mű eredeti ábrája.

[16] Ezt Eudoxosz axiómája teszi lehetővé (Elemek XII. 2., lásd 1.12(g), 3.2(d)), ui. a körlemeznek a beírt 2*n* oldalú szabályos sokszög által le nem fedett része kisebb, mint a beírt *n* oldalú szabályos sokszög által kihagyott rész fele. (Ez elemi geometriai fölismerés, figyelembe véve a körvonal konvexitását is. V.ö. 3.2(d).)

[17] Ez akkor evidens, ha az ívhossz mai mértékgeometriai fogalmát használjuk.

[18] Az érintő „fogalma” is egyike azoknak, amelyek csak naív szemléleti formában léteztek a görög matematikában. Ezzel majd részletesen foglalkozunk egy későbbi füzetben.

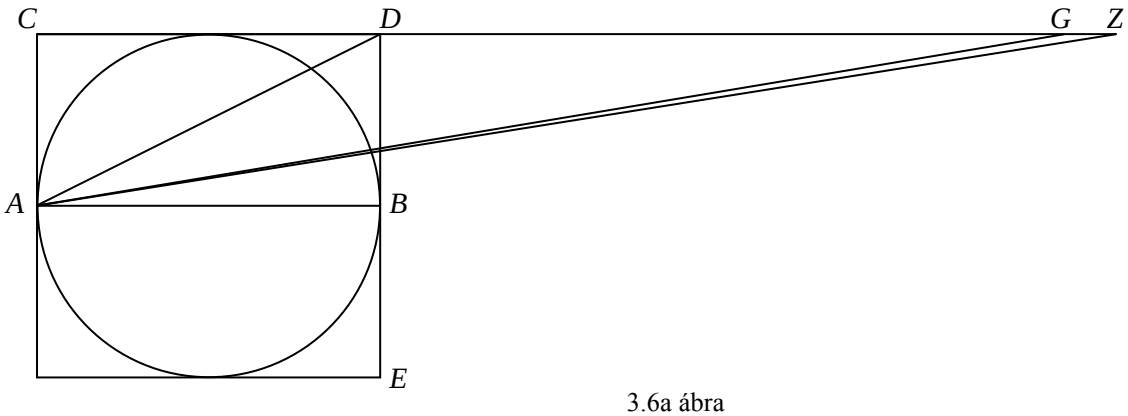
végül is a körülírt sokszög kisebb lesz *E*-nél. Ez azonban lehetetlen, hiszen az *E* derékszögű háromszög egyik befogója egyenlő *NA*-val, a másik pedig kisebb a körülírt sokszög kerületénél[19], tehát éppen hogy fordítva: az *E* kisebb a körülírt sokszögnél.

(c) Minthogy tehát a körlemez sem kisebb, sem nagyobb nem lehet az *E*-nél, csak egyenlő lehet vele, ami bizonyítandó volt.[20]

3.6 (a) Arkhimédész második tétele a *Körmérés*-ben már a körlemez területének és az átmérő négyzetének a viszonyát igyekszik számszerűen (értsd: racionális számmal) megközelíteni; mai felfogásunkban a π számszerű, racionális közelítéséről van szó. A tétel így szól:

A kör területének és az átmérő négyzetének a viszonya megközelítőleg $11:14$.

(b) Bizonyítás. (3.6a ábra.) Az *AB* átmérőjű kör köré írjuk a *CE* négyzetet; legyen továbbá *DG* kétszer akkora, mint *CD*, *GZ* pedig *CD* egy hetede. Minthogy *ACG* és *ACD* aránya $21:7$, *ACD* és *AGZ* aránya pedig $7:1$, azért *ACZ* és *ACD* aránya $22:7$.[21]



3.6a ábra

Minthogy a *CE* négyzet egyenlő az *ACD* háromszög négyszeresével, az *ACZ* háromszög területe pedig megközelítőleg egyenlő az *AB* kör területével (minthogy az első tétel szerint a kör területe egyenlő AC és a kör kerülete szorzatának a felével, a kerület pedig körülbelül az átmérő $\frac{22}{7}$-szerese, ahogyan be fogjuk bizonyítani[22]), azért a kör területe megközelítőleg úgy aránylik az átmérő négyzetéhez, mint 22 a $4\cdot 7$-hez, vagyis mint 11 a 14-hez, ami bizonyítandó volt.

---

[19] Itt − a mai felfogás szerint − ismét szükség lenne az ívhossz megfelelő definíciójára (és konvexitási meggondolásokra is).

[20] (a) Ebben a magyar nyelvű leírásban majdnem teljesen hűen adtuk vissza Arkhimédész megfogalmazását. Így ez tanulságos példája lehet annak, hogy a sokkal későbbi szimbolikus képlet-nyelv hiányában mennyire nehéz a tisztán szöveges megfogalmazásokat követni. (Erre ennél sokkal bonyolultabb példákat is idézhetnénk a görög matematikából.)

(b) A tételben és a bizonyításban mai szemmel nézve hiányzik annak garanciája, hogy a szereplő idomoknak abban a számtartományban, amely annak a kornak a matematikájában használatos (ez Arkhimédész korában a racionális számok tartománya) egyáltalán létezik számszerű területe. (Ma tudjuk, hogy ez nincs garantálva.)

[21] Ez az eredeti szöveg hű fordítása. Valójában azonban minden indoklás nélkül kimondható, hogy *ACZ* és *ACD* aránya $22:7$, mégpedig az ábrának az első mondatban lévő leírása alapján.

[22] A „be fogjuk bizonyítani” szövegrész a következő és egyben befejező, harmadik tételre utal. J. L. Heiberg (nagyon híres matematikatörténész), aki Arkhimédész e művének kéziratát görög és latin nyelven 1880−81-ben kiadta és kommentálta (azóta Arkhimédész ismert műveinek teljes vagy részleges angol, német, francia, holland, orosz stb. nyelvű kiadásaiban többször is megjelent) megjegyzi, hogy ez a három tétele bizonyára csak töredéke egy nagyobb műnek, és hogy a második és harmadik tételt a megfordított sorrendben kellene leírni. Ezt a szerkesztési „rendetlenséget” Heiberg nem Arkhimédésznek tulajdonítja, hanem a két évezredes sokszori átmásolásnak, fordításnak és átszerkesztésnek. (A harmadik tétel egyik eredményének a felhasználása a bizonyításban

3.7 Az előző tétel eredménye − 3.3 alapján − így is kifejezhető: $\frac{11}{14}$ közelítő értéke a $\frac{\pi}{4}$-nek, vagyis $\frac{22}{7}$ közelítő értéke (pontosabban: *felső* becslése) a π-nek.

A következő tételből a π-nek egy *alsó* becslése is adódik.

3.8 (a) Harmadik tétel. *Minden kör kerülete nagyobb az átmérő háromszorosánál, mégpedig kevesebbel nagyobb, mint az átmérő egy hetede, de többel, mint az átmérő tíz hetvenegyedrésze.*

(b) Ennek a tételnek a bizonyítását már nem írjuk le (a többlépcsős felépítés, a sok számítás, a pótlandó nem közölt számítások, a szükséges ábrák és kommentárok miatt csak 8-10 oldalon tudnánk megfogalmazni), de érzékeltetjük a bizonyítás gondolati szerkezetét és bizonyos eszközeit, amelyeknek „hagyományteremtő” szerepük lett a matematika történetében.

Arkhimédész először a körbe írt és a kör köré írt szabályos hatszögön végzi számításait; azután rendre megkettőzve az oldalszámot, a beírt ill. körülírt szabályos 12-, 24-, 48- és 96-sokszögre tér át. Ezt ráadásul rekurzív módon teszi, vagyis minden lépésben felhasználja az előző lépés eredményeit (konkrétan: az átmérő viszonyát a mindenkori beírt ill. körülírt szabályos sokszög kerületéhez ill. ennek a viszonynak alsó és felső becsléseit).[23]

A módszert a következő princípiumokkal írhatjuk le:

1. A körkerület − és hasonlóan a körterület − „kiszámítása” kétoldalú közelítéssel történik, egy elvben végtelen sok lépésből álló munkafolyamatban; minden lépésben egy beírt és egy hozzá hasonló körülírt sokszög kerületét ill. területét számítjuk.
2. A kiinduló lépésben az oldalszám: 6.
3. A következő lépések mindegyikében az előző lépésbeli oldalszám kétszeresét vesszük.
4. Törekvés az eljárás rekurzívvá tételére.

(c) Ennek a gondolkodásmódnak jellegzetes elvi-fogalmi oldala (az 1., 4. princípiumok) és gyakorlati-célszerűségi oldala (a 2., 3. princípiumok) van, amelyek sajátosan összekapcsolódnak.[24] Ez a szabad, bátor, előremutató, szinte „modern” gondolkodásmód az eredetiségével kiemelkedett a görög matematikából és sok tekintetben a későbbi századok matematikai vívmányainak ősmintáit szolgáltatta. Az egyik ilyen − nagyon fontos − archetípus éppen a most megbeszélt harmadik tétel bizonyításának módszere.

3.9 A 4. princípium − radikális újítás a görög matematikában, a mozgékonysága és az approximációs szemlélete révén! − később algoritmikussá fejlődött azáltal, hogy az egyes lépések közötti átmenetnek egységes és képletszerű lehetőségét keresték. (Ennek a konkrét körmérés-témakörön túl is messzeható jelentősége volt.) Példaképpen közöljük az egyik ilyen rekurziós eljárást, amely a formuláinak szimmetriájából fakadó szépségével tűnik ki jónéhány más körmérési rekurzió közül.

$t_{2n} = \sqrt{t_n \cdot T_n}$	$K_{2n} = \frac{2 \cdot k_n \cdot K_n}{k_n + K_n}$
$T_{2n} = \frac{2 \cdot T_n \cdot t_{2n}}{T_n + t_{2n}}$	$k_{2n} = \sqrt{k_n \cdot K_{2n}}$
(n = 3, 4, ...)	

Jelölések:

Szabályos sokszögek	Terület	Kerület
Beírt n-szög	t_n	k_n
Körülírt n-szög	T_n	K_n

utólag érthetővé teszi a 3.6a ábrabeli konfigurációjának azt a speciális sajátosságát, amely a 7 szám szerepében nyilvánul meg.)

[23] Talán ezért is állt meg Arkhimédész a 96-os oldalszámnál; bizonyára már túl bonyolult lett volna a 96-ról 192-re való áttérés.

[24] „Harmadik oldalként” ide kapcsolódik Arkhimédésznél a matematikán kívüli eszközök felhasználása matematikai problémák megoldásánál. Erről 3.12-ban külön fogunk szólni.

Ezek az ún. *Arkhimédész-féle rekurziós formulák* két olyan középértékből épülnek fel, amelyeket a görög matematikában is jól ismertek és sokat vizsgáltak: a mértani középből és a harmonikus középből. Ez a rekurzió azonban − ebben az explicit képletszerű formában − valószínűleg a 17. századból származik.[25]

3.10 (a) Arkhimédész „harmadik körmérési tételéből” a π-nek az $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ approximációja adódik, vagyis $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$; tizedes törtben kifejezve $3{,}140845... < \pi < 3{,}142857...$ és így $\pi = 3{,}14...$, de ez persze anakronisztikus, csak azért közöljük, hogy a mai olvasónak határozott képe legyen a megközelítés erősségéről.[26]

(b) Bizonyos, hogy voltak Arkhimédész-művek, amik nem maradtak fenn; ilyenekről más szerzők írásaiban található utalásokból szerezhetünk tudomást. Idevágó példa Heron[27] közlése a *Metrica* c. művében arról, hogy Arkhimédész egy másik (számunkra ismeretlen) írásában egy másik számítással lényegesen jobb eredményt ért el a π megközelítésében. A fennmaradt görög Heron-szövegben azonban biztosan hibás számok szerepelnek, és különböző kutatók különbözőképpen értelmezik ezt a szöveget. A görög matematika egyik legkiválóbb tudósa, Sir Thomas L. Heath *A Manual of Greek Mathe-*

---

[25] Talán James Gregory (1637−1675) fedezte föl. James Gregory igen sokoldalú, jelentős alakja volt az analízis történetének közvetlenül a leibnizi-newtoni nagy fordulat előtt (és annak jónéhány vívmányát anticipálva). Az itt említett feltételezés nem független attól a ténytől, hogy Gregory sok későbbi matematikai eszköz és eljárás előfutáraként az intervallumskatulyázás módszerének is korai előkészítője volt.

[26] Arkhimédésznek ebből a csak töredékesen fennmaradt művéből is kitűnik, hogy ő a numerikus számításokban is kimagaslott a görög matematikusok közül. A „harmadik tétel” bizonyításában jónéhány nagyszerű számítást találhatunk; ezekből példaképpen felidézzük az elsőt (a legegyszerűbbet).

Legyen *EBC* (az eredeti betűjeleket használjuk) egy derékszögű háromszög; a *C*-nél lévő szög a derékszög, a *B*-nél lévő szög pedig 30°-os (Arkhimédésznél: „egy derékszög harmada”). Ekkor − állítja a szerző, minden magyarázat nélkül −

$$EB : BC = 306 : 153, \quad EC : CB \approx 265 : 153.$$

Nyilvánvaló, hogy $EB : BC = 2 : 1$ (hiszen *EBC* egy szabályos háromszög „fele”); de vajon miért éppen a 306, 153 számokkal jeleníti meg Arkhimédész a $2 : 1$ arányt? A következő elemzést Arkhimédész műveinek A. Czwalina és F. Rudio által gondozott német nyelvű kiadásának egyik kommentárja nyomán közöljük.

A magyarázatot a második aránypár kiszámításában találhatjuk meg. Legyen $BC = 1$. Minthogy

$$EC^2 : BC^2 = (2^2 - 1^2) : 1^2 = 3 : 1,$$

azért olyan számokat kellett találni $EC : CB$ közelítő racionális megjelenítéséhez, amelyek négyzeteinek az aránya nagyon közel esik a 3-hoz. Mármost $265^2 = 70225$ csak 2-vel kisebb, mint $3 \cdot 153^2 = 3 \cdot 23409 = 70227$, tehát $\frac{265^2}{3 \cdot 153^2} = \frac{70225}{70227} \approx 1$, és így $265^2 : 153^2 \approx 3 : 1$; $EC : CB$ alig valamivel nagyobb, mint $265 : 153$.

(Valóban: $EC : CB = \sqrt{3} = 1{,}732050...$, $265 : 153 = 1{,}732026...$; itt tehát tulajdonképpen $\sqrt{3}$-nak egy nagyon jó racionális megközelítéséről van szó.)

Ez indokolja tehát a 153 felhasználását az első aránypárban is.

[27] Alexandriai Heron (i. e. 150 és i. sz. 250 között, a legvalószínűbb, hogy i. sz. 100 körül élt) munkássága annak az antik „alkalmazott matematikai” vonulatnak a csúcsa, amelynek a „klasszikusa” a görög matematikában Arkhimédész volt. (Érdekes, hogy emellett sokat foglalkozott matematikával az euklidészi tradíció keretében is − kommentárokat írt az Elemekhez, Euklidész szellemében definiált fogalmakat, bizonyított tételeket − , amelytől a fő munkáiban erőteljesen elszakadt.) Sok gyakorlati, valódi „alkalmazási” feladatot oldott meg. Technikai alkotásainak fizikai alapjai nagyon előremutatók voltak.

A mai iskolai matematikától sem idegen a háromszög területének Heron-féle $t_V = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ formulája, amelyet azonban valószínűleg már Arkhimédész is fölfedezett.

matics c. fontos könyvében (1963) a legjobb olvasatnak azoknak a kutatóknak az értelmezését tartja, akik szerint a

$$\frac{211875}{67444} < \pi < \frac{195888}{62351}$$

approximációról van szó, ami tizedes törtben kifejezve azt jelenti, hogy $3{,}141495... < \pi < 3{,}141697...$, és ez a π-nek három első valódi tizedes jegyét szolgáltatja: $\pi = 3{,}141...$ (valójában $\pi = 3{,}141592...$).

(c) A π valós szám vizsgálatának (sokféle módon, de a századok folyamán egyre inkább az analízis eszközeivel) igen gazdag története van. (Ide tartozik a π irracionális, sőt transzcendens voltának a problematikája is. Az arkhimédészi körkitöltés mégis megmaradt a körmérés „klasszikus” módszerének.)

3.11 (a) A „klasszikus” exhausztiós (kitöltési) *eljárás* Arkhimédész korában már nem számított igazán újnak, hiszen például már Euklidész 3.2-ben ismertetett körkitöltése szabályos sokszögekkel[28] is olyan elven alapul, amelynek gondolata Eudoxoszra (sőt még régebbi forrásra: Antiphonra) vezethető vissza. Arkhimédész azonban − a 3.8(b)-ben jelzett princípiumokkal − numerikus számításra alkalmas *módszerré* fejlesztette ezt az elgondolást, aminek igen nagy és messzire ható volt a technikai és algoritmikus jelentősége.

Érdekes történeti ellentmondás ugyanakkor, hogy ez a technikai-algoritmikus fejlődés, amely kétségtelenül egyik fontos forrásává vált a mértékfogalmak fogalmi kikristályosodásának (bár igaz, hogy történelmileg nagyon későn), mai szemmel visszatekintve hosszú ideig hozzájárult a fogalmi bizonytalanságok tartósításához, sőt növekedéséhez. Ezekben a nagyon hosszú korszakokban − leegyszerűsítve és tömören fogalmazva − nem volt világos a mérték*fogalmaknak* (mint terület, kerület) a viszonya a számítási *eljárásokhoz.*

(b) Kissé részletesebben, a 3.8(b) alatti elemzést folytatva:

A kitöltési eljárásnak azt a − mára már régóta megmerevedett hagyománnyá vált − korlátozását, hogy éppen a beírt szabályos *hat*szöggel kezdjük a sorozatot, aligha lehet mással magyarázni, mint az Arkhimédészre visszatekintő hagyománnyal. Praktikus szempontból például a beírt négyzetnek legkönnyebb a területét kiszámítani.[29]

Az oldalszám következetes megkettőzése kétségtelenül nagy praktikus előnyökkel jár. A 3.9 alatt felidézett rekurziós formulák beszédes bizonyítékai ennek. (A skatulyázási és konvergenciaproblémák kezelésében is könnyebbséget jelent ez.)

Nagyjából azt mondhatjuk, hogy ezek a specialitások jól szolgálják a praktikum mellett a szemléletességet is, bár nehéz belátni, hogy miért lenne kevésbé szemléletes, ha a szabályos hatszög helyett pl. a szabályos ötszöggel kezdjük a kimerítést.

A szemléletesség tekintetében a fő szempont az, hogy teljesen nyilvánvaló: A körbe írt szabályos $k \cdot 2^n$-szögek (k a kezdő oldalszám, $n = 0, 1, 2, ...$) sorozatánál a számszerű területek szigorúan monoton növekedő sorozatot alkotnak. (Ui. a $k \cdot 2^{n+1}$-oldalú szabályos sokszög úgy helyezhető − vagyis forgatható − el a körben a $k \cdot 2^n$-oldalúhoz képest, hogy azt valódi részként tartalmazza.)[30]

Összefoglalva: *Praktikus szempontból* és *a szemléletesség szempontjából*[31] kétségtelenek az arkhimédészi nagyon speciális eljárás előnyei.

---

[28] Pontosabban belső *és* külső közelítésről van szó.

[29] Igaz, hogy a kerület tekintetében viszont a beírt szabályos hatszög a legegyszerűbb − ti. triviális − eset.

[30] Azért, hogy tudatosan átlássuk ezt az előnyt, gondoljunk arra, mennyire lehetetlen „szemléletesen” eldönteni, hogy pl. a körbe írt szabályos 59-szögnek valóban nagyobb-e a területe a beírt szabályos 58-szögénél (ahogyan mindenki − az iskolások biztosan − „elvárja” és legtöbbször minden további nélkül feltételezi). Ez az egyenlőtlenség egyébként igaz, de egyáltalán nem evidens (l. a 3F.2 feladatot).

[31] Az esztétikai szempont sem lényegtelen!

(c) *Fogalmi szempontból* azonban nagyon nagyok a hiányosságok, hacsak nem akarjuk a terület fogalmát egyetlen „mérési” eljáráshoz kötni, mintegy azzal definiálni.

Egyrészt nem lehet *matematikailag* megindokolni egy konkrét mérési eljárás preferálását, még *egy bizonyos idomra* vonatkozólag sem. Miért ne lehetne pl. a körlemezt beírt szabályos sokszögeknek más sorozataival „kimérni” (nem a szabályos hatszöggel indítva, nem mindig megkétszerezve, hanem másképpen növelve az oldalszámot stb.); miért kell szabályos sokszögekhez ragaszkodni, miért nem lehet pl. egybevágó négyzetek egyesítéseinek (szükségképpen nem-konvex sokszögeknek) valamely sorozatával approximálni a körlemezt[32] ?

Másrészt szinte lehetetlen lenne *különböző idomokhoz* különbözőképpen „*idom*ított” területfogalmak között kapcsolatokat kidolgozni és ebből egy egységes elméletet fölépíteni. A régiek is abszurdnak tartották volna, hogy pl. a körlemez és a parabolaszelet[33] területe fogalmilag ennyire különböző legyen. Ellenkezőleg: egységes, de megalapozatlanságában „túlzottan is egységes”, hamisan „problémamentes” intuitív elképzelésük volt a területről.

(d) Egy idomhoz társított egyetlen konkrét exhausztió inkább elhomályosítja a terület fogalmát, mert annak lényegéhez tartozik, hogy valamely − jól definiált − osztályhoz tartozó különböző mérési eljárások egyenértékűek.

Ettől pedig meg kell különböztetni azt a praktikus kérdést, hogy az egyenértékű eljárások közül melyiket válasszuk a konkrét numerikus számításhoz.

Ez a tisztázatlanság, amely igen szorosan összefügg a valós szám fogalmának tisztázatlanságával, történetileg nagyon hosszú ideig fennmaradt, miközben a területszámítás technikái rohamosan fejlődtek. Végül mindkét probléma − egymással összefonódva − a 19. század végén oldódott meg.

Az iskolai matematikában azonban mind a mai napig tovább élnek ezek a fogalmi zavarok.

A következőkben bizonyos más típusú idomoknak, a parabola-szeleteknek Arkhimédész által nagyon híressé vált mérési problematikáját ismerhetjük meg.

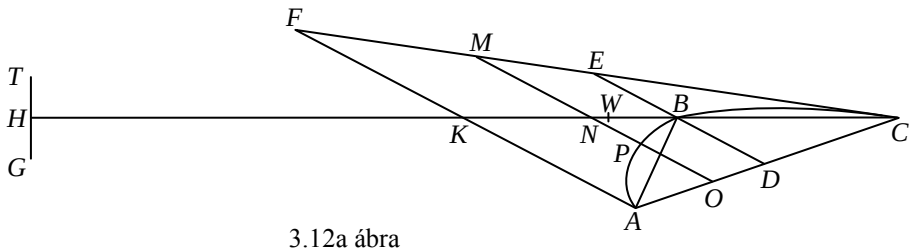
3.12 *A parabolaszelet területe, statikai módszerrel levezetve, Arkhimédész „Módszer” c. művéből.*[34]

(a) Tekintsük az *ABC* parabolaszeletet, amelynek *BD* az *AC* húrhoz tartozó átmérője[35] (3.12a ábra). *CF* a parabola érintője a C pontban. *P* az *AC* parabolaív valamely pontja, AKF és *OPNM* párhuzamos *BD*-vel. A *CB* szakasz *B*-n túli meghosszabbítása az *N* pontban metszi *M*O-t és *K*-ban az *FA*-t. Legyen továbbá $KH = KC$.

(b) A parabola tulajdonságaiból adódik[36], hogy

(c_1) $MO : OP = HK : KN$ és (c_2) $EB = BD$, és így $MN = NO$ és $FK = KA$.

(d) Tekinsük *HC*-t egy kétkarú emelő rúdjának; *K* a középpontja. Egy a *PO*-val egyenlő *TG* sza-



3.12a ábra

[32] Lásd a Peano−Jordan-mértékről szóló szakaszokat.

[33] Az utóbbinál nyilván alkalmatlan eszköz a „beírt szabályos sokszög”; egészen más kitöltési eljárás bizonyul praktikusan használhatónak (l. alább 3.12−3.14).

[34] Ez valójában Eratosztenészhez, az alexandriai kutatóközpont neves tudósához és könyvtárosához intézett levél. Ezt a művet nagyon későn − 1906-ban! − fedezte föl a görög matematika egyik legnevesebb kutatója, a dán J. L. Heiberg, egy palimpszesztben, Isztambulban. Az írásmű tárgyáról l. alább a 3.13 szakaszt.

[35] A parabola tengelyével párhuzamos, az *AC* szakasz *D* felezőpontján átmenő egyenes.

[36] Arkhimédész ezt a kúpszeletek elméletéből használja fel.

kasz¸amely úgy van elhelyezve, hogy a középpontja a *H* ponttal essék egybe, *K*-ra nézve egyensúlyban van *MO*-val, amelynek a középpontja *N*. (Ez (c_1)-ből és az emelőtörvényből következik.[37]) Hasonlót mondhatunk minden *BD*-vel párhuzamos egyenesnek az *ACF* háromszögbe ill. az *ACB* háromszögbe eső szakaszáról, amelyek rendre egymáshoz tartoznak.

(e) Ha tehát úgy tekintjük, hogy az egész parabola-szelet a *H* pontban hat, akkor egyensúlyban van az *ACF* háromszöggel, amely az eredeti helyén van.

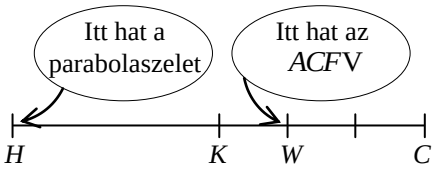
Mármost az *ACF* háromszög súlypontja a *CK* szakasznak az a *W* pontja, amelyre $CW = 2 \cdot WK$, és az egész *ACF*-et úgy tekinthetjük, mint amely az egész „tömegével” a *W* pontban hat. Így hát (az emelőtörvény szerint)

$$ABC \text{ parabolaszelet} : ACF\text{V} = WK : KH = 1:3,$$

(3.12a ábra), vagyis

$$ABC \text{ parabolaszelet} = \frac{1}{3} \cdot ACF\text{V} = \frac{4}{3} \cdot ABC\text{V}^{38}$$

(3.12b ábra), ami bizonyítandó volt.



3.12b ábra

3.13 *Néhány kiegészítő megjegyzés.*

(a) A „Módszer” bevezető részében Arkhimédész nagyon világos, találó fogalmi megkülönböztetéseivel a mai olvasó számára is meglepően „modernül” ható gondolatait ismerteti annak a „mechanikai” (mai szavainkkal inkább statikai) módszernek az ismeretelméleti értékeléséről, amely ennek az írásnak a tárgya. A módszer lényege: statikai modellek (konkrétan: az emelőtörvény) felhasználása területek és térfogatok kiszámítására. (A 3.12-ben bemutatott parabolakvadraturán kívül néhány forgástest térfogatának kiszámítására is alkalmazza a módszert.)

Arkhimédész szerint az ilyen „geometrián kívüli” eszközök felhasználásán alapuló levezetések nem tekinthetők „geometriai” − vagyis „tudományos” − bizonyításnak; inkább heurisztikus az értékük, vagyis a geometriai tények *fölfedezését* szolgálják, és ebben az értelemben primer szerepük van a megismerési folyamatban. Ez után következik, szekunder fázisként, a valódi − tisztán geometriai eszközökkel történő − *bizonyítás*. Arkhimédész önmagáról azt mondja, hogy a megismerő tevékenysége (ezen a területen) éppen így épül föl.

Arkhimédész általánosabban is világosan látja a megismerési folyamatnak ezt a „kétlépcsős” szerkezetét (nem csak a mechanikai modellek vagy egyéb matematikán kívüli eszközök használata értelmében). A primer fázisnak igen nagy jelentőséget tulajdonít a szekundér fázis eredményessége szempontjából is. Példaképpen méltatja Démokritosz munkájának értékét, aki ilyen heurisztikus értelemben (de bizonyítás nélkül) fölfedezte, hogy a kúp térfogata harmada az őt befogadó hengerének és a gúla térfogata harmada az őt befogadó hasábénak, amiket azután Eudoxosz bizonyított be. (Valójában azután maga Arkhimédész adott „igazi” bizonyításokat ezekre a tételekre.)

(b) A Démokritosz−Eudoxosz−Arkhimédész fejlődésvonalnak két másik ága is megjelenik egyrészt a „Módszer”-ben, másrészt például a „Körmérés”-ben és a „Parabolakvadratúra”-ban. Arkhimédész a „Módszer” itt ismertetett részletében például a Démokritosz-féle atomisztikus felfogást fejleszti tovább, amely majd csaknem 2000 év múlva éppen Arkhimédész nyomán a híres Cavalieri-elvben éled újra (lásd 3.19); a „Körmérés” itt bemutatott részlete pedig − épp úgy, mint a parabolakvadratúra feladatának másik, „tiszta geometriai” módszere (l. alább 3.14) − az Eudoxosz-féle kitöltési elvnek tudatos

---

[37] Arkhimédészt több statikai alaptörvény, köztük az emelőtörvény fölfedezőjének tartja a tudománytörténet.

[38] Az itt felhasználandó $|ACF\text{V}| = 4 \cdot |ABC\text{V}|$ kapcsolat nem csak a háromszög mértékgeometriai − a mai iskolai matematikából is ismert − terület-formulájából adódik könnyen, hanem a terület-egyenlőségnek (például az átdarabolhatóság értelmében) Arkhimédész korában jól ismert elméletéből is. (L. a 3F.10 feladatot.)

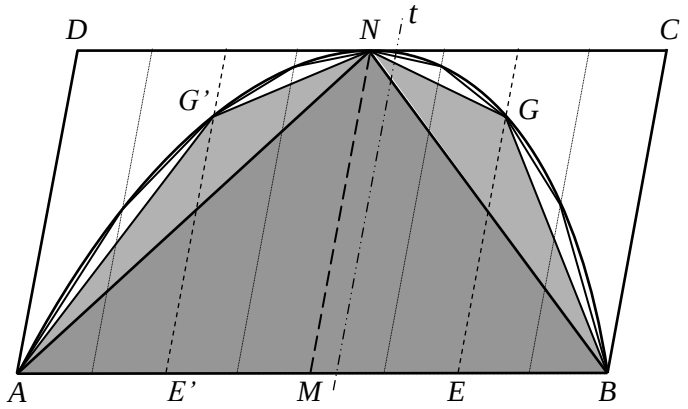
alkalmazása[39], amely majd szintén két évezred múlva és szintén „Arkhimédészre visszanyúlva, az integrálszámításban teljesedik ki”[40]. (Démokritoszról lásd a 3.21-hoz fűzött lábjegyzetet is.)

(c) Arkhimédész messze meghaladta saját korát; nem is akadtak méltó követői egészen a 17. századig.

3.14 (a) A *Parabolakvadratúra*[41] című művében[42] Arkhimédész két bizonyítást ad a parabolaszelet területéről szóló nagyon híres eredményére. Az egyik a „Módszer”-ben közölt „mechanikai” bizonyításnak egy változata[43]. A másik pedig az a „tiszta geometriai” bizonyítás, amelynek a szükségességét a „Módszer”-ben kifejti (l. 3.12, 3.13). Most ezt ismertetjük.

(b) A parabola *AB* húrja kijelöli az *ABCD* paralelogrammát és az *ABGNH* parabolaszeletet; a húrhoz tartozó átmérő (a húr *M* felezőpontján átmenő, a parabola tengelyével párhuzamos egyenes) *MN*, és *CD* a parabola érintője az *N* pontban (3.14a ábra).[44] A tétel így szól:

Az ABGNH parabolaszelet területe egyenlő az ABN háromszög területének $\frac{4}{3}$*-ával.*



3.14a ábra

[39] Ezt már az Euklidész *Elemek*-ből 3.1−3.3-ben felidézett, a körmérésre vonatkozó részletben is láttuk.

[40] Az idézőjellel azt kívánjuk érzékeltetni, hogy ez a némileg félrevezető mondat szinte szlogenné vált az Arkhimédészről szóló sok ismertetésben; azt a képzetet kelti, hogy Arkhimédész ilyen munkái *közvetlen* előképei a matematikai analízisnek, konkrétan az integrálszámításnak. Valójában azonban igen lényeges fogalmi eltérések vannak ezek között; az integrálszámítás nem egyenes folytatása Arkhimédész exhausztiós módszereinek. (Lásd alább a 3.15 és az integrálszámításról szóló szakaszokat.)

[41] Ez a hagyományos elnevezése annak a feladatnak, amely valójában a parabolaszelet − a parabola-görbe és annak egy húrja által határolt idom − kvadratúrája. Magának a „kvadratúra” szónak az eredeti jelentése „négyzetesítés”, átvitt értelemben a számszerű terület megállapítását nevezték így századokon át, és ez az elnevezés később értelemszerűen hozzátapadt a határozott integrál kiszámításához is.

[42] Ez is magánlevél (mint Arkhimédész legtöbb fennmaradt műve). A címzett: Dozitheosz (i. e. 3. sz. 2. fele), matematikus és csillagász (matematikai munkásságát nem ismerjük), Konon (i. e. 3. sz.) csillagásznak − Arkhimédész barátjának − tanítványa. Arkhimédész − ahogyan a bevezetőben írja − eredetileg Kononhoz intézte ezt a levelet, és annak halála után küldte el Dozitheosznak. Kononnak sem ismerjük a matematikai eredményeit. Bizonyos azonban, hogy Arkhimédész sokszor közölt Kononnal bizonyítatlan sejtéseket, de a levelezésükből nem sikerült megállapítani, hogy milyen része volt Kononnak ezek bizonyításában ill. cáfolatában.

[43] Valójában egy kissé speciálisabb tételről van szó, amely a parabolának nem tetszőleges szeleteiről szól, hanem csak azokról, amelyeket egy a parabola-tengelyre merőleges húr létesít.

[44] A parabola tengelyének nincs szerepe ebben a témakörben; Arkhimédész ábráján sem szerepel. Mégis föltüntettük (a *t* egyenessel), hogy az iskolai matematikán nevelkedett mai olvasó könnyebben tájékozódhasson az ábrán.

(c_1) A bizonyítás első részében annak kimutatása történik, hogy az *ABN* háromszöghöz hozzáillesztett *ANG'*, *BGN* háromszögek területe (*E'* ill. *E* az *AM* ill. *MB* szakasz *felezőpontja*) egyenként $\frac{1}{8}$-a, együttesen tehát $\frac{1}{4}$-e az *ABN* háromszög területének. Ezt a parabola mértékgeometriai tulajdonságaira utalva állítja Arkhimédész, de a levezetést nem közli. Lehet hogy nem mértékgeom, hanem eud.

(c_1*) Ezt a hiányzó levezetést könnyen rekonstruálhatjuk abból a reális föltételezésből kiindulva, hogy Arkhimédész jól ismerte a görög kúpszelet-elméletet.[45] (Ugyanezt föltételezhetjük a levelező partnereiről is, így hát természetes, hogy nem tartotta szükségesnek a levezetés leírását.) Márpedig ennek az elméletnek az volt az alapja, hogy bár

− a „kúpszeleteket” valóban *kúp-szeletekként* értelmezték,

Azután azonban

− fölfedezték, hogy ezeket az alakzatokat *sík-görbéknek* tekintve, milyen alaptulajdonságaikkal lehet őket definiálni

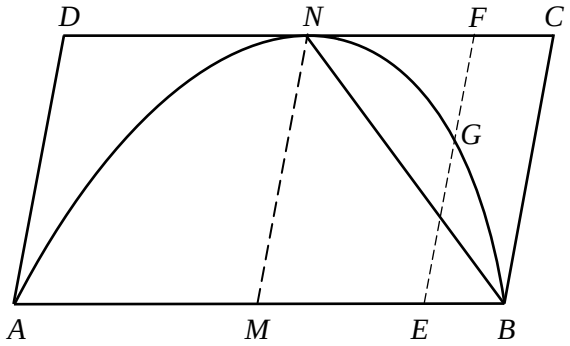
(ami által fölöslegessé válik, hogy a további tulajdonságok kutatásához minduntalan az eredeti térbeli származtatásra utaljunk vissza).

Ebben az elméletben a parabola síkbeli értelmezése a következő:

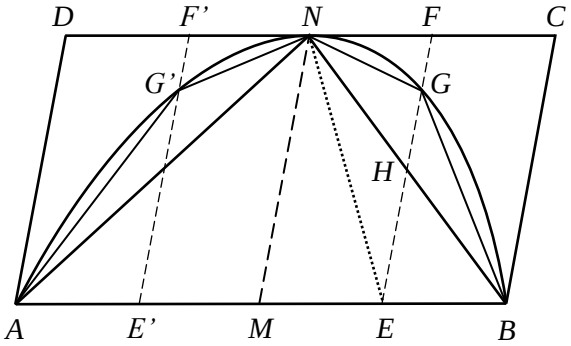
Legyen *ABCD* egy paralelogramma. *M* ill. *N* az *AB* ill. *CD* szakasz középpontja, *E* az *MB* szakasz tetszőleges belső pontja. Ha mármost a *G* pontot úgy jelöljük ki az *EF* szakaszon, hogy

(S) $$|FG|:|CB| = |FN|^2:|CN|^2,$$ [46]

és ezt a lehetséges *E* pontok mindegyikére megtesszük (az *AM* szakasz *E'* belső pontjaira analóg módon), akkor az így meghatározott *G* pontok alkotják a parabola-görbét (3.14b_1 ábra). [47]



3.14b_1 ábra



3.14b_2 ábra

---

[45] Euklidésznek is volt egy ilyen tárgyú műve, aminek a tartalmát nem ismerjük (a mű elveszett); Arkhimédész azonban bizonyára ismerte.

(A görög kúpszelet-elmélet azután Apolloniosz munkásságában teljesedett ki. A kronologikus rend: Euklidész i.e. 300 körül, Arkhimédész i.e. 250 körül, Apolloniosz i.e. 200 körül.)

[46] Minthogy a görög matematika nem használt szimbolikus képlet-nyelvet, az (S) öszefüggés is csak szöveges leírásban jelenhetett meg.

[47] Logikai funkcióját tekintve az (S)-et a parabola ún. <u>*szimptómája*</u>-ként kezelték. (Ez a görög eredetű szó a mai nyelvünkben is használatos „tünet”, „kórtünet”, „rossz dolog ismertetőjele” jelentéssel.) A görög matematikában egy dolog (objektum vagy kapcsolat) szimptómája a dolog olyan „alaptulajdonságát”, „karakterisztikus tulajdonságát” jelentette, amelyet jól lehet használni a dolog vizsgálatánál.

Tulajdonképpen egyfajta definícióról van szó. A definíció fogalma azonban általánosabb (elvontabb) a szimptómáénál, mert nem tartalmazza az említett gyakorlati szempontot. A görbék szimptómái a görög matematikában olyasfajta szerepet töltöttek be, mint a mai analitikus geometriában a görbék egyenletei vagy karakterisztikus geometriai tulajdonságai. (Lásd ezzel kapcsolatban és konkrétan az (S) szimptómára nézve a 3F.26 feladatot!)

A (c_1)-beli konfigurációt úgy nyerjük, hogy *E*-t speciálisan az *MB* szakasz *felezőpontjának* választjuk, amikor is az *NB*, *EF* szakaszok *H* metszéspontja felezi mindkét szakaszt, továbbá az *MA* szakasz fölött ugyanúgy járunk el, mint az *MB* szakasz fölött (3.14b_2 ábra). Ekkor *G* is felezi az *FH* szakaszt. Mármost

$$|NHG| = \frac{1}{2}\cdot|NEH|,\ \ |HBG| = \frac{1}{2}\cdot|EBH|,$$

tehát

$$|NBG| = \frac{1}{2}\cdot|NEB| = \frac{1}{4}\cdot|NMB|,$$

hasonlóan

$$|NG'A| = \frac{1}{4}\cdot|NAM|,$$

és így valóban

$$|NBG| + |NG'A| = \frac{1}{4}\cdot|NAB|.$$

(c_2) Ha a parabolaszelet kitöltését hasonlóképpen folytatjuk 4, 8, 16, … háromszög hozzávételével, minden ilyen lépésben hasonlóképpen az előző lépésbeli növekmény negyedével növekszik a kitöltő háromszögek együttes területe.

(c_3) Mai gondolkodásunkkal ebből a helyzetből így haladnánk tovább:

1. Ha sikerül kimutatnunk, hogy a parabolaszeletnek a kitöltő háromszögekkel le nem fedett része tetszőlegesen kis területű, hacsak a kitöltési folyamatban elég messzire megyünk,

2. akkor már csak a $t + \frac{1}{4}\cdot t + \frac{1}{4^2}\cdot t + \frac{1}{4^3}\cdot t + \ldots$ konvergens mértani sor összegezésére lenne szükség (a mai gondolkodásmódban). Ennek a sornak az összege, tehát a parabolaszelet területe:

$$t\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = t\cdot\frac{4}{3}.$$

(c_4) Arkhimédész az 1. feladatot nagyjából úgy végzi el, ahogyan az ma is kézenfekvő. Az *ABN* háromszög területe fele az *ABCD* paralelogramma területének, tehát több mint a fele a parabolaszelet területének; így a parabolaszelet területének kevesebb mint a fele nincs lefedve *ABN*-nel. Analóg módon nyerhetjük azt, hogy az *ANH* parabolaszelet területének kevesebb mint a fele nincs lefedve az *ANH* háromszöggel stb., vagyis az eljárás minden további lépésével is a felénél kevesebbre csökken az eredeti parabolaszelet le nem fedett részének a területe. Alkalmazható tehát az eredeti Eudoxosz-féle axióma (amely helyett ma rendszerint arra az általánosabb tényre hivatkozunk, hogy tetszőleges $0<q<1$ számra $q^n \to 0$, ha $n\to\infty$; l. a 3F.11 feladatot).

(c_5) A 2. feladatnál azonban szükségképpen más úton jár (hiányzott a konvergencia-fogalom, a sorozatok elmélete és a sorelmélet). A következő tételt bizonyítja:

Ha egy $\frac{1}{4}$ *hányadosú véges mértani sor összegéhez hozzáadjuk a legkisebb tag egyharmadát, akkor a legnagyobb tag négyharmadát kapjuk.*[48]

---

[48] Mai felfogásban − a véges mértani sor összegképlete birtokában − egyszerűen erről az egyenlőségről van szó: $\dfrac{1-\frac{1}{4^n}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Bizonyítás. Legyen *A, B, C, D, E* egy véges mértani sorozat[49], amelynek a hányadosa $\frac{1}{4}$.[50] Megmutatjuk, hogy ekkor

(M) $$A+B+C+D+E+\frac{1}{3}\cdot E=\frac{4}{3}\cdot A.$$

Legyen erre a célra

$$Z=\frac{1}{3}\cdot B,\ H=\frac{1}{3}\cdot C,\ F=\frac{1}{3}\cdot D,\ J=\frac{1}{3}\cdot E.$$

Ekkor

$$B+Z=\frac{1}{3}\cdot A,\ H+C=\frac{1}{3}\cdot B,\ F+D=\frac{1}{3}\cdot C,\ J+E=\frac{1}{3}\cdot D\ ^{51}.$$

Ezeket az egyenlőségeket összeadva

$$B+C+D+E+Z+H+F+J=\frac{1}{3}\cdot(A+B+C+D)$$

adódik, és minthogy

$$Z+H+F=\frac{1}{3}\cdot(B+C+D),$$

azért

$$B+C+D+E+J=\frac{1}{3}\cdot A,$$

amiből valóban (M) következik.[52]

(Arkhimédész nem említi, de nyilván úgy gondolja s a bizonyítás folytatásában ki is használja), hogy *akárhány tagú* véges mértani sorra érvényes az analóg állítás.)

(c_6) Most már a bizonyítás befejezése következik. Jelöljük *K*-val az *ABN* háromszög területének $\frac{4}{3}$-át és *T*-vel a parabolaszelet területét.

Ha a parabolaszelet területe nagyobb lenne *K*-nál, akkor

egyrészt (c_4) szerint a kitöltési folyamatban a le nem fedett részek együttes területe előbb-utóbb kisebbé válik annál a különbségnél, amennyivel a parabolaszelet nagyobb *K*-nál, ezért ekkor a kitöltő háromszögek együttes területe nagyobb *K*-nál;

másrészt azonban a (c_5)-ben bizonyított (M) egyenlőségből következik, hogy a kitöltő terület az eljárás minden lépésében kisebb *K*-nál. (Itt a *K*-nak az a szerepe, mint a (c_5)-beli $\frac{4}{3}\cdot A$-nak.)

Tegyük fel hát, hogy a parabolaszelet területe kisebb *K*-nál. Menjünk el oly messzire a kitöltési eljárásban, hogy az utolsó lépésben hozzácsatolt kitöltő háromszögek együttes területe − tehát ennek egyharmada is − kisebb legyen, mint a *K* és a parabolaszelet területe közti különbség. Ekkor

$K=$ a kitöltő háromszögek területe $+$ az utolsó bővítés területének harmada $<T+K-T=K$, ami szintén lehetetlen.[53]

---

[49] A jelölések furcsaságainak az a magyarázata, hogy itt hűen reprodukáljuk Arkhimédész bizonyítását.

[50] Az állítás tetszőleges (valós) értékű *A* kezdőtag mellett igaz, Arkhimédész azonban csupán arra gondolt, amit ma pozitív számnak nevezünk (az összes szereplő számokat még szakaszokkal is reprezentálta), és ezek közül is természetesen csak a racionálisokra; az ő számára azonban nem léteztek a „pozitív szám”, „racionális szám” fogalmak.

[51] Ezek magyarázatot nem igénylő elemi számolással adódnak.

[52] Nemcsak az egyes betűk megválasztása furcsa számunkra, hanem az is, hogy hiányoznak olyan − ma megszokott − eszközök, mint pl. az indexezés, a zárójelezés, a különböző betűtípusok), amelyekkel a formulákat és levezetéseket áttekinthetőbbé lehet tenni. (Lásd a 3F.1 feladatot.)

Minthogy tehát a parabolaszelet területe sem nagyobb, sem kisebb nem lehet *K*-nál, azért egyenlő *K*-val, ami bizonyítandó volt.

3.15 (a) Ha összevetjük az arkhimédészi („geometriai”) parabolaszelet-kvadratúrát az arkhimédészi körméréssel és az Euklidész *Elemek*ből megismert körméréssel, észrevehetünk és rendszerezhetünk néhány olyan princípiumot, amelyek azután orientálhatnak bennünket a számszerű „területmérés” további fejlődésének követésében. (3.11(b)-ben már elkezdtük ezt a munkát.)

(b) Mindig és mindenütt működik egy intuitív, matematikailag megalapozatlan és gyakran hallgatólagos *elképzelé*s „a területről”. Matematikai *fogalom*-nak (a szó mai értelmében) ez nem nevezhető. Vannak azonban olyan elemei,

(b_1) amelyek − történelmileg sokkal, de nagyon sokkal később − valóban a matematikai területfogalom alkotóelemeivé váltak,

(b_2) és olyanok is, amelyekre ez kevésbé vagy határozottan nem érvényes.

(c) A (b_2) csoportba tartozik az egyik legfeltűnőbb jellegzetesség: a gondolkodás egyedisége. Az arkhimédészi körkitöltés speciálisan a körhöz, az arkhimédészi parabolaszelet-kitöltés a parabola-szelethez van „hozzáigazítva”, kihasználva a mindenkor mérendő idomnak a geometriai sajátosságait. Ezek a nagyon speciális eljárások éppen ezért nem vihetők át az egyik fajta idomról a másikra. Ráadásul Arkhimédész nagyszerűen kihasználta azt a specialitást, hogy a parabola-szelet kitöltésére használt eljárás olyan végtelen mértani sorra vezet, amely − mai szóval − konvergens, és a hányadosa racionális, tehát a sorösszeg racionális-szám-szorosa a kezdőtagnak.

Általános területfogalom hiányában persze lehetne az egyes idomok „területét” magával a mérési eljárással definiálni. Ha a kört így, a parabolát úgy „töltjük ki”, vagyis − általános számszerű területfogalom hiányában − mintegy ezzel értelmezzük azt, amit a körlemez ill. a parabolaszelet „területének” nevezünk, akkor megtudtunk valamit a körről és megtudtunk valamit a paraboláról, de nem tudtuk meg, hogy mi „*a* terület”.[54]

(d) Az az elképzelés, hogy egy idomot nem csak véges sok (valamilyen értelemben már „mérhető”) „elemi idommal” lehet kitölteni, hanem − legalább képzeletben − végtelen sokkal is (pontosan: elemi idomok végtelen sorozatával), ahogyan az arkhimédészi körmérésnél és az arkhimédészi parabolaszelet-mérésnél megvalósul), kétségtelenül nagy előrelépés a véges kitöltésekkel szemben (amelyek például az átdarabolhatóság fogalmának keretét adják). Ez a (b_1) csoportba tartozik, mert ez az infinitezimális matematika irányába tett lépés, amely nélkülözhetetlen az analízis, a területfogalom, általánosabban a mértékfogalmak és a mindezek alapját képező valós-szám-fogalom kiépüléséhez.

Ha azonban azt a sztereotípiát halljuk vagy olvassuk, hogy ezek az arkhimédészi teljesítmények előképei a számszerű területfogalom létrehozása (és a terület kiszámítása) egyik leghatásosabb eszközének, a határozott (Riemann-féle) integrálnak, akkor ezt az elnagyolt kijelentést érdemes pontosabban átgondolnunk. Az integrál szempontjából az arkhimédészi módszert legalább annyira minősíthetjük (b_2) típusúnak, mint (b_1) típusúnak. Az integrálnál ui. lényegileg másról van szó.

(e) Arkhimédész (és az egész görög − Eudoxoszra és Antiphonra visszatekintő − exhausztiós irányzat) a T mérendő idomnak elemi idomok

$$A_1, A_2, A_3, \ldots.$$

végtelen sorozatával való teljes kitöltésére törekszik, ami mai fogalmainkkal azt jelenti, hogy az elemi idomok ponthalmaz-elméleti értelemben vett egyesítése *egyenlő* a *T*-vel.

---

[53] Itt kissé leegyszerűsítve rekonstruáltuk az eredeti (valójában inkább a közvetítők által ránk hagyott) megfogalmazást, amely fölöslegesen körülményes és nehezen értelmezhető.

[54] Ez fogalmilag különös anomáliát okoz akkor, ha arról van szó, hogy két idomnak különböző „mérési” eljárásokkal értelmezett „területe” egyenlő. Vajon mit jelent ez azon túl, hogy két olyan valós szám, amelyek különböző objektumokra alkalmazott különböző eljárásokból származnak, „véletlenül” egybeesik?

A határozott integrál esetében viszont olyan *véges* $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ elemi-idom-kollekcióról van szó, amelynek az egyesítése *nem egyenlő* a mérendő *T* idommal. A *T*-t csak „approximáló” kollekcióknak azután egy olyan végtelen

$$A_1^1, A_2^1, A_3^1, ..., A_{n_1}^1 ;\ A_1^2, A_2^2, A_3^2, ..., A_{n_2}^2 ;\ A_1^3, A_2^3, A_3^3, ..., A_{n_3}^3 ;\ ...$$

sorozatát igyekszünk találni (a sorozat *k*-adik eleme n_k elemi idom kollekciója, és általában szükségképpen $n_k \to \infty$, ha $k \to \infty$), amely bizonyos értelemben egyenértékűen reprezentálja a mérendő idomot. (A későbbiekben majd részletesebben is áttekintjük mindezt, hiszen a határozott integrál meglehetősen „komplex” fogalom; most csak azt az egy szempontot emeljük ki, amely az arkhimédészi módszerrel való összehasonlításban a leginkább szembe tűnő eltérést mutatja.) Tehát nem végtelen sok rész összege, hanem véges sok rész összegének határértéke, amikor is egyre újabb ilyen összegekből állítunk össze egy végtelen sorozatot. (Arkhimédésznél az egyszer bevont elemi idom rögzítve van: az egész eljárás során változatlanul ott marad a kitöltő kollekció tagjaként.[55])

Itt a matematikai gondolkodásnak olyan szükségképpen[56] lényegesen magasabb fogalmi szintjéről és nagyobb komplexitásáról van szó, amelyet az arkhimédészi módszerektől a matematikai gondolkodás fejlődésének több, meglehetősen magas lépcsőfoka választ el.[57]

(f) Az a tény, hogy ilyen végtelen közelítő-összeg-sorozatot sokféleképpen lehet fölépíteni, azt a további igényt veti föl, hogy ezeknek egyenértékűeknek kellene lenniök abban az értelemben, hogy ha az egyik eredményhez vezet (a megfelelő határérték létezik), akkor bármely másik is, és ezek a határértékek mind megegyeznek egymással. Máskülönben nem lehet ezen az úton egy számszerűterület-fogalmat létrehozni (amely bizonyos idomokhoz egyértelműen rendel hozzá egy nem-negatív valós számot[58]). Ez az euklideszi–arkhimédészi területmérésel kapcsolatos, (c)-ben említett hiányossággal analóg probléma.

3 B. Kepler, Cavalieri, Torricelli. Az infinitezimálisok „továbbélése” a 17. század után

3.16 (a) A terület-problematika azon eszmei ívének, amely Arkhimédésztől a 19. század végén megszülető modern mérték-felfogáshoz (és ezzel kapcsolatban a Riemann-integrál kikristályosodott modern elméletéhez) vezetett, volt egy sajátságos „kitérője”. Ezt a „végtelen kicsinyekkel” (más szóval „oszthatatlanokkal”, „infinitezimálisokkal”) való gondolati „kalkuláció” jellemzi. A 17. században nagyon jelentős volt ez az irányzat (bár már akkor is voltak, akik élesen szembenálltak vele); az utóhatásai azonban még századokon át megmaradtak (erre példát is mutatunk majd a 3.29 szakaszban).

(b) Leegyszerűsítve azt mondhatjuk, hogy

---

[55] Fontos, hogy észrevegyük a fogalmi különbséget a következő két koncepció között:

1. Egy végtelen számsorozat részletösszegei sorozatának határértéke (amivel az eredeti sorozat határértékét definiáljuk). Ez az arkhimédészi kitöltési koncepció lényege (a mai matematika nyelvén kifejezve).

2. Összegek végtelen sorozatának határértéke. Ez a határozott integrál fogalmának alkotóeleme, egy némileg leegyszerűsített felfogásban.

Hogy mekkora absztrakciós lépés szükséges az 1. szintről a 2. szintre való fölemelkedéshez, azt jól mutatja az a hatalmas intellektuális küzdelem, amely az analízis történetében a 17. századtól a 19. századig lezajlott, továbbá az egész 18. századot jellemző törekvések, hogy ezt a meredek emelkedőt megkerüljék az integrál „antiderivált”-ként való értelmezésével. Minderről részletesebben lásd alább 3.34–3.38.

[56] Ennél kevésbé absztrakt és kevésbé összetett apparátussal nem is lehet a terület-probléma megoldásához akár csak közelíteni is.

[57] Ennek tudatosítása semmiképpen nem csorbítja Arkhimédésznek, mint a görög matematika legnagyobb zsenijének az elismerését, akiben a saját kora matematikai gondolatvilágából való ki- és előretekintésnek egészen kivételes intellektuális bátorságát is tiszteljük. Ezek a megfontolások viszont nem csak a történeti tisztánlátást szolgálják, hanem segíthetnek visszaszorítani általában a területfogalomnak és speciálisan az integrálfogalomnak az oktatásban szélesen elterjedt torzító szimplifikálását.

[58] Ennek a terület-függvénynek még más feltételeknek is eleget kellene tennie (lásd 3.48).

(I) „végtelen sok véges összetevő összegzése” (euklideszi és arkhimédészi körmérés, arkhimédészi parabolakvadratúra)
helyett
(II) „végtelen sok végtelenül kicsiny összetevő összegzésével”
igyekeztek az „integrálási” feladatokat megoldani.[59]

(c) A mából visszatekintve meglepő, sőt első látásra megdöbbentő, hogy milyen sok esetben tudtak ilyen − fogalmilag abszurd − módon helyes eredményre jutni.

Az, hogy ezek az eredmények „helyesek”, például az „igazi” integrálszámítással ellenőrízhető. Az integrál modern elméletéből továbbá magyarázatot is nyerhetünk arra a kérdésre, hogy *miért* vezethettek ezek a tulajdonképpen matematikán kívüli, inkább „misztikus” spekulációk helytálló eredményekhez? [60]

(d) Az irányzatot három jeles képviselője, Kepler, Cavalieri és Torricelli munkásságának egy-egy ilyen természetű részletével és a hosszú távú utóhatásnak egy érdekes példájával mutatjuk be.[61]

3.17 Példaképpen fölidézzük, hogy miként nyeri Kepler az *r* sugarú kör területének az összefüggését a *k* kerülettel, vagyis a $t = \frac{1}{2} \cdot r \cdot k$ formulát. A 3.17a ábra Keplernek a hordó-mérésről szóló híres munkájából[62] való. A *BG* körlemezt „végtelen sok, végtelenül keskeny” olyan egyenlőszárú háromszög egyesítésének tekinti, amelyek magassága a *BA* szakasz (a háromszög alapja pedig a körvonal egyetlen pontja). A körlemez területe tehát megegyezik azon derékszögű háromszög területének felével, amelynek az egyik befogója *BA*, vagyis a kör sugara, a másik pedig a *BC* szakasz, amely nem egyéb, mint a „kiegyenesített körvonal”.

Kepler − korának megfelelő kissé nehézkes és „atomisztikus” − megfogalmazásában:

---

[59] A „kitérő” szót azért használtuk, mert (II) valóban nem az (I)-től a modern integrál-koncepcióhoz vezető fogalom-fejlődési út mentén van. A kitérő *oka* az lehetett, hogy (I)-et elégtelennek találták (valóban az), de arra a hatalmas absztrakciós ugrásra és a gondolkodás olyan fokú komplexitására, amellyel az (I)-ről a modern integrálfogalomhoz lehet emelkedni, még távolról sem érett meg az idő.

[60] Lásd a 3.23* szakaszt!

[61] Tulajdonképpen egy kompakt személyi körről van szó, amelynek a centrumában nem kisebb személyiség állt, mint Galileo Galilei (1564−1642), a hírneves fizikus, asztronómus és matematikus, aki a természettudományoknak a teológiától és ókori természetfilozófiától való függetlenítésével, kísérleti tudománnyá alakításával és matematizálásával kiemelkedett a 17. századi tudományos forradalom elindítói közül. Cavalieri és Torricelli tanítványai voltak Galileinek,

Galileit foglalkoztatta az anyag atomisztikus fölfogása: az anyagi atomokat abban az értelemben gondolta „legkisebbek”-nek, hogy tovább nem oszthatók, de matematikailag az oszthatóságot vég nélkülinek tartotta (az ebből eredő „végtelen kicsinyek” teszik lehetővé a Cavalieri-féle indivizibilis-módszert). „Discorsi e dimostrazioni matematiche …” (magyarul: Matematikai érvelések és bizonyítások, 1986) c. híres (nagyrészt mechanikai tárgyú) művének első részében („1. nap”) konkrét feladatokkal kapcsolatban foglalkozik a matematikai vonatkozásokkal.

[62] Johannes Kepler (1571−1630) itt említett latin nyelvű művének címe: *Nova stereometria doliorum vinariorum* („A boroshordók új sztereometriája”).

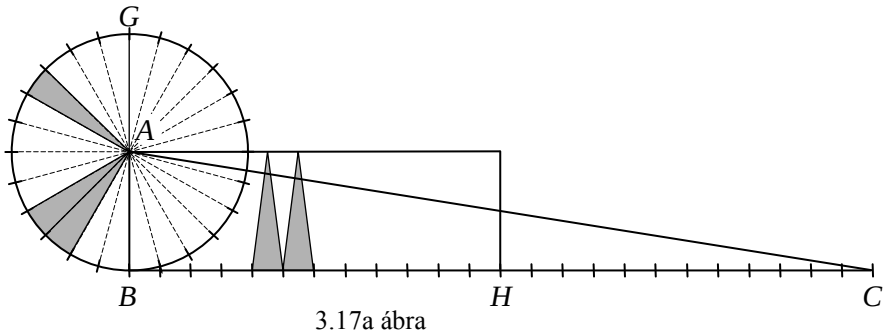
Keplert a tudománytörténeti népszerűsítés gyakran kizárólag az asztronómia nagy megújítójaként mutatja be, aki *Astronomia nova* („Új asztronómia”) című főművében hatalmas fordulatot hozott azzal, hogy az addigi pusztán kinematikai leírások helyett dinamikailag is leírta a bolygók mozgását a Nap körül.

Kepler azonban nagyon jelentős matematikus is volt, aki a „hordószámítás”-ról szóló művében fontos lépéseket tett a terület- és térfogatszámítás küzdelmes útján az integrálfogalom felé (nem kerülve ki a „végtelen kicsinyek” − mint ma már tudjuk, igen „veszélyes” − ösvényét sem).

Matematikatörténeti szempontból megemlítendő a *Harmonices mundi* („A világ harmóniája”) című grandiózus műve is (1619). Itt egy olyan átfogó, a geometriára, a zenére és az asztronómiára is kiterjedő egységes és „harmonikus” matematikai világképet igyekszik kidolgozni, amelyet a pitagoreus ideál megvalósítása utolsó nagyszabású kísérletének tekinthetünk. Ebben közölte egyébként először a bolygómozgásra vonatkozó három híres „Kepler-törvény” közül a harmadikat.

„A BG kör kerületének annyi része van, ahány pontja, vagyis végtelen sok; minden részecskét egy egyenlőszárú háromszög alapjának tekinthetünk az AB szárakkal [63] *úgy, hogy a körlemezben végtelen sok ilyen háromszög fekszik, amelyeknek az A körközéppont a közös csúcsa. Mármost egyenesítsük ki a kör kerületét a BC szakasszá. Ekkor a végtelen sok háromszög alapjai mind a BC szakaszra vannak egymás mellé elhelyezve és azon sorakoznak.”* [64]

Másszóval: a kör területe megegyezik az AH téglalap területével, ahol *H* a *BC* szakasz felezőpontja, ami bizonyítandó volt. (L. a 3F.12 feladatot.)



3.17a ábra

Az ábra persze nem közvetlenül illusztrálja a leírt gondolatmenetet (ami teljesen lehetetlen lenne), inkább csak „metaforikus” támasz annak érzékeltetéséhez.[65]

3.18 A 17. sz.-ban sok olyan lépés, szellemes megoldási kísérlet történt az analízis alapproblémáinak kezelésére, amelyek − túlságosan korlátozott hatókörük, fogalmi megalapozatlanságuk (sőt olykor zavarosságuk, sőt miszticizmusuk), az algoritmizálásra való alkalmatlanságuk stb. miatt − egyediek maradtak és később feledésbe is merültek. A matematika fejlődésének egy fontos sajátosságát mutatja azonban az a tény, hogy több ilyen, „zsákutca”-ként minősíthető próbálkozás − a problémaérzékenysége és az ötletgazdagsága révén − mégis fontos motívumokat szolgáltatott a megszülető differenciál- és integrálszámítás nagy klasszikusai számára.

A Cavalieri-féle elmélet egyike a legnevesebb − sőt, a folyamatos és széles körű bírálatok értelmében „leghírhedtebb” − ilyen kezdeményezéseknek abból a korból.

3.19 (a) Cavalieri a *„A folytonos oszthatatlanok geometriája, egy bizonyos új módszerrel bemutatva”* című művében[66] így írta le azt a princípiumot, amelyet ma is <u>*Cavalieri-elv*</u>-nek nevezünk[67]:

1a. *Ha a síkban két párhuzamos egyenes között elhelyezett két idomnak bármely ezekkel az egyenesekkel párhuzamos egyenessel való metszetei egyenlők, akkor e két idom egyenlő.*

---

[63] Értsd: az *AB*-vel egybevágó szárakkal.

[64] Ennek a megfogalmazásnak a térbeli és rövidebb megfelelője: *„A gömb végtelen sok kúpból áll, amelyeknek közös csúcsa a gömb középpontja, az alapjuk pedig a gömbfelületen fekvő egy-egy pont.”*

[65] Lényegében ugyanez az ábra (a Kepleréhez nagyon hasonló kommentárral) jelenik meg Walter Lietzmann *Methodik des mathematischen Unterrichts* (A matematika-oktatás módszertana) c. három kötetes művének 2. kötetében (1916, 1922 !), ami ennek a gondolkodásmódnak a történelmi szívósságát mutatja. Igaz, a szerző megjegyzi, hogy ennek csak heurisztikus értéke van; az oktatásban rá kell mutatni, hogy a korrekt határátmenetek elengedhetetlenek (akár ténylegesen elvégzik ezeket akár nem). V. ö. 3.26(c)-vel és 3.29-cel!

(W. Lietzmann a 20. század első fele egyik kiemelkedő (német) matematika-didaktikusa, a középiskolai matematika-oktatás gyökeres megújítását szolgáló híres „Meráni mozgalom” egyik vezéralakja.)

[66] Bonaventura Cavalieri (1598?−1647) e könyvének eredeti latin címe: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (1635, második, javított és bővített kiadásban 1653).

Cavalieri Milanoban született, nagyrészt Bolognában folytatta matematikai munkásságát és ott is halt meg. Autodidakta matematikus létére nagy feltűnést keltett geometriai, trigonometriai és mechanikai tartalmú műveivel és kitűnő szögfüggvény-logaritmus-táblázataival.

[67] A megfogalmazást szabad fordításban, némileg a mai matematikai nyelvezethez igazítva közöljük.

1b. *Ha hasonlóképpen a térben két párhuzamos sík között elhelyezett két testnek bármely ezekkel a síkokkal párhuzamos síkkal való metszetei egyenlők, akkor e két test egyenlő.*

2. *Ennek a princípiumnak általánosított alakja az, amelyben a mérték-összehasonlítás alapja nem a metszetek egyenlősége, hanem azok mértékének az állandó aránya*.

(b) A Cavalieri-elmélet szemléletében egy síkidom „oszthatatlanai” az idom metszetei egy párhuzamos egyenessereg egyeneseivel (vagyis az idom páronként párhuzamos „húrjai”), egy test ”oszthatatlanai” pedig egy párhuzamos síksereg síkjaival való metszetek.

A princípiumokban megfogalmazott feltételek mellett pedig azért egyezik meg a két síkidom ill. test számszerű mérete (a korabeli − a görög tradíciót folytató − szóhasználatban: azért „egyenlők”) az elmélet szerint, mert ugyanazokból az „*oszthatatlanok*”nak − a hagyományos és közkeletű latin kifejezéssel: „*indivizibiliseknek*” − nevezett „*atomok*”-ból vannak „összerakva”.[68]

(c) Ez a Cavalieri-mű hírhedten bonyolult, és ami a legnagyobb baj: nagyon homályos, sőt misztikus.

3.20 A Cavalieri-elv csak egyik lehetséges konkretizálása egy általánosabb gondolkodásmódnak, amelynek a centrumában ez az elképzelés áll:

Egy $\mathcal{A}$ alakzat és egy $\mathcal{B}$ alakzat egymásnak kölcsönösen egyértelműen megfeleltetett, geometriailag különböző „atomjai” (különböző szerkezetűek, alakúak sőt dimenziójuak is lehetnek, csak a mérőszámuk egyezzék meg) egyenértékűek”-nek tekintendők és az „összegük” is ugyanaz a két alakzatnál.

A feltétel persze teljesül, ha az egymásnak megfeleltetett „atomok” *egybevágók* (ez a Cavalieri-elv feltétele), de az általánosabb verziókra is fogunk a következőkben példákat látni Keplertől, Törricellitől és magától Cavalieritől is.

Bővebb megfogalmazásban: A Cavalieri-elvek tk. leszűkítették a kepleri koncepciót azáltal, hogy pl. a síkbeli esetben a két összehasonlítandó idomnak olyan egymáshoz viszonyított síkbeli elhelyezkedését tételezték föl, amelyhez létezik egy párhuzamos egyenessereg úgy, hogy annak minden eleme egybevágó szakaszokat metsz ki a két idomból. Ez a leszűkítés egyfajta uniformizálás, amely praktikus szempontból előnyös. A Cavalieri-módszer fogalmi lényege azonban ugyanaz, mint Kepler általánosabb *indivizibilis geometriájáé*[69]. Az alapelv:

Az összehasonlítandó idomok − „szerencsés esetben” − azért *egyenértékűek a számszerű terület tekintetében, mert ugyanazokból az oszthatatlanokból („atomokból”) épülnek föl*.

Azért, hogy a megfogalmazásokban könnyebb legyen finomabb megkülönböztetésekkel élni, külön nevet adunk ennek a princípiumnak: <u>*Kepler-elvnek*</u> fogjuk nevezni.[70]

(A Cavalieri-elv feltevése csupán egy konkrét garanciája annak, hogy ez a „szerencsés eset” bekövetkezik.[71])

A mai matematika szemszögéből a Kepler-elvnek ill. a szűkebb (gyakorlatiasabb) Cavalieri-elvnek egyaránt vannak pozitivumai és negatívumai (l. a táblázatot).

---

[68] Az elképzelés szerint az „atomok” *végtelen kicsinyek*, amin azt kell érteni, hogy van mértékszámuk (akár vonal hosszaként, akár felület területeként, akár test térfogataként), amely *nem nulla, de kisebb minden véges* (a mai kifejezéssel persze pozitív) *számnál.*

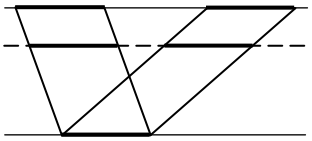
[69] Indivizibilis (latin eredetű) = oszthatatlan, atom (görög eredetű) = oszthatatlan, infinitezimális (latin eredetű) = végtelen (ebben a témakörben: végtelenül kicsiny); indivizibilis, atomisztikus, infinitezimális geometria (persze nem maga a geometria „oszthatatlan” ill. „végtelenül kicsiny”) a szóban forgó egész gondolkodási irány.

[70] Ez nem sztenderd elnevezés.

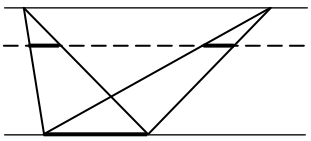
[71] A kepleri alapelv a feladatok szélesebb körében alkalmazható, igaz, nagyobb ötletességet és alkotó fantáziát is követel, mint a Cavalieri-elv.

A Cavalieri-elv	
pozitívumok	*negatívumok*
(p_1) A Riemann-integrállal igazolni lehet a Cavalieri-elv *alkalmazhatóságát* és alkalmazásának *eredményeit* „nem túl bonyolult” síkidomok és testek körében.[72]	(n_1) A mai matematika semmiképpen sem igazolhatja az indivizibilis geometria *következtetéseit*. (Ha két idom vagy test egyaránt mérhető és megegyezik a mértékük, akkor nem azért, mert "ugyanazokból az indivizibilisekből” vannak fölépítve.
(p_2) Az „indivizibilis geometriának” heurisztikus értéke van.[73]	(n_2) Az ily módon megsejtett kapcsolatokat mindenkor matematikailag korrekt módon verifikálni kell.[74]
(p_3) Ahhoz, hogy olyan alakzat-párokat találjunk, amelyekre a Cavalieri-elv alkalmazható, alkotó fantáziára van szükség, s ezt didaktikailag jól ki lehet használni.	(n_3) Ezen a módon mindig csak két idom ill. test számszerű területének ill. térfogatának viszonya állapítható meg, nem önmagában egy alakzat mértéke.

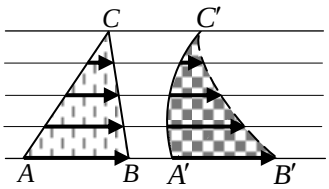
3.21 Ennek a gondolkodásmódnak a gyökerei a görög matematikába − legalább Papposzig (i. sz. 300 körül) nyúlnak vissza. Az ősforrás azonban bizonyára sokkal régebben, mégpedig a filozófiában, konkrétan Démokritosz (i. e. 460 körül) atomisztikus természetfilozófiájában keresendő.[75] I. e. 350 körül két nagyon neves filozófus, Arisztotelész és Xenokratész határozottan meg is fogalmazta ezeket az elképzeléseket.[76] Ez a gondolkodásmód Európában a középkor folyamán is föl-fölbukkant, pl. Oresme írásaiban.[77]



3.21a ábra



3.21b ábra



3.21c ábra

Azt a kognitív folyamatot azonban, amely *közvetlenül* ehhez a „fölfedezéshez” [78] vezethetett, talán a következőképpen lehet rekonstruálni. A 3.21a és a 3.21b ábrán két olyan − „két párhuzamos egyenes között elhelyezett” − idomot látunk, amelyekről tudjuk, hogy egyenlő területűek, és észre-

[72] Lásd 3.30 !

[73] Ezt még a mai iskolai matematika is kihasználhatja (ami nem is szokatlan némely országban).

[74] Ez alól csak akkor mentesülhetünk, ha idomoknak ill. testeknek valamely jól definiált körében tételszerűen igazoltuk, hogy a Cavalieri-módszer mindenkor korrekt eredményt solgáltat. (Ilyen például a 3.30 alatti tétel.)

[75] Démokritosz sokoldalú filozófus, a mechanikus materialista filozófiai irányzat elindítója. A legtöbb művét csak más filozófusok leírásaiból és reagálásaiból ismerjük. Jelentős volt a geometriai munkássága is; Arkhimédész szerint azonos alapterületű és azonos magasságú hengerek, hasábok és gúlák térfogatát és felületét hasonlította össze.

[76] Érdekes, hogy mindketten Platon Akadémiájának tagjai, sőt vezető személyiségei voltak. Arisztotelész az „Oszthatatlan vonalakról” c. művében − a közkeletű latin cím: *De lineis insecabilibus* − szól erről az elképzelésről, Xenokratésznek pedig töredékesen maradt fenn egy ugyanerről szóló írása.

[77] Nicole Oresme (1323 körül − 1382) francia matematikus, természettfilozófus, teológus, püspök. Műveiben egyaránt találunk sok mélyreható elemzést az antik természetfilozófia témáiban és határozottan előremutató matematikai kezdeményezéseket (pl. törtek, törtkitevőjű és irracionális kitevőjű hatványok, a harmonikus sor divergenciája, a koordinátageometria csírái stb.), amelyeknek később, a természettudományok és a matematika 16. és a 17. századi megújulásakor, széleskörűen ismertté váltak és ösztönzőleg hatottak.

[78] A mából visszatekintve inkább „föltevést” kell mondanunk, hiszen az idézett princípium a mai felfogás szerint nem bizonyított állítás; sőt jelentős számú kortárs sem tartotta annak.

vesszük[79], hogy teljesül a Cavalieri-elv feltétele. Ez a *megfigyelés* vezethetett annak a *kérdésnek* a tudatosulásához, hogy ha − megfordítva − két idom teljesíti ezt a feltételt, akkor egyenlő területűek-e. A 3.21c ábrán az *ABC* háromszögből indulunk ki, és az önkényesen választott $A'C'$ ívhez igazítva, a vastag nyíllal jelzett szakaszok − vagyis a háromszög „atomjai” vagy „oszthatatlanjai” − átmásolásával pontonként előállítjuk a $B'C'$ ívet. Így jön létre az $A'B'C'$ idom. A kérdés ezek után az, hogy vajon „egyenlő területűek”-e az ABC, $A'B'C'$ idomok?

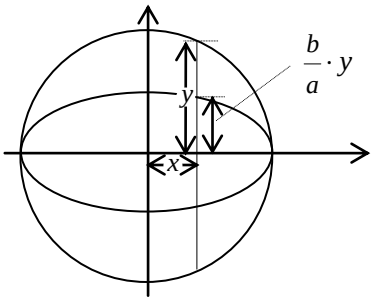
3.22 A Cavalieri-módszert az alkalmazásának két példájával illusztráljuk.

(a) *Az első példa*. A koordinátasíkon a 3.22a ábra szerint elhelyezett *a* sugarú kör és 2*a* nagytengelyű, 2*b* kistengelyű ellipszis egyenlete

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad \text{ill.} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

amiből

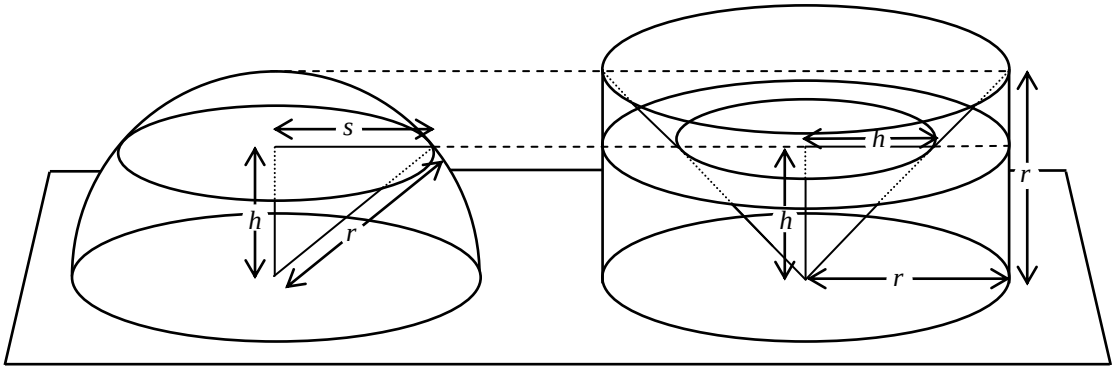
$$|y| = \sqrt{a^2 - x^2} \quad \text{ill.} \quad |y| = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \le x \le a).$$



3.22a ábra

Az *y*-tengellyel párhuzamos, azonos *x*-értékhez tartozó húrok hosszának aránya így egységesen $\frac{b}{a}$, és a Cavalieri-elv szerint ez az ellipszis területének és a kör területének az aránya is. Ha ismerjük a kör területét, akkor ebből így adódik az ellipszis területe: $\frac{b}{a} \cdot \pi a^2 = ab\pi$.

(b) *A második példa*. Tekintsük a gömb térfogatának azt a kiszámítását, amire a 3.22b ábra emlékeztet. Egy *r* sugarú félgömböt és egy *r* sugarú, *r* magasságú egyenes körhengert egy közös síknak egyazon oldalára helyezünk az ábra szerint; továbbá a hengerbe az ábra szerint elhelyezve képzelünk egy *r* sugarú, *r* magasságú egyenes körkúpot is. Az eljárásban az a „jobb oldali” test fog szerepelni, amely a hengerből marad, ha elvesszük belőle a kúpot. Ezek a testek így valóban „két párhuzamos sík között” vannak elhelyezve, ami a módszer alkalmazhatóságának feltétele.



3.22b ábra

Tekintsük most a félgömbnek a metszetét azzal a síkkal, amely ezekkel a síkokkal párhuzamos és *h* magasságban fekszik. Ez körlemez; a területe:

$$\pi s^2 = \pi r^2 - \pi h^2.$$

A jobb oldali testnek ugyanezzel a síkkal való metszete: egy körgyűrű, amelynek ugyanez a területe:

$$\pi r^2 - \pi h^2 = \pi s^2.$$

[79] Igazolni is tudjuk (elemi geometriai eszközökkel).

A Cavalieri-elvből tehát az következik, hogy a félgömb térfogata megegyezik ezen henger és ezen kúp térfogatának a különbségével, vagyis a $\pi r^2 \cdot r - \pi r^2 \cdot \frac{r}{3} = \frac{2}{3} \cdot \pi r^3$ értékkel, és így az *r* sugarú gömb térfogata: $\frac{4}{3} \cdot \pi r^3$.

3.23 (a) A Cavalieri-elv jelentős feltűnést keltett a kortársak körében; hevesen vitatkoztak róla[80], és a kritikák, amelyek főleg a módszer fogalmi megalapozatlanságát kifogásolták, a 19. századig folytatódtak. Az „oszthatatlanok" elképzelése valóban annyira homályos volt, hogy aligha nevezhető matematikai „fogalom"-nak. Másrészt azonban látványosak voltak a módszer alkalmazásának egyes sikerei[81], és emiatt nem is lehetett azt egyszerűen ignorálni. Végül is hasonló volt a helyzet az analízis egy másik területén, a differenciálszámításban, ahol az apparátus kiépítése és sikeres alkalmazása századokkal megelőzte a tiszta és megbízható fogalmi alapvetést. [82]

(b) A két − hasonlóan „konfliktusos" − eszmetörténetnek a végkifejlete is hasonló, és ezek össze is kapcsolódtak. Ahogyan a 19. század folyamán a valós számtestre és a konvergenciára alapozott differenciálszámítás oldotta fel a differenciálszámítás fejlődésének több évszázados belső ellentmondásait, a Cavalieri-elvet is az ugyanezen alapokra épített mértékgeometria és integrálszámítás eszközeivel sikerült „konszolidálni". A Cavalieri-elvnek a határozott integrál elméletében való „igazolása" azonban (persze olyan korlátozó feltételek mellett, amelyek függvények integrálhatósági feltételeiből következnek), bár önmagában érdekes, egyben „fölöslegessé" is teszi az eredeti, „misztikus" Cavalieri-módszert; azt mutatja ui., hogy minden olyan egyedi esetben, ahol a Cavalieri-módszer sikeres, az átfogó és sztenderd integrálszámítás is célhoz vezet (méghozzá egyszerűbben, ti. egy másik idom ill. test mértékének a közbeiktatása nélkül).[83]

A mai matematikában − a világ több országában olykor az iskolai matematikában is − korrekt módon szerepelnek[84] a „Cavalieri-princípiumok", természetesen a misztikus infinitezimálisok nélkül,

---

[80] Cavalieri az 1647-ben megjelent *Exercitationes geometricae* … (Geometriai gyakorlatok …) c. művében meg is kísérelte, hogy visszaverje a támadásokat.

[81] Ennek megítélésekor figyelembe kell azonban vennünk, hogy a módszer alkalmazásának van egy olyan korlátja, amely pl. az integrállal való terület- ill. térfogatszámításnál nem lép fel: A Cavalieri-módszer a kérdéses idom ill. test területének ill. térfogatának kiszámítását egy másik idom ill. test megmérésére vezeti vissza. (Például a 3.22-beli második példában akkor vezet sikerre a módszer, vagyis akkor nyerjük a gömbtérfogat képletét, ha eleve ismerjük két másik test − egy bizonyos egyenes körhenger és egy bizonyos egyenes körkúp − térfogatát. Hasonlót mondhatunk az ottani első példával kapcsolatban is.)

[82] A differenciálszámítás történetével az 5. füzetben foglalkozunk részletesen.

[83] A „fölöslegesség" itt a matematika-tudomány szempontjából értendő; az iskolai matematikában − pontosabban: annak az integrálszámítást megelőző fázisaiban vagy ha integrálszámítást nem is oktatnak − mind a mai napig helye van a Cavalieri-módszernek. Példa: egybevágó sokszögekre, mint alapokra állított egyenlő magasságú gúlák ill. hasábok térfogata is egyenlő (aminek alkalmazásaként adódik azután, hogy egy gúla térfogata egyenlő az ugyanolyan alapú és ugyanolyan magasságú bármely hasáb térfogatának egy harmadával).

Érdekességként említjük meg, hogy a Cavalieri-módszer iskolai felhasználásának valószínüleg az USA-ban vannak a legerősebb hagyományai. E. T. Bell neves amerikai matematikus (1883−1960) „*The Development of Mathematics*" c. − éles kritikai hangvételű matematika-történeti művében (1940, 1945) többek között így ír:

„ *... But there is one 'anticipator' of the calculus, B. Cavalieri (...), who merits more than a passing citation for the lasting mischief his 'anticipation' has done. Cavalieri's method of indivisibles has endured, to the distraction of hundreds of teachers of the elementary calculus who must extirpate heretical notions of infinitesimals from their students' minds*."

(„Van azonban a differenciál- és integrálszámításnak egy *'előfutára'*, B. Cavalieri […], aki az 'előfutárkodásával' okozott maradandó károk okán egy futólagos említésnél többet érdemel. Az *oszthatatlanok* Cavalieri-féle módszere tartósan megőrjíti a tanároknak azokat a százait, akik a differenciál- és integrálszámítás elemeit tanítják, és ki kellene űzniük a tanulóik gondolkodásából a „végtelen kicsinyek" eretnek fogalmait.")

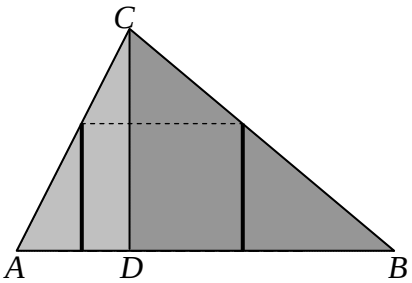
[84] Óvatosabban és némi szkepticizmussal megfogalmazva: ma már megvan ennek a *lehetősége*.

mint az integrálszámítás nyelvén megfogalmazott és az integrálszámítás eszközeivel bizonyított tételek. (L. alább 3.30.)

3.24 (a) A Kepler-elvvel szemben kezdettől fogva aggályok támadtak annak matematikai megalapozatlansága, homályos miszticizmusa miatt. Az alábbi ellenpélda a legegyszerűbbek közül való és igazán „kompetens” szerzőtől származik.

(b) A 3.24a ábrán $BC \neq AC$, és az *ABC* háromszöget a *DC* magasság két derékszögű háromszögre bontja. Az *ADC* háromszög *DC*-vel párhuzamos „atomjai” egy-egyértelműen megfelelnek a *DBC* háromszög *DC*-vel párhuzamos „atomjainak” úgy, hogy az egymásnak megfelelő „atomok” egybevágók.

A két részháromszög tehát ugyanazokból az „atomokból” van fölépítve; területük azonban különböző.



3.24a ábra

(c) Ezt az egyszerű, meghökkentő példát maga Cavalieri közli (egy Torricellihez intézett levelében), igaz, nem a Cavalieri-elv, hanem a − gyengébb feltételű − Kepler-elv ellenpéldájaként, óvatosságra intve ezzel.[85]

3.25 Más szerzők még tovább gyengítik a Kepler−Cavalieri−princípium feltételét (anélkül, hogy ezt elvontan megfogalmazná) azáltal, hogy síkidomok „atomjaiként” nem csak egyenes szakaszokat, hanem görbe vonalakat ill. nem-sík felületeket is megenged. Ennek két példáját idézzük föl Torricelli[86] műveiből.

3.26 (a) Az első példa Kepler 3.17 alatt ismertetett eljárásának egy változata. Az *r* sugarú *K* körlemez „atomjai”-nak a $0 < x < r$ sugarú, *K*-val koncentrikus körvonalakat, az *ABC* háromszög „atomjai”-nak pedig az *ST* szakaszokat tekintjük (3.27a ábra). Ha a háromszög *BC* alapja − ugyanúgy, mint Keplernél − a *K* kiegyenesített kerülete, vagyis a hossza $2\pi r$ [87], akkor minden *x* sugárhoz tartozó *ST* szakasz az *x* sugarú kör $2\pi x$ hosszúságú kiegyenesített kerülete. Ezen a módon egy-egyértelmű megfelelés jön létre a *K* körlemez „atomjai” és az *ABC* háromszög „atom”-jai között úgy, hogy az egymásnak megfelelő „atomok” − ha nem is „egyenlők”, de − *azonos mértékszámúak*. Torricelli következtetése az, hogy ezért a *K* területe is megegyezik az *ABC* háromszög területével, vagyis az *r* sugarú körlemez területének képlete: πr^2 ($\frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot r$).

---

[85] Lehetséges, hogy Cavalieri ezzel annak szükségességét akarta érzékeltetni, hogy a Kepler-elvet a Cavalieri-elv szigorúbb feltételével "„iztonságosabbá” tegyük. (Ez csak feltételezés, nem történeti tény.)

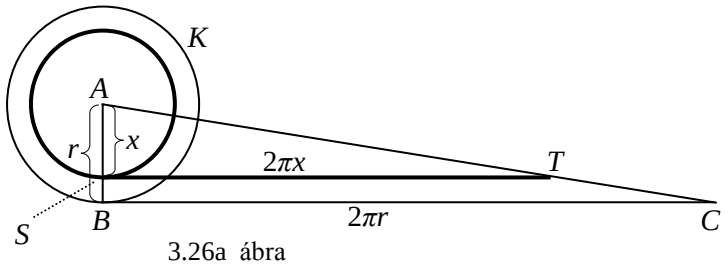
[86] Evangelista Torricelli (1608−1647) olasz fizikus, Galilei egyik kiváló tanítványának, Castellinek tanítványa, később magának Galileinek munkatársa és − *Trattato del moto* (Értekezés a mozgásról, 1641) c. könyvével − művének folytatója; végül 1642-ben, Galilei halála után annak utóda is lett „a firenzei nagyherceg matematikusa”-ként.

Fizikusként igen jelentős hidraulikai és a légnyomásra vonatkozó kutatásokat végzett. Matematikusként sokrétű és fontos szerepe volt az analízis kifejlesztésében, és jelentősen befolyásolta annak olyan klasszikusait, mint Barrow és Newton.

Galilei „Discorsi …” c. híres művében is vannak utalások az „oszthatatlanok módszerére”, és Torricelli közreműködött e mű függelékének elkészítésében (Galilei életének utolsó évében).

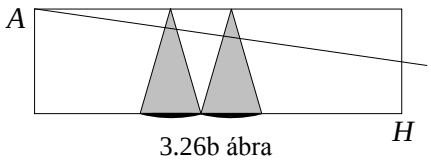
(Németh László *Galilei* c. drámájában, a főszereplő Galilei mellett, fontos és szép − a dráma mondanivalójának lényegét világosan kifejező − szerepe van Castelli és Torricelli alakjának is.)

[87] Ennek ismeretét föltételezi ez az eljárás.



3.26a ábra

(c) Torricelli ezen a módon akarja elhárítani (pontosabban: tárgytalanná tenni) pl. Guldinnak[88] azt a konkrét ellenvetését Kepler eljárásával (3.17) szemben, hogy Kepler „nem igazi” (egyenlőszárú) háromszögekre bontja a körlemezt, hanem olyanokra, amelyeknek az alapja − egyenes szakasz helyett − körív, amelyek tehát nem illeszthetők bele megfelelően a 3.17a ábra *AH* téglalapjába (3.26 b ábra.)



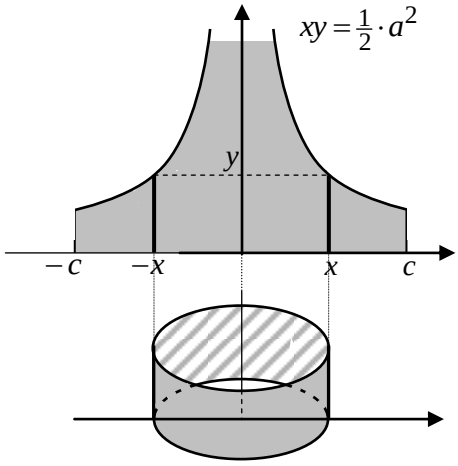
3.26b ábra

3.27 (a) A második példa, amelyet Torricellitől idézünk, egy olyan forgástest térfogatának számításáról szól, amely „a végtelenbe nyúlik”.[89] A test az

$$xy = \tfrac{1}{2} \cdot a^2$$

egyenletű hiperbola első negyedbeli ága $[0; c]$ $(c > 0)$ fölötti részének az *y*-tengely körüli megforgatásával keletkezik (3.27a ábra); azért ”végtelen”, mert az *y*-tengely nem-negatív részét teljesen tartalmazza.

Ezt a testet is sok különféle módon lehet „osztha-tatlanok”-ra bontani. Torricelli a testbe az ábra szerinti *x* $(0 \le x \le c)$ sugarú és *y* magasságú egyenes körhengerek palástját választotta; ezek felületének a mértékszáma: $2\pi xy$, vagyis (a hiperbola egyenletének a figyelembe vételével) πa^2. Fontos − és meglepően szép jelenség − hogy ez az érték mindegyik hengerpalástra ugyanaz.



3.27a ábra

---

[88] Paul Guldin (1577−1642) svájci olasz matematikus (eredetileg aranyműves és jezsuita szerzetes). Matematikusként Németországban, Itáliában és Ausztriában dolgozott. Kezdetben a Föld mozgásáról és a Gergely-naptárról publikált. A ”Centrobaryca …” című, súlypont-meghatározásokkal foglalkozó főművében közölte a ma *Guldin-szabályok* néven ismert két tételt forgásfelületek felszínéről és forgástestek térfogatáról. Ez a téma természetesen a látóterébe hozta az abban a korban népszerű „atomisztikus” terület-, felszín- és térfogat-elméletet, amelynek egyik leghevesebb bírálójává vált. Főleg az elmélet két vezéralakjának, Keplernek és Cavalierinek az ilyen eljárásait támadta.

Cavalieri nem utolsósorban abban a reményben adta ki 1653-ban „Geometria indivisibilibus …” c. 1635-ben megjelent fő művének átdolgozott változatát, hogy ezzel megkísérelje kivédeni ezeket a támadásokat. Ugyanakkor ő maga is − ugyanúgy, mint sok korabeli matematikus, akár résztvett ebben az atomisztikus „mozgalomban, akár nem − tisztában volt vele vagy legalábbis érezte, hogy ez az elmélet nagyon sebezhető, ami a fogalmi megalapozást illeti; a gyakorlati sikerek azonban magukkal ragadták.

Guldin egyébként nem az egyetlen következetes ellenfele volt az „oszthatatlanok geometriájának”.

[89] Ezt a példát Torricelli 1643-ban több matematikussal (köztük Cavalierivel is) levélben közölte (amire Cavalieri a válaszlevelében lelkesedő dícsérettel reagált). A „végtelenbe nyúló test” véges és számszerűen meghatározható térfogata akkoriban szenzációként hatott.

A leírásban nem az eredeti, ma már nehézkesnek ható megfogalmazást követjük, hanem a mai matematikai nyelvet és eszközöket használjuk.

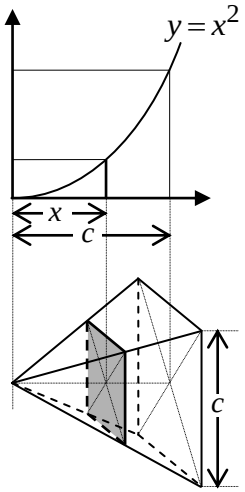
Most már csak „összegezni” kell ezeket a mértékszámokat, amit Torricelli egyszerűen úgy „intéz el”, hogy ezt a konstanst *c*-vel szorozza[90]: így a

$$\pi a^2 c$$

formulához jut, és ez valóban a szóban forgó „végtelen hiperboloid” térfogatának helyes képlete! (Lásd az 3F.22 feladatot!)

3.28 (a) Az utolsó 17. századbeli példánkat ismét Cavalieritől idézzük. Az összehasonlítandó alakzatok: az $y = x^2$ egyenletű parabola ordinátahalmaza („a görbe alatti idom”) 0-tól *c*-ig $(c > 0)$ és a *c* oldalú négyzet alapú *c* magasságú egyenes gúla (3.27a ábra). Amit keresünk: Az ordinátahalmaz területének és a gúla térfogatának a kapcsolata.

(b) Minden $0 < x < c$ számhoz egyértelműen hozzárendelhető a parabola *x* abszcisszájú pontjának az ordinátája (a számértéke: x^2) és a gúlának a magasságára merőleges azon síkkal való metszete, amelynek a csúcstól való távolsága *x* (ez egy *x* oldalú négyzet, a területének számértéke szintén x^2). Ezen a módon a parabola $[0; c]$ fölötti ordinátahalmazának az *y*-tengellyel párhuzamos „atomjai” (az x^2 hosszúságú ordinátavonalak) és a gúlának az alappal párhuzamos „atomjai” (*x* oldalú négyzetek, a területük mértékszáma: x^2) között egy-egyértelmű megfeleltetés van úgy, hogy az egymásnak megfelelő elemek *számértéke* egyenlő.



3.28a ábra

Cavalieri ebből arra következtetett, hogy a parabola ordinátahalmazának a területe számszerűen egyenlő a gúla térfogatával, vagyis az *x* oldalú és *x* magasságú négyzetes egyenes hasáb térfogatának, $x \cdot x^2$-nek a harmadával; ez helyes eredmény, amelyet ma így fejeznénk ki:

$$\int_0^c x^2 dx = \frac{x^3}{3} \quad (c > 0).$$

(c) Ez a példa azért is meghökkentő, mert az egymáshoz rendelt „atomok” nagyon különböző természetűek (egydimenziósak ill. kétdimenziósak), amelyeknek az „egyenlőségéről” csak abban az értelemben lehet beszélni, hogy egy szakasz hosszának és egy négyzetlap területének ugyanaz a *mértékszáma*. Itt tehát a Kepler-elvnek egy „nagyon liberális” felfogása érvényesül.

3.29 (a) Az infinitezimálisokkal („végtelen kicsinyekkel”) való manipuláció − amelynek Cavalieri volt a legnevesebb képviselője − különböző változatokban századokon át hatalmas szívóssággal tartotta magát. Jól karakterizálja ezt a következő részlet egy 1921-ben (!) megjelent, a gimnáziumi matematikát bemutató könyvből.[91]

---

[90] Torricelli ezzel a lépéssel tovább növeli az egész gondolkodásmód matematikai megalapozatlanságát.

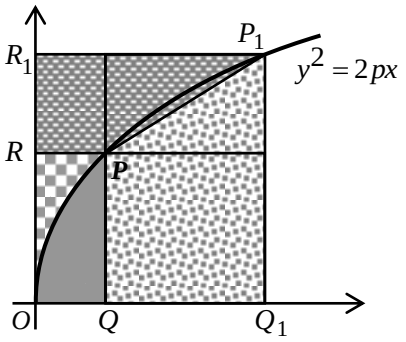
[91] MEHLER, F. G.: *Hauptsätze der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten* (Az elemi matematika fő tételei gimnáziumok használatára). A. változat. Az eredeti könyv 31., A. Schulte-Tigges által újra feldolgozott kiadása. Berlin és Lipcse 1921.

Ez a könyv műfajilag átmenet a tanulóknak szánt tankönyv és a gimnáziumi matematikának a tanárokat segítő enciklopédiája között. Az eredeti mű 1859-ben jelent meg. Fél évszázadon át tartó sorozatos újrakiadások és felújítások után 1907-től két párhuzamos változatban jelentették meg. A B. változat (inkább a reál-gimnáziumok számára) erősebben igazodott az új tantervekhez, módszerekhez és irányzatokhoz (Németországban 1905-től kezdve jelentős reformmozgalom működött a középiskolai matematika modernizálására) , míg az A. változat (inkább a humán gimnáziumok számára, ebből idézzük a következő részletet) nagyobb mértékben vette tekintetbe ennek a kézikönyvnek a széleskörű elterjedtségét és „azoknak az érzelmeit, akiknek ez a könyv a hagyományos formájában a sokéves használat által kedvessé vált és a szívükhöz nőtt” (idézet az előszóból).

(b) „Legyenek $P(x;\,y)$ és $P_1(x_1;\,y_1)$ az $y^2=2px$ egyenletű parabola különböző pontjai (3.29a ábra). A PP_1Q_1Q, PP_1R_1R trapézek a parabola PP_1 húrjának az *x*-tengelyre ill. az *y*-tengelyre való merőleges vetítésével keletkeznek; a vetületek: QQ_1 és RR_1. E trapézek területének viszonya:

$$\frac{|QQ_1|\cdot(|QP|+|Q_1P_1|)}{|RR_1|\cdot(|RP|+|R_1P_1|)}=\frac{(x_1-x)(y_1+y)}{(y_1-y)(x_1+x)}=$$

$$=\frac{x_1-x}{x_1+x}\cdot\frac{y_1+y}{y_1-y}=\frac{y_1^2-y^2}{y_1^2+y^2}\cdot\frac{y_1+y}{y_1-y}=\frac{(y_1+y)^2}{y_1^2+y^2}.$$



3.29a ábra

„Ez a hányados, ha végtelen kicsire vesszük PP_1-et, nyilván a 2 határértékhez közeledik.[92] Minthogy pedig úgy tekinthetjük, hogy a végtelen kicsiny PP_1 húr egybeesik a végtelen kicsiny PP_1 parabolaívvel, azért a végtelen kicsiny PP_1 ívnek az *x*-tengelyre vetítésével keletkező idom kétszer akkora, mint ennek az ívnek az *y*-tengelyre vetítésével keletkező idom. Ha mármost az *OP* ívet ilyen végtelen kicsiny részekre osztva képzeljük el, akkor látjuk, hogy az *OQP* idom területe is kétszerese az *OPR* idoménak. Így hát az *OQP* idom területe kétharmada az *OQPR* téglalap területének, vagyis egyenlő $\frac{2}{3}\cdot xy$-nal; másszóval: azon négyzet területével, amelynek az oldala $\frac{2}{3}x$ és y középarányosa. Az *OQP* idom tehát négyzetesíthető”.[93] (Lásd az 3F.21 feladatot!)

3.30 (a) A Cavalieri-elv „hamis” gondolkodásmódja „lelepleződött” volna és nem csábíthatta volna a matematikusokat több mint másfél évszázadon át, ha nem vezetett volna számszerűen korrekt eredményekre. Vajon mi ennek a − mai tudásunk alapján igencsak meghökkentő − jelenségnek a magyarázata? A történeti folyamatokat és a Riemann-integrált is világosabban látjuk, ha átgondoljuk, hogyan igazolhatók − a feladatok bizonyos köreiben − a Cavalieri-módszer alkalmazásainak eredményei a Riemann-féle határozott integrállal.

Történeti szempontból érdekes a könyv két változatában megtestesülő párhuzamosság az oktatásban a matematika korrekt, a kor tudományosságának megfelelő bemutatása és a teljesen anakronisztikus, de nagyon mélyen gyökerező hagyomány között. (Vajon a jelenkorban teljesen mentesek vagyunk az ilyen anomáliáktól?)

[92] Ha ui. $y_1\to y$, akkor $\frac{(y_1+y)^2}{y_1^2+y^2}\to\frac{(2y)^2}{2y^2}=2$.

[93] Ez a „levezetés” jól példázza az „atomisztikus terület-gondolkodás” zavarosságát. Itt a tekintett idomok „atomjai” nem szakaszok (*QP* nem is kétszerese *RP*-nek, kivéve egyetlen esetet: a $P\left(\frac{p}{2};\,p\right)$ pontot), hanem „végtelenül keskeny trapézek”. Ilyenek azonban nem léteznek (akár csak „végtelenül kicsiny parabolaívek”), tehát „két ilyen idom területének hányadosa” sem létezik. (Megjelenik itt a „határértékek hányadosának” és a „hányados határértékének” az a naív azonosítása is, amely hosszú időn át nehezítette például a differenciálhányados fogalmi tisztázását.)

Az „eredmény” egyébként helyes: $\int_0^c\sqrt{2px}\,dx=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{2p}\cdot\sqrt[3]{c^2}=\frac{2}{3}\cdot c\cdot\sqrt{2pc}$.

(b) A 3.30a,b szimbolikus ábrákon[94] két-két idom van elhelyezve egy-egy derékszögű koordinátasíkon. Az $\mathcal{F}$, ill. $\mathcal{G}$, idomot felülről és alulról az f_1 és f_2 ill. a g_1 és g_2 görbék, balról és jobbról az $x=a$, $x=b$ egyenletű egyenesek határolják. f_1, f_2, g_1, g_2 olyan függvények, hogy

$$0 \le f_2(x) \le f_1(x),\ 0 \le g_2(x) \le g_1(x)\ \ (x \in [a;b]),$$

és ezek az idomok olyan alakúak, hogy

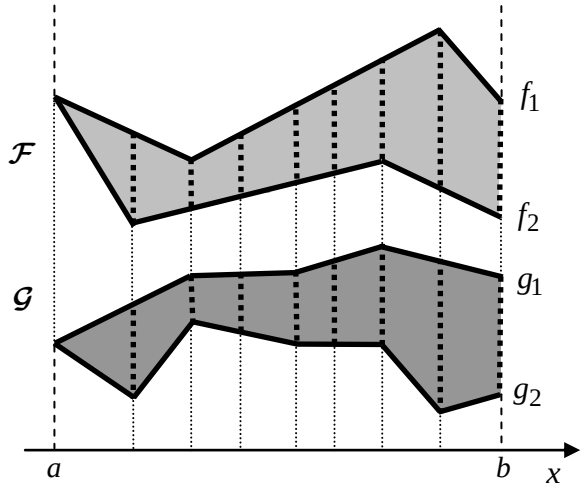
(E) $$f_1(x) - f_2(x) = q[g_1(x) - g_2(x)]\ \ (x \in [a;b], q > 0)$$ [95],

tehát alkalmazható rájuk a Cavalieri-elv 3.19(a), 2. alatti változata,

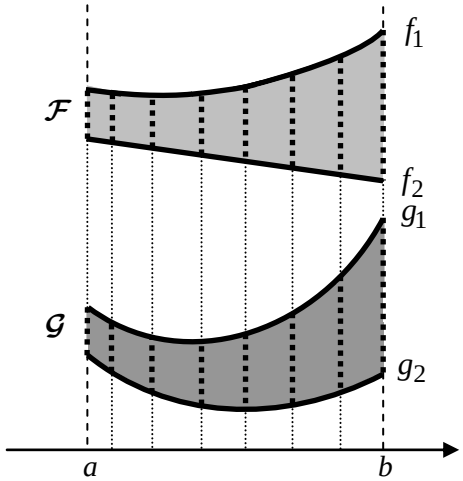
(c) Tegyük föl, hogy léteznek az

$$\int_a^b f_1(x)dx,\ \int_a^b f_2(x)dx\ ,\ \int_a^b g_1(x)dx,\ \int_a^b g_2(x)dx$$

integrálok.



3.30a ábra



3.30b ábra

(d) Ekkor $\mathcal{F}$-nek és $\mathcal{G}$-nek van számszerű területe, $|\mathcal{F}|$ és $|\mathcal{G}|$, továbbá léteznek az

$$\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx,\ \int_a^b [g_1(x) - g_2(x)]dx$$

integrálok is, és

$$|\mathcal{F}| = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int_a^b q[g_1(x) - g_2(x)]dx =$$

$$= \int_a^b q[g_1(x) - g_2(x)]dx = q\left[\int_a^b g_1(x)dx - \int_a^b g_2(x)dx\right] = q|\mathcal{G}|.$$ [96]

---

[94] A 3.30a ábra tk. reális; csak azért mondjuk szimbolikusnak, mert − az egyszerű rajzolhatóság és a jó áttekinthetőség érdekében − töröttvonalakkal határolt idomokat választottunk; ez a specialitás azonban nem feltétele annak, amit itt elmondunk.

Ebben a speciális esetben egyébként teljesen elemi geometriai módszerrel is igazolható, hogy teljesül a Cavalieri-elv állítása (l. az 3F.23 feladatot!). A 3.30b ábra konfigurációja nem ilyen; ott a Cavalieri-elvnek az elemi geometrián ténylegesen túlmenő mondanivalója van.

[95] A $q=1$ választás felel meg a Cavalieri-elv 3.19(a), 1a. speciális változatának.

[96] A Riemann-integrál elméletének elemi tétele: Ha *u* és *v* egy $[a;b]$ intervallumon értelmezett és ott integrálható függvények, akkor minden $ru + sv\ (r, s \in \mathbb{R})$ függvény is integrálható $[a;b]$-n és

$$\int_a^b [ru(x) + sv(x)]dx = r\int_a^b u(x)dx + s\int_a^b v(x)dx.$$

(e) Ami a (c) alatti föltevést illeti: Cavalieri − és módszerének követői általában is − nem tekintenék az ilyen feltételt korlátozásnak, hiszen olyan síkidomokkal és testekkel foglalkoztak, amelyek folytonos függvényekkel − sőt azok közül is csak a „legszelídebbekkel” − írhatók le.

(g) A Riemann-integrál fogalmából és elméletéből visszatekintve tehát valóban igazolhatók a Cavalieri-princípium *eredményei*.[97]

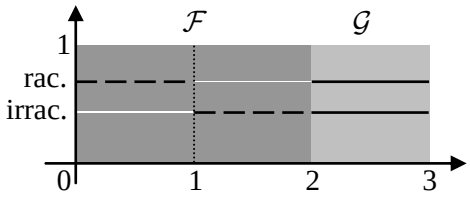
3.31 (a) Semmiképpen nem igazolható azonban a Cavalieri-módszer *gondolkodásmódja* (vagyis annak a Cavalieri szellemében való „bizonyítása”, hogy a Cavalieri-elv feltevéséből következik az állítás).

(b) 3.30(d)-vel és a hozzáfűzött lábjegyzettel kapcsolatban érdemes emlékeztetni: Abból, hogy $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$ létezik, nem következik, hogy az $\int_a^b f_1(x)dx$, $\int_a^b f_2(x)dx$ integrálok is léteznek.

Legyen pl. f_1 tetszőleges $[a;b]$-n értelmezett, nem-integrálható függvény és $f_2(x) = f_1(x) - 1$ $(x \in [a;b])$. Ekkor f_2 sem integrálható $[a;b]$-n, de $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int_a^b dx\,(= b - a)$.

(c) Ezzel rámutathatunk a Cavalieri-elv korlátozott érvényére is, ti. arra, hogy a Cavalieri-elv feltétele teljesülhet olyankor is, ha a következtetés (a számszerű területek egyenlősége) szóba sem jöhet, mert a két terület − vagy legalább az egyik − nem is létezik (vagyis $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ ill. $\mathcal{F}$ vagy $\mathcal{G}$ nem mérhető). Ezt a következő példával illusztrálhatjuk.

(d) *A példa leírása* (3.31a ábra). A világosabban árnyalt $\mathcal{G}$ ponthalmaz: 1 oldalú négyzet. Az $\mathcal{F}$ ponthalmaz azonban nem a sötétszürkével jelzett téglalap, hanem a szaggatott vonallal megjelölt − az x-tengellyel párhuzamos, 1 hosszúságú − szakaszok egyesítése. Ez azért nem tölti ki a téglalapot, mert a racionális ordinátájú szakaszok a téglalapnak csak a bal oldali felére, az irracionális ordinátájúak pedig csak a jobb oldali felére terjednek ki.



3.31a ábra

(e) $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ ebben az elhelyezésben teljesíti a Cavalieri-elv feltételét.

(f) Nem helytálló azonban az, hogy $|\mathcal{F}| = |\mathcal{G}|$ $(=1)$, hiszen, bár valóban $|\mathcal{G}| = 1$, $|\mathcal{F}|$ nem is létezik. (Lásd az 3F.24 feladatot!)

(g) Megjegyzendő: ez a példa anakronisztikus abban az értelemben, hogy az olyan „bonyolult szerkezetű” ponthalmazok, mint a (c) alatt definiált $\mathcal{F}$ halmaz, nem kerültek és nem is kerülhettek a matematikusok látókörébe a 19. századig, annak is körülbelül a közepéig. Az „idom” ill. „alakzat”-*elképzeléseket* (szabályos, szigorú *definíció* lehetetlen lett volna) a 17. és 18. században egyáltalán nem zavarhatták a (c) alatti konstrukcióhoz hasonló lehetőségek.

(h) Másrészt ez sem ad fölmentést az „atomisztikus területszámítás” matematikai megalapozatlanságának „vádja” alól.

3.32 Nekünk azonban nem szabad a történetietlenség hibájába esnünk. A hagyományosan a *Cavalieri-elv* szóval fölidézett, de annál sokkal átfogóbb és komplexebb gondolkodásmódot úgy tekinthetjük, mint egy természetes (sőt talán szükségszerű?) szakaszt abban a „hosszú menetelés”-ben, amely a görög matematikától a valós számtest, a mértékgeometria és az analízis (különösen a Riemann-integrál) és a Jordan-Peano-mérték 19. századi kikristályosodásáig terjed. A következő táblázatban ennek a módfelett szövevényes történetnek azt a nagyon érdekes, dialektikus szerkezeti sajátosságát

[97] Igaz, hogy itt csak a princípium egyik formáját és annak is csak a síkbeli változatát vettük tekintetbe, de a célunk pusztán az volt, hogy az ilyen „igazolás”-nak a lehetőségére és a természetére rámutassunk.

részletezzük és tesszük áttekinthetővé, amelyet ezen alfejezet bevezetéseként, 3.16(b) alatt már érintettünk.[98]

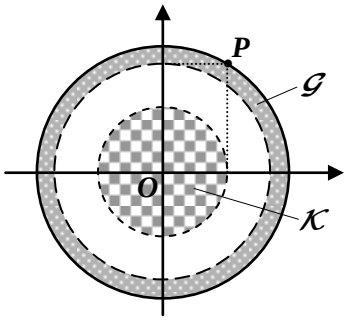
	Görög gondolkodás (pl. Eudoxos-Euklidész-Arkhimédész-féle körmérés és Arkhimédész-féle parabolakvadratúra)	*Cavalieri-féle gondolkodás*	*Modern gondolkodás (pl. Riemann-integrál és Jordan-Peano-mérték)*
1. *lépés*	Véges sok (véges) mennyiség összegezése	Határfolyamatok elképzelése (végtelen kicsinyek „előállítása” véges mennyiségekből).	Véges sok (véges) mennyiség összegezése.
2. *lépés*	Ezen alkotóelemek számának növelése minden határon túl	Az így nyert „atomok” „összegezése”.	Az így nyert összegek határértéke.

(A háttérben − mint ennek az ell[illegible]dásos fejlődéstörténetnek a v[illegible]zódó gerince − a valós számtest fogalmának és a konvergencia fogalmaknak a hiánya ill. a megteremtésükért folytatott és nagyon sokáig sikertelen kísérletek állnak.) A 3 C részben majd ezt a küzdelmes folyamatot kíséreljük meg érzékeltetni.

Előbb azonban a „végtelen kicsinyek geometriájának” még egy példáját idézzük föl, amely abban különbözik az eddig bemutatottaktól, hogy itt nem csak az „okfejtés” abszurd, hanem az „eredmény” is az.

3.33 (a) Az „infinitezimális” gondolkodásmód késői utóhatásának egyik érzékletes és könnyen leírható példáját Bolzano[99] egy híres könyvéből idézzük (helyenként kissé korszerűsített ábrával és szöveggel, de a matematikai lényeg tekintetében változatlan módon).

(b) A 3.33a ábrán a vastag folytonos vonallal rajzolt kör egy rögzített − *O* középpontú − körvonalat képvisel. E körvonal minden olyan *P* pontja, amely az első síknegyed belsejébe esik, két további *O* középpontú − szaggatottan rajzolt − körvonalat generál: az egyiknek a *P* abszcisszája, a másiknak a *P* ordinátája a sugara. Így keletkezik a $\mathcal{K}$ körlemez és a $\mathcal{G}$ körgyűrű.



3.33a…. ábra

Az utóbbiak nincsenek rögzítve. Ha a *P* pont a rögzített körvonalon pl. az *y*-tengely felé halad, akkor a szaggatott körvonalak úgy változnak, hogy a körlemez egyre kisebb, a körgyűrű pedig egyre „keskenyebb” lesz.

---

[98] Ez még így, kibővített megfogalmazásban is csak szüségképpen erősen egyszerűsített, sematizált módon történhet, de az áttekintést éppen ez a sematizálás könnyíti meg.

[99] Bernhard Bolzano (1781−1848) cseh filozófus, teológus és matematikus, különös egyedi szereplője volt a tudományok történetének. Miután 1819-ben filozófiai és politikai − a Habsburg-uralommal szembenálló − magatartása miatt megfosztották prágai egyetemi tanári állásától, visszavonultan élt és alkotta matematikai és logikai műveit, amelyek életében jórészt nem is kerültek nyilvánosságra. Matematikusként főleg a fogalmilag ingatag „Cauchy előtti” analízis szigorú bírálójaként és az analízis megújítására irányuló törekvései révén volt jelentős. Több tekintetben megelőzött a modern analízist megalapozó olyan klasszikusokat, mint Cauchy és Weierstrass. (A folytonosság fogalma, a folytonos függvények közbensőérték-tétele, a ma Bolzano-Weierstrass-tételként ismert eredmény, példa mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható függvényre, később másokról elnevezett sorelméleti tételek stb.) A Cantor-féle halmazelméletnek is az egyik előkészítője volt, főleg az 1851-ben megjelent „Paradoxien des Unendlichen” (A végtelen paradoxonai) c. művével (amelyben a „végtelen” egyaránt jelent végtelen kicsit és végtelen nagyot).

Ebből idézzük a szóbanforgó paradox példát. (Ezt Bolzano átalakítva-leegyszerűsítve veszi át Galilei „Discorsi … c. híres művének „Az 1. nap” c. részéből; egyébként maga Galilei is mástól kölcsönözte az alapötletet.) Lásd Galileo Galilei: „Matematikai érvelések és bizonyítások …” Európa Könyvkiadó 1986, 39.−43. o.

A P pont által egymáshoz rendelt $\mathcal{K}$ körlemez és $\mathcal{G}$ körgyűrű azonban mindig egyenlő területű. (Lásd az 3F.25 feladatot!)

(c) „Ha mármost a *P* pont végtelenül közel kerül az *y*-tengelyhez, akkor a $\mathcal{K}$ körlemez az *O* pontba megy át, a $\mathcal{G}$ körgyűrű pedig a rögzített körvonalba." Ez pedig Bolzano szerint − „sok geométert arra indított, hogy úgy vélje":

(1) A $\mathcal{K}$ és $\mathcal{G}$ közötti kapcsolat − ti. az egyenlőség (a terület tekintetében) − a határátmenetnél is megmarad, és ezért

(2) az *O* pont ugyanolyan nagy, mint a rögzített körvonal.

A végkövetkeztetés pedig az, hogy

(3) „*minden kör középpontja akkora, mint a kör kerülete*."[100]

(d) Természetes, hogy a matematika − és a témakör tekintetében különösen az analízis − két évszázados fejlődése Cavalieritől (a 17. század közepe) Bolzanoig (a 19. század közepe) valami nyomot hagy az ilyen dolgok kezelésében. Ez Bolzanonál abban mutatkozik, hogy ő *nem tényként* közli a (c)-beli teljesen abszurd (3) mondatot, hanem *paradoxonként*, mintegy figyelmeztetésül a „balesetveszélyre" a „végtelen kicsik" világában; a paradoxont föloldani, bár megkísérli, igazából még nem tudja.[101]

(e) Ebben az egyszerű példában újra megjelenik „az infinitezimálisok geometriája" két évszázadának egyik jellegzetes gondolati eleme: a különböző dimenziójú objektumok jogosulatlan egy kategóriába sorolása.

3 C. A 18. század: Euler, Lacroix, Poisson

3.34 (a) Kissé elnagyoltan azt lehet mondani, hogy a 17. században az „infinitezimálisok" elképzelése és a velük való „manipulálás" − és nem kevésbé az ezzel kapcsolatos súlyos kételyek és viták − uralták a matematikának ezt a területét. Ez a homályos, misztikus elképzelés nem csak az analízisnek a leibnizi és newtoni „differenciál- és integrálszámítást" megelőző periódusában (mint pl. Keplernél és Cavalierinél) volt igen eleven, hiszen maga Leibniz is infinitezimálisok végtelen sok tagú „összegeként" képzelte el a függvénygörbe alatti területet.[102]

(b) A 18. században azután a matematika-tudomány a területmérés és a határozott integrál tekintetében egy újabb sajátságos történeti kitérőt tett: az volt az uralkodó tendencia, hogy az integrált egészen másképpen, ti. „antiderivált"-ként fogták föl (amit ma *határozatlan integrál*nak nevezünk). Ez a − szintén Leibnizre visszavezethető − koncepció tulajdonképpen további kényszerű leszűkítése volt az integrálra alapozott területfogalom gyakorlati hatókörének, hiszen feltételezte, hogy olyan „görbe alat-

---

[100] Érdekes, hogy Bolzano nem jegyzi meg, hogy (3) következtében egy pontot minden pozitív számmal mérni lehetne.

A dimenziók összezavarása, terület és ívhossz hamis azonosítása „infinitezimálisoknál" gyakori gondolkodási hiba volt az „infinitezimális geometria" két évszázados történetében.

Valójában egy pontnak és egy körvonalnak (mindkettőt síkbeli ponthalmaznak tekintve) tényleg megegyezik a területe, ti. mindkettőé nulla; az „infinitezimális geometria" művelői azonban sokszor azonosították a körvonal „*területét*" annak *hosszával*.

[101] Igaz, hogy ez a veszélyérzet már a Cavalieri-kör tagjainál is jelentkezett (több-kevesebb tudatossággal). Maga Galilei is − akinek *Discorsi*-jából merítette Bolzano ezt a példát − többször figyelmeztetett erre.

[102] A számunkra megszokott $\int$ integrál-jelet − torzított *S*-betűként − is Leibniz vezette be. Johann Bernoulli, aki az először Jacob Bernoulli által használt„integrál" szót és ennek megfelelően az *I* betűt javasolta Leibniznek, végül is elfogadta „a Leibniz iránti tiszteletből" (Cajori) az $\int$ jelet. Maga Leibniz egy 1675-ös kéziratában használta először ezt a jelet; nyomtatott publikációkban csak évekkel később. (Mindez rekonstruálható Leibniznek az 1850-es években kiadott összegyűjtött matematikai írásaiból és a matematikusokkal folytatott, 1899-ben kiadott levelezéséből.)

Leibniz az (elnyújtott) *S* jellel egyértelműen a „summa" (latin), „Summe" (német), „sum" (angol) „összeg" szóra utal, márpedig itt másról nem is lehetett szó, mint *infinitezimálisok* „összegéről".

ti terület”-ről van szó, amely egy „analitikusan” (képletszerűen) megadható függvényhez[103] tartozik (ez az első leszűkítés), méghozzá olyanhoz, amelynek ismerjük az „antideriváltját” (ez a második leszűkítés).[104]

(c) A területnek „összeg”-ként való kezelése tehát háttérbe szorult, de csak fogalmi vonatkozásban! A terület tényleges − persze csak „megközelítő”[105] számszerű megállapítása „összegek” által abban a században is művelt kutatási terület volt, sőt az approximáció mértékével (hibakorlát megadásának lehetőségeivel) is foglalkoztak (ami persze − mai szemmel nézve − ismét megoldatlan fogalmi problémákkal járt). Speciális esetekben törekedtek annak kimutatására is, hogy a hiba tetszőlegesen kicsivé tehető (bár ilyen irányú általános, átfogó vizsgálatokat nem folytattak). Ezek a munkák amelyekben a század olyan kiemelkedő matematikusai, mint L. Euler[106], S.-F. Lacroix[107], S. D. Poisson[108] stb. vettek részt, párhuzamosan folytak a végtelen sorok és a differenciálegyenletek területén folytatott hasonló kutatásokkal és összefonódtak azokkal.

3.35 (a) A század legnagyobb hatású és legtermékenyebb matematikusa, Euler, az *Institutiones calculi integralis* (Az integrálszámítás alapfogalmai, 1768/70) c. művében[109] fejti ki − abban a században először − rendszeresen az integrál értékének az „összegekkel” való megközelítése alapfogalmait és elméletét. Ez azonban nem a ma használt Cauchy−Riemann−Weierstrass-féle integrálfogalom, hiszen Euler is antideriváltként *definiálta* az integrált; azokat a bizonyos „összegeket” pedig az integrál − közelítő − *kiszámítása eszközének* tekintette. Ezt pedig azzal indokolta (ill. magyarázta), hogy két egymáshoz „közeli” hely között a függvényérték „majdnem” konstansnak tekinthető[110], tehát a függvénygörbe alatti területnek e két hely közötti része közelítőleg helyettesíthető egy téglalap területével, amelynek egyik oldala a két hely által közrefogott szakasz, a másik pedig e zárt intervallum valamely helyén vett függvényérték (ordináta).[111] A „téglányösszeg”: az integrációs intervallum valamely véges felosztása minden részintervallumához tartozó egy-egy egy ilyen „téglány-terület” összege.

---

[103] Az egész 18. században erősen jellemző volt, hogy a függvény fogalmát azonosították az ilyen értelemben "„analitikus” függvényével.

[104] Azt a kérdést, hogy ez a második leszűkítés csak formálisan az-e, vagy tartalmilag is, csak a 19. század elején tudatosították és igyekeztek meg is válaszolni. (Lásd Cauchynak a 3.37(b) alatt idézett két tételét.)

[105] Az idézőjel azért indokolt, mert egészen a valós szám fogalma és a számszerű területfogalom 19. századi korrekt felépítéséig az egész matematika-történetén végigvonul az a logikai képtelenség, hogy olyasmit „közelítünk” meg, ami nincs definiálva, tehát fogalmilag nem is létezik. (A 4. füzetben újra szólunk majd erről.)

[106] Leonhard Euler, svájci, 1707−1783.

[107] Silvestre François Lacroix, francia, 1765−1843. (Eulerről és Lacroix-ról a valós számokról és a differenciálszámításról szóló füzetben bővebben szólunk majd.)

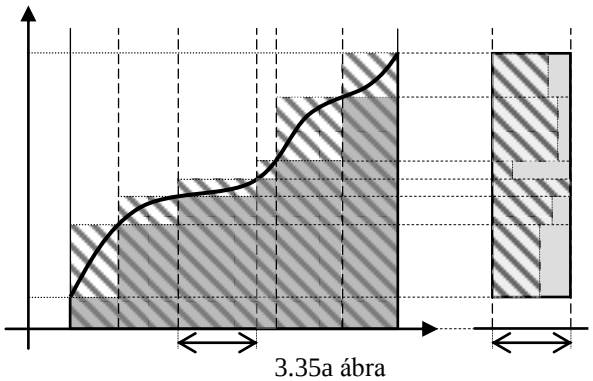
[108] Simon-Denis Poisson, francia, 1781−1840. Nagyon sokoldalú, kiemelkedően termékeny matematikus és fizikus, a tiszta és az alkalmazott matematika, a fizika és az égi mechanika csaknem minden területén jelentős eredményei voltak. Meghatározó szerepe volt a matematikai fizika kibontakozásában a 19. század elején.

[109] Ezt a művet megelőzte az 1755-ös *Institutiones calculi differentialis* (A differenciálszámítás alapfogalmai). Mindkét mű Szentpétervárón jelent meg, ahol Euler az életének és munkásságának két fontos szakaszát töltötte. (Az „institutiones” szó mindkét latin nyelvű mű címében magyarra az „alapfogalmai” mellett a „rendszere” szóval is fordítható.) A sorrend bizonyára nem független az integrálnak a 18. századra jellemző, említett felfogásától: Az integrál *fogalmilag* az antiderivált, de *kiszámításának* fontos *eszközei* a − ma pl. téglányösszegeknek nevezett − közelítő összegek.

[110] Ebből kitűnik, hogy Euler az integrálandó függvény folytonosságát nem az integrálhatóság (egyik) elegendő *feltételének* tekintette. Valóban: Euler számára minden függvény eleve „folytonos”; a ma „folytonosság”-nak nevezett tulajdonság a függvény fogalmában volt involválva (ami karakterisztikus volt az egész 18. század matematikájára).

[111] Később azután Cauchy következetesen a részintervallum bal oldali végpontjában vett függvényértéket szerepeltette a közelítő összegekben.

(b) Eulert az is foglalkoztatta, hogy „mennyire jó” egy ilyen „közelítés”. A legegyszerűbb helyzetben, monoton[112] integrandusok esetében meg is találta a megoldást abban az észrevételben, hogy a görbe alatti idom területe két korlát közé fogható: az alsó ill. felső korlát bármely olyan téglányösszeg, amelyben minden részintervallumot az ott előforduló minimális ill. maximális függvényértékkel szorzunk meg (3.35a ábra).[113]



3.35a ábra

Észrevette továbbá, hogy a két korlát különbsége tetszőlegesen csökkenthető az integrációs intervallum felosztásának kellő finomításával.[114]

(Euler azt is felismerte, hogy ezek a meggondolások könnyen átvihetők olyan függvényekre, amelyek szakaszonként monotonok, vagyis amelyeknél az integrációs intervallum véges sok részszakaszra bontható úgy, hogy a függvény ezek mindegyikében monoton.)

(c) A mai matematikában az analízis elemeinek könnyű tankönyvi anyaga az (akár az iskolai matematikában is), hogy *monoton függvénynél* ugyanez a meggondolás közvetlenül elvezet a függvény integrálhatóságához (vagyis ahhoz a felismeréshez, hogy az a bizonyos különbség − amelyet ma oszcillációs összegnek nevezünk − tetszőlegesen kicsivé tehető a felosztás kellő finomításával).

Euler számára azonban az integrálhatóság problémája nem is létezett; ő még azt feltételezte, hogy az a bizonyos különbség „minden függvénynél” tetszőlegesen kicsivé tehető a felosztás finomításával. Nem ismerte (ill. „nem ismerte el”) azt sem, hogy az integrál „eleve létező” értéke függhet a végtelen felosztássorozat megválasztásától, továbbá attól, hogy a „téglányösszegek” képzésénél hogyan választjuk minden egyes téglány-alaphoz a magasságot. Röviden: Sem egzisztencia-, sem ekvivalenciaproblémák nem foglalkoztatták az integrállal kapcsolatban. Azon viszont igen invenciózusan dolgozott, hogy minden egyes integrálandó függvényhez és integrációs intervallumhoz minél gyorsabban konvergáló és minél könnyebben kiszámítható téglányösszegeket produkáló felosztás-sorozatokat találjon.

A 18. századi analízist valójában nem az karakterizálja (pl. a 19. századival szemben), hogy nem oldotta meg az integrál létezésének kérdését, hanem az, hogy ez a kérdést nem is vetették föl.

3 D. A 19. század: Cauchy, Riemann, Weierstrass

3.36 (a) Ebben a gondolatkörben mozogtak az integrálra és a területszámításra irányuló kutatások a Cauchy nevéhez fűződő (a 19. század elején bekövetkező) nagy fordulatig az analízis történetében, amelynek a lényege mind a differenciálszámításnak, mind az integrálszámításnak a határértékfogalmakra való építése. Ezt azonban nem szabad ilyen egyszerű korszakváltásnak tekinteni. Inkább nagyon is komplex, szövevényes és dialektikus folyamatról van szó. Igaz, hogy a 18. századi matematika sem az integrál fogalmát, sem a kiszámításának módszereit, sem e két dolog kapcsolatait nem tud-

---

[112] A „monoton” szót Euler még nem használta. Ez az eredetileg egyhangúságot jelentő, két görög szóból, a μόνοζ (monodz) = egyedüli, τονος (tonosz) = hang szavakból összetett kifejezés csak a 19. század nyolcvanas éveiben honosodott meg matematikai műszóként.

[113] „Szerencsére” monoton függvényeknél nyilvánvaló, hogy a minimális és a maximális függvényérték egyaránt létezik, és az is hogy melyik helyen.

Ami az ábrát illeti: A mai matematikai felfogás szerint helyesebb lenne illusztrációként olyan monoton függvény görbéjét választani, amely nem folytonos (hogy még nyilvánvalóbbá tegyük, hogy itt a monotonitás a döntő tényező). Ez azonban történeti anakronizmus lenne, hiszen nem egy mai matematikai állításhoz készült az ábra, hanem Euler egyik gondolatmenetének a bemutatására.

[114] A mai szokásos megfogalmazásban: Azáltal, hogy a maximális részintervallumot (amelyet az ábrán meg is jelöltünk) kellően kicsinek választjuk.

ta megalapozni, mégpedig lényegében éppen a konvergencia fogalmi apparátusának hiánya miatt. Az is igaz azonban, hogy ezek a kutatások egyrészt sok, közvetlenül és közvetve a Cauchy-analízis számára is értékesíthető eredményt hoztak, másrészt olyan egyre növekedő elégedetlenséget és feszültséget keltettek, aminek felhalmozódása azután kiváltotta az egész matematikára kiható radikális változást.

(b) Ebben a folyamatban például Lacroix a felosztás-sorozatok vizsgálatában, a minél jobb approximáció elérése érdekében − úgy tűnik − azt érezte előbbre valónak, hogy a részintervallumok száma kellően növekedjék, nem pedig azt (ami a valódi kritérium), hogy a maximális részintervallum hossza kellően kicsivé váljék. Az utóbbi persze maga után vonja a részintervallumok számának növekedését, de erősebb feltétel annál, hacsak nem következetesen egyenletes felosztásokat használunk, amikor is egyenértékű a két feltétel. (Abban a korban a „legtermészetesebbnek” az egyenletes felosztást tartották[115], ez volt a leggyakoribb Lacroix gyakorlatában is, és éppen ezért nem lehet világosan kiolvasni a műveiből, hogy valójában felismerte-e, hogy melyik a lényeges feltétel.)

(c) Érdekes, hogy mind Euler, mind Lacroix (és mások is) fontosnak tartották azon elmélkedni (sőt olykor vitatkozni), hogy a közelítő összegek képzésekor minden részintervallumot a bal oldali vagy a jobb oldali végpontban vett függvényértékkel szorozzanak-e.[116] Azt egyáltalán nem tartották „természetesnek”, hogy megengedjék a részintervallum bármely helyén vett függvényértéket, mint a megfelelő „téglány” magasságát.[117]

(d) Történetileg érdekes, mert a lényegre mutató, Lacroix terminológiája az integrál témakörében: az elsők között használta a *határozott integrál* és *határozatlan integrál* műszavakat.[118] (A terminológia azonban még jó ideig ingadozott az irodalomban.) Ez fontos lépés volt afelé, hogy a határozott integrál önálló és megfelelően definiált fogalommá váljék. Cauchy azután átvette ezt a terminológiát és valóban megteremtette a határozott integrál *fogalmát*.

(e) Ebben fontos előkészítő szerepe volt Poissonnak, aki bátran hozzányúlt olyan problémákhoz, amelyeket Euler, Lacroix stb. nyitva hagytak vagy föl se vetettek. Ilyen volt például az a kérdés, hogy

> „bármely függvényre”[119] tetszőlegesen megközelíthető-e az integrál értéke a közelítő összegekkel, ha a részintervallumokat kellően kicsire vesszük, ill. a függvények mely osztályaira érvényes ez?

és az, hogy

> az approximált értékek függenek-e a felosztás-sorozatok megválasztásától, ha csak minden határon túl finomodó felosztás-sorozatokat engedünk meg?

Mai szóval: a határozott integrál egzisztenciális és unicitási kérdései váltak égetően aktuálissá. (Ez azonban nem azt jelenti, hogy Poisson meg is birkózott ezekkel.)

(f) Poisson 1820-ban publikálta azt a dolgozatát[120], amelyben „az integrálszámítás alaptételének” − vagyis a határozott és a határozatlan integrál kapcsolatának − egy korai, a ma ismert tételnél korlátozottabb formáját próbálta bebizonyítani[121]:

---

[115] A különböző függvényekhez való alkalmasság (kiszámíthatóság, konvergencia-sebesség stb.) tekintetében egyáltalán nem létezik „legtermészetesebb” felosztás-típus.

[116] Nyilvánvalóan túlnyomóan monoton vagy legalább szakaszonként monoton függvényeket tartottak szem előtt (mást nem is képzelhettek el „függvényként”).

[117] Mai szemmel nézve ez azért is furcsa, mert főleg folytonos függvényekkel foglalkoztak, márpedig azok zárt intervallumon értelmezve egyenletesen folytonosak, s ezért az említett megkülönböztetések irrelevánsak.

Az egyenletes folytonosság fogalma és szerepe azonban sokkal későbbi fejlemény; lásd 3.37(c_2).

[118] A határozatlan integrál addig „az integrál” volt, a határozott integrál-nak pedig nem volt elnevezése, hiszen csupán közelítő kiszámítási módszereknek fogalmilag határozatlan, laza együtteseként létezett.

A két új, jelzős szerkezetű műszó kifejezte azt a kettősséget, hogy egyrészt fontos kapcsolat van a két dolog között, másrészt azonban ez a két dolog esszenciálisan különböző. (Valójában a két fogalom még sokkal inkább eltérő természetű, mint ahogyan ezek a már mélyen begyökerezett elnevezések sugallják.)

[119] Az idézőjellel arra utalunk, hogy amíg a „függvény” fogalma nincs határozottan definiálva, addig a „bármely függvény” kifejezésnek is bizonytalan, homályos a tartalma.

Legyen $f(x)$ *egy a-tól b-ig definiált véges függvény*[122] *és* $F(x)$ *az antideriváltja. Képezzük az* $[a;b]$ *intervallumnak n egyenlő, α hosszúságú részintervallumra osztásával az*

$$S=\alpha[f(a)+f(a+\alpha)+...+f\{a+(n-1)\alpha\}]$$

összegeket. Ekkor $F(b)-F(a)$[123] *pontosan*[124] *egyenlő az S összegek határértékével.*

Meg kell jegyeznünk, hogy Poisson ebben a tételben

(1) eleve feltételezi az antiderivált létezését („tetszőleges” függvényhez!),

(2) eleve feltételezi az *S* összegek határértékének a létezését,

(3) az $[a;b]$ intervallumnak kizárólag az egyenletes felosztásait veszi figyelembe.

A bizonyítást itt nem tudjuk részletezni.[125]

(g) Az (e) részre és az (f) rész (3) pontjára visszautalva érdemes kiemelni:

Poisson már tudatában volt annak, hogy nem okvetlenül egyenletes − magyarán tetszőleges − intervallum-felosztásokra is ki kellene terjeszteni a bizonyítást (vagyis kizárni azt a rossz lehetőséget, hogy egy nem-egyenletes felosztásokból alkotott sorozatnál az *S*-nek nincs határértéke vagy más határértéke van), de erre még nem volt képes. Mégis áttörésként kell értékelnünk a problémának a felismerését is, hiszen a 18. századi uralkodó felfogás szerint, ha az integrál értéke egy bizonyos idom területének mértékszáma (?), akkor az nem függhet attól, hogy az idomot milyen módon osztjuk „végtelen sok (?) részre”.

3.37 (a) A modern analízisre való átmenet legnagyobb alakja Cauchy volt.[126] Nagyon leegyszerűsítve azt lehet mondani, hogy az analízis fogalmi fejlődés-történetében Cauchy jelentősége: az analízisnek egyértelműen és határozottan a konvergencia-fogalmakra való építése. Itt csak címszószerűen tudunk megemlíteni néhány igen fontos részletet: Ő alapozta meg a sorelméletet a konvergenciából kiindulva (a konvergens sor és az abszolút konvergens sor fogalma, konvergenciakritériumok, pl. az igen fontos, ma is Cauchy-féle konvergenciakritériumnak nevezett tétel); bevezette a *felső határ* és az *alsó határ* fogalmát; elsőként bizonyította be, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sorozat konvergens.

A mostani szűkebb témánkba vágó eredményei: Ő definiálta a függvény-folytonosságot lényegében a máig fennmaradt modern formában, és ő vezette be „határozottan” a határozott integrál fogalmát mint közelítő összegek határértékét.

(b) Példaképpen fölidézzük Cauchy két tételét és egy definícióját, amelyek fordulópontot jelentettek az integrál elméletében.[127]

---

[120] Poisson ebben a publikációban a valós és a komplex függvények analízisével egyaránt foglalkozott; mi ebben a kurzusban a valós analízisre szorítkozunk.

[121] A szövegben és a képletekben nagyjából követjük Poisson szó- és szimbólumhasználatát (amely nem mindenben felel meg a miénknek), hogy ezzel is érzékeltessük a dolog történetiségét.

[122] Ez a korabeli matematikában igen elterjedt kifejezés a mai nyelven ezt jelenti: tetszőleges függvény (minthogy egy valós−valós függvény minden értéke eo ipso véges).

[123] Poisson itt *ezt* nevezi az $f(x)$ függvény határozott integráljának *a*-tól *b*-ig.

[124] A „pontosan” szót ma fölöslegesnek érezzük; Poisson szóhasználata karakterizálja a korabeli analízist.

[125] Érdemes annyit megjegyezni, hogy a bizonyítás alapgondolata ma is felhasználható lenne, de csak több olyan korlátozó (a felhasznált eszközök létezését garantáló) feltétel mellett, amelyek nagyon beszűkítenék a tétel érvényességi körét.

[126] Augustin-Louis Cauchy (francia, 1789−1857) minden idők legtermékenyebb matematikusainak egyike. Sok területen dolgozott, de a fő kutatási területei a szélesebb értelemben vett analízis és annak fizikai alkalmazásai voltak. Egyik legismertebb műve az 1821-ben megjelent *Cours d'Analyse* (az analízis tanfolyama) című korszakfordító tankönyve volt.

[127] Ezek Cauchynak abban a publikációjában jelentek meg 1823-ban, amelyben összefoglalta a modern integrálelméletet is elindító egyetemi előadásait.

(b_1) TÉTEL. *Legyen* $f(x)$ *egy az* $[x_0; X]$ *zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény. Ekkor létezik az*

$$S = (x_1 - x_0) f(x_0) + (x_2 - x_1) f(x_1) + \ldots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1})$$

összegeknek, ahol

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < X ,$$

a határértéke, midőn a részintervallumok minden határon túl kisebbednek[128]*, mégpedig függetlenül az intervallum-felosztások megválasztásától.*

(b_2) DEFINÍCIÓ. Ezt a határérértéket nevezzük az $f(x)$ <u>*határozott integráljának*</u> az $[x_0; X]$ intervallumon.

(b_3) A definíció a határozott integrál fogalmáról, a tétel pedig a létezésének egy elegendő feltételéről szól. Nagy fontossága volt annak, hogy itt végre utat tört magának annak a felismerése, hogy milyen jelentősége van az integrál elméletében az alkalmasan választott, jól definiált függvényosztályoknak (a „minden függvényre” kimondott tételek helyett). Igen fontos az is, hogy ez a definíció − évszázados ingadozások és habozás után − végre egyértelműen és határozottan eldöntötte, hogy az integrál fogalmát nem az antideriváltra, hanem a közelítési eljárásra kell építeni. Az antiderivált szerepét pedig világosan rögzíti Cauchy következő tétele.

(b_4) TÉTEL.[129] *Tekintsük az* $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ *határozott integrál valamelyik határát, például a felsőt, változónak, és jelöljük ezért* X *helyett x-szel. Akkor egy új függvényt nyerünk:* $\mathcal{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$*, és erre a függvényre érvényes, hogy* $\mathcal{F}'(x) = f(x)$*, vagyis az új függvény az integrálandó függvény deriváltja.*

(c) Eszmetörténeti szempontból nem hagyhatjuk említés nélkül a (b_1) tétel bizonyításának két sajátosságát.

(c_1) Ebben a bizonyításban Cauchy olyan apparátust használt, amelyben az analízis sok, a 18. században felhalmozódott eredményét és munkamódszerét értékesítette (középértéktételek, Taylor-sorba fejtés, Taylor-polinomok maradéktaggal stb.). Hangsúlyoznunk kell, hogy ezek az eredmények olyan korban születtek, amelyben az analízis fogalmi alapjai sokkalta gyengébbek voltak, mint a Cauchy-analíziséi. Ez tehát egy „visszatekintő” sajátossága a bizonyításnak.

(c_2) A bizonyítás „előremutató” sajátosságai közül azt említjük meg, hogy Cauchy *hallgatólagosan* kihasználja a *folytonosnak* feltételezett f függvény *egyenletes folytonosságát* $[x_0; X]$-en. Így tudja kimutatni, hogy S limesze egyértelműen létezik, függetlenül attól, hogy az $[x_0; X]$ szakasznak milyen felosztás-sorozatát választjuk.[130] Az egyenletes folytonosságot valójában csak ötven évvel később (1872-ben) fogalmazta meg önálló fogalomként Heine, aki egyúttal azt is bebizonyította, hogy zárt szakaszon definiált folytonos függvény egyenletesen folytonos.[131]

3.38 (a) Ezzel a modern kor küszöbéhez érkezett az integrál elmélete. A küszöb átlépéséhez már csak az szükséges, hogy a határozott integrál ilyen definícióját megszabadítsuk az integrandus előírt

---

[128] Hogy ez pontosan hogyan értendő, az még Cauchynál sem eléggé világos; ez majd a Weierstrassi analízisben válik teljesen korrekté a 19. század utolsó harmadában.

[129] A megfogalmazásban és a képletekben részben meghagytuk a kort idéző körülményességet.

[130] Valójában az f egyenletes folytonossága még azt is garantálja, hogy a minden részintervallumhoz, mint téglány-alaphoz rendelt téglány-magasság a részintervallum *tetszőleges* helyén fölvett függvényérték lehet. Cauchy azonban ezt vagy nem veszi észre vagy még nem tudja magát kivonni az évszázados hagyomány (következetesen a bal oldali végpontban vett függvényérték) hatása alól. (V. ö. 3.40-ben a Riemann-integrál definícióját, amely néhány évtizeddel később született meg.) Ez viszont nem progresszív jellegzetesség.

[131] Heinrich Eduard Heine (német, 1821−1881); jelentősen hozzájárult a modern valós analízis kifejlesztéséhez. Az ő nevét őrzi a nagyon fontos Heine-Borel-féle befedési tétel; a bizonyítás fő eszköze ugyanaz, mint a folytonos függvényekről szóló ermlített tétel bizonyításáé.

folytonosságának ballasztjától, vagyis különválasszuk a határozott integrál fogalmát (ez definíció kérdése) és létezésének elegendő feltételeit (ez tételek kérdése), s akkor megérkezünk az „előszobába”. Ennél „beljebb” majd akkor kerül az integrál elmélete, de az egész analízis is (főleg Weierstrass működése nyomán), amikor − az 1970-es években − az egész matematikát a halmazelmélet, a valós számtest modern fogalma és a konvergencia alkotta fundamentumra építik.

(b) Cauchy szerint a 3.37 alatti második tétel (3.37(b_4)), vagyis a határozott és a határozatlan integrál közötti összefüggés, a kalkulus (a differenciál- és integrálszámítás) „alaptétele”, amelyből *a határozott integrál kiszámításának* ez az *eszköze* adódik:

Keressük meg az $f(x)$ integrandus *valamelyik* $\mathcal{F}(x)$ antideriváltját[132]; ekkor

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)\,.$$ [133]

(c) Figyeljünk fel egy különös váltásra 18. és a 19. század analízise között az integrál tekintetében! Kissé leegyszerűsítve (a rövidség érdekében), de a lényeget kiemelve így írhatjuk ezt le:

A 18. században az „integrál” fogalma a határozatlan integrálból[134] és az $\mathcal{F}(b) - \mathcal{F}(a)$ formulából tevődött össze; az integrál (közelítő) kiszámításának eszköze pedig a közelítő téglányösszegek keresése volt. (Ezek kapcsolata a századon végighúzódó nagy problématerület volt.)

A 19. században a határozott integrál vált az „integrál” fogalmává, a kiszámítás fő eszköze azonban nem a közelítő téglányösszegek keresése (pedig azon alapszik a határozott integrál fogalma), hanem „az analízis alaptétele”, vagyis a határozatlan integrál.[135]

	Az integrál	
	fogalma	kiszámítása
18. század	antiderivált	téglányösszegek
19. század	határozott integrál	határozatlan integrál

3.39 (a) Az integrálfogalom a fejlődésének következő lépcsőfokát Riemann[136] munkásságában érte el. Mi itt az aktuális témára, az integrál elméletére szorítkozunk. A következő − nagyon szemelvényes − szembeállításból képet alkothatunk az integrálfogalom fejlődéséről Cauchytól Riemannig.

Cauchy a közelítő összegek képzésekor következetesen minden részin-	*Riemann* a közelítő összegek képzésekor minden részintervallum tetszőleges helyén vett függvényértéket

[132] Mai szóval primitív függvényét, határozatlan integrálját.

[133] Ennek bizonyításához fel kell használni a határozott integrál intervallum szerinti additivitását és azt a tényt, hogy egy függvény bármely két primitív függvényének különbsége: konstans függvény (az utóbbi pedig a differenciálszámítás középértéktételéből vezethető le). Mindez a mai bevezető analízis-kurzusok tankönyvi anyaga.

[134] Az egyszerűbb megfogalmazás érdekében használjuk itt a 18. század szempontjából anakronisztikus „határozatlan integrál” kifejezést.

[135] Az analízis mai − akár középiskolai, akár főiskolai−egyetemi − oktatásában sztenderd eljárás, hogy a határozott integrál definíciója után (ami korszerű, korrekt megfogalmazásban meglehetősen komplex, a tanuló számára nem éppen könnyű) illusztrálják ezt a fogalmat egy-két integrálnak a közvetlenül a definíció szerinti − szükségképpen nehéz munkával járó − kiszámításával, de azután hamar áttérnek az alaptételre, amely lehetővé teszi az integrál kiszámítását egészen más módon: a határozatlan integrál útján. Karakterisztikus jelenség mármost, hogy amint a tanulók birtokba vehetik ezt a sok esetben viszonylag kényelmes eszközt valaminek a kiszámítására, hajlamosak gyorsan elfelejteni, hogy mi is az, amit kiszámítanak, vagyis a határozott integrál kényelmetlen definícióját.

A történeti rálátás elősegítheti, hogy a tanulókban tudatosuljon a cél és eszköz dialektikája.

[136] Bernhard Georg Friedrich Riemann (német, 1826−1866) a 19. századi matematika egyik óriása. Az analitikus számelméletben a prímszámok eloszlásának problémáival kapcsolatban fogalmazta meg a nevezetes és máig eldöntetlen *Riemann-sejtést*. A geometria alapjaival, nem-euklideszi geometriákkal kapcsolatban valóban korszakalkotó, nagyon eredeti koncepciók és eredmények fűződnek a nevéhez. Az analízisben Riemann művei a Cauchy és Weierstrass közötti fejlődési szakasz fontos csomópontját alkotják.

tervallumnak a bal oldali végpontjában vett függvényértéket veszi a „téglány” magasságaként az integrál definíciójában.

Cauchy a határozott integrál fogalmát csak csak folytonos integrandusokokra definiálta, vagyis arra az esetre, amelyben be tudta bizonyítani a közelítő összegek határértékének létezését. Nem-folytonos integrandusokra rendszeresen nem vizsgálta az integrált.[137]

enged meg a „téglány” magasságaként az integrál definíciójában.

Riemann az integrált pusztán a közelítő összegek határértékének létezésével definiálta; az integrál *fogalmát* illetően semmilyen feltevéssel nem korlátozta az integrandus-függvényt.

Riemann ugyanakkor egyrészt kutatási feladatnak tekintette a folytonosságtól különböző elegendő feltételek keresését az integrál létezésére, másrészt példákat is konstruált „nagyon nem folytonos” függvényekre, amelyek mégis integrálhatók.

(b) Riemann tehát nagyon lényegesen kiterjesztette, pontosította és elmélyítette az integrál elméletét, és ezért teljes joggal nevezzük ma ezt a fajta határozott integrált Riemann-integrálnak, egy függvénynek azt a tulajdonságát pedig, hogy a Riemann-integrálja létezik, Riemann-integrálhatóságnak.

Riemann ujításai a 19. század végén erőteljesen kibontakozó valós függvénytani irányzat felé mutatnak, amelyben a folytonos függvényekénél sokkal tágabb keretben (vagyis a folytonosságnál sokkal gyengébb feltevésekkel) folynak majd a függvénytani kutatások. Ennek a fejlődésnek kezdetben éppen az volt a legnagyobb hajtóereje, hogy a függvények Riemann-integrálhatóságának egyre gyengébb elegendő feltételeit keresték.

3.40 (a) A 19. század *derekán* rohamosan fejlődött, leszűrődött, letisztult a határozott integrál fogalom-apparátusa, nyelvezete és szimbólum-rendszere egyaránt.

(a_1) Egy $[a;b]$ intervallumon értelmezett valós-valós f függvényt $[a;b]$-n <u>*integrálhatónak*</u> (pontosan: *Riemann-integrálhatónak*) mondunk, ha természetes számok bármely

(A1) $k_1 < k_2 < k_3 \ldots$

sorozatához, véges

(A2) $a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_{k_i}^{(n)} = b$

osztópont-rendszerek bármely olyan sorozatához $(i = 1, 2, \ldots)$, ahol

$$\max_{j=1,2,\ldots,k_n} \left(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)} \right) \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

és tetszőleges

(A3) $x_{j-1}^{(n)} \le \xi_j^{(n)} \le x_j^{(n)} \ \ (j = 1, 2, \ldots, k_n)$

közbenső-hely-rendszerek bármely sorozatához $(n = 1, 2, \ldots)$ létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_j^{(n)})(x_j^{(n)} - x_{j-1}^{(n)})$$

határérték, és ezek a határértékek tetszőleges (A1), (A2), (A3) választásnál ugyanazok.

(a_2) Ezt a határértéket nevezzük az f függvény <u>*határozott integráljának*</u> − vagy <u>*Riemann-integráljának*</u> − az $[a;b]$ intervallumon.

(b) Ez a definíció igazán nem egyszerű. A komplexitása abból fakad, hogy nem akarja megkerülni azokat a problémákat, amelyekre az arkhimédészi exhausztióval kapcsolatban rámutattunk (l.

[137] Érdekes azonban, hogy már Cauchy is próbálkozott bizonyos improprius integrálokkal.

3.11), hanem beépíti a fogalomba azokat a logikailag elengedhetetlen garanciákat, amelyek az integrál létezésére és az unicitására vonatkoznak. (L. 3.15(e).)[138]

3.41 (a) Az analízis szigorú, logikailag korrekt, a bizonytalan geometriai intuíciótól független megalapozása hosszú folyamatának[139] betetőzése Weierstrass[140] munkásságában következett be.

(b) Weierstrass erőteljesen folytatta a „patologikus” függvények konstruálására irányuló munkát.[141] A legnevezetesebb és nagy feltűnést − és megrökönyödést − keltő konstrukciója egy olyan függvény volt, amely mindenütt folytonos, de sehol sem differenciálható.[142]

(c) Weierstrass nevéhez kötődik az a nagyszabású program, amelyet *az analízis aritmetizációja* néven tart számon a matematikatörténet. Ennek lényegét tömören így fogalmazhatjuk meg:

A 19. század 70-es éveiben az már teljesen világos és elfogadott volt, hogy az analízist a konvergenciafogalomra kell építeni. Cauchy 1821-es *Cour d'Analyse* c. műve óta evidenciává vált, hogy az analízis olyan alapfogalmait, mint a folytonosság, a differenciálhatóság, az integrálhatóság és az integrál stb., csak a határértékek fogalomkörében értelmezhetők megbízhatóan.[143] Maga a konvergencia fo-

---

[138] E definíciónak olyan változatai is vannak, amelyek nem a sorozat határértékének, hanem a felülről ill. alulról korlátos valós számhalmazok felső ill. alsó határának a nyelvén vannak megfogalmazva. A definíció így nem kevésbé komplex és fogalmilag még távolabb van az arkhimédészi infinitezimális folyamatoktól.

[139] Ezt a nagyjából száz éves folyamatot Joseph Louis Lagrange (francia, 1736−1813) működésétől számíthatjuk, aki a 18. századnak Euler mellett legnagyobb matematikusa volt. Nagyszabású kísérletet tett az analízis biztos alapokra helyezésére („az analízis algebraizálásával”, ezzel az 5. füzetben a differenciálszámítással kapcsolatban foglalkozni fogunk). Ez részben nagyon értékes eredményeket hozott, másrészt azonban végül is sikertelen volt, és éppen ez a sikertelenség mutatott határozottan abba az irányba, hogy az analízist a konvergencia szabatos fogalmára kell építeni.

[140] Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (német, 1815−1897) „a modern analízis atyja”, a matematikai szigorúság mintaképe, „a par excellence matematikai lelkiismeret példaképe”, kétségtelenül a legjelentősebbek egyike a modern matematika megteremtői körében. A valós számtest szigorú megalapozásához is hozzájárult. (Az ő tanítványa volt Georg Cantor is, aki a halmazelmélet által új irányt szabott az egész modern matematikának.)

Weierstrass személyisége a matematika-oktatás szemszögéből nézve is rendkívüli. Viszonylag későn kezdte meg matematikai tanulmányait (eredetileg, szerény jövedelmű szüleinek kívánságára, egy hivatalnok-pálya megalapozásához jogot tanult négy évig), és azután csaknem másfél évtizedig gimnáziumi tanár volt, aki kitűnt széleskörű tevékenységével és kiemelkedő pedagógiai képességeivel. Közben matematikai kutató munkát is folytatott.

Végül nagyon későn, negyven évesen kezdhette meg akadémiai pályáját, miután egy tanulmánya által egy csapásra hírneves matematikus, a Berlini Tudományos Akadémia tagja és egyetemi magántanár lett. Sokrétű és nagy jelentőségű kutatási tevékenysége − amellyel meghatározó befolyást gyakorolt a matematika fejlődésére − szorosan összekapcsolódott egyetemi oktató munkájával. Híres pedagógus, nagyszerű előadó, a „tehetséggondozás” nagymestere, kiváló ifjú matematikusok nagyhírű nevelője volt; az ő egyetemi kurzusai sok országból vonzottak hallgatókat Berlinbe. Kiemelkedő kutatási eredményei sokszor nem publikációiból váltak ismertté, hanem hallgatóknak és tanársegédeknek az ő előadásain készített és híressé lett jegyzeteiből. Weierstrass alakja a kivételes matematikai és pedagógiai képességek és ambíciók összefonódásának kiemelkedő példája.

[141] Ennek egyik nevezetes példája volt egy Riemann által konstruált függvény, amely minden irracionális helyen folytonos, minden racionális helyen nem-folytonos.

[142] Ez különösen sérti az intuitív geometriai szemléletet, ha így fogalmazzuk: egy intervallumon értelmezett folytonos függvény, amelynek „görbéje” olyan, hogy egyetlen helyen sincs érintője. (Egy trigonometrikus sorral definiált egyváltozós valós függvényről van szó.)

Egyébként ezt a példát, amelyet Weierstrass 1872-ben (más visszaemlékezések szerint már 1861-ben) konstruált és *ismertetett* szűkebb körben, du Bois-Reymond *publikálta* először 1875-ben, miután 1874-ben megkérdezte Weierstrasst, hogy lehetséges-e ilyen függvény. Ez a dolgozat nagyon ismertté és híressé vált. (Du Bois-Reymond 1831−1889, igen neves *német* matematikus.) A megdöbbentő felfedezés a valós számtest szigorú elméletének egyik indítóokává vált.

[143] A mai tankönyvek is nagyjából Cauchy megfogalmazásait használják.

galma azonban bizonytalan alapokon, ti. a valós számra vonatkozó többé-kevésbé csupán intuitív elképzeléseken „nyugodott” (de inkább ingadozott).

Világossá vált − nem utolsó sorban éppen Weierstrass (b) alatt említett „patologikus” konstrukciói nyomán −, hogy mindenekelőtt a valós szám fogalmát kell végre logikailag korrekt, megbízható módon megalkotni, hogy azután − a határérték elméletén át − szilárd alapra lehessen helyezni az analízist is. Ez volt az a program („az analízis aritmetizálása”[144]), amelynek a nagyon nehéz, de végül is teljesen sikeres megvalósításában Weierstrass sok követője is résztvett.[145]

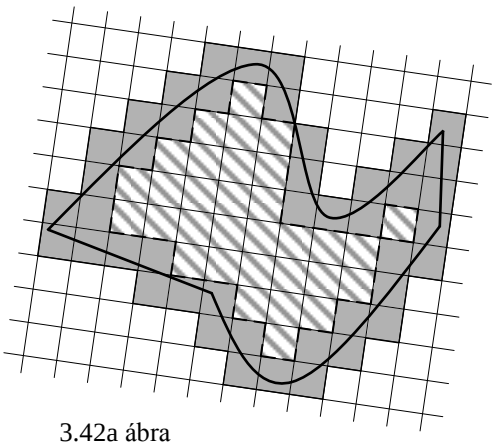
(d) A matematikában közmondásossá vált a „weierstrassi szigorúság” (ami a mi számunkra már régóta nem a „normalitáson” túlmenő „szigorúság”, hanem a matematikai gondolkodás természetes mozgástere és kötelező szintje). Az analízis „mumusa” az oktatásban az a több-kvantoros gondolkodásmód[146], amely sokszor az „epszilontika” (az ε − δ szimbolika) nyelvén jelenik meg.

(e) Weierstrassnak fontos szerepe volt abban, hogy az *intervallumskatulyázás* és annak elmélete (ami speciálisan a területmérésnek is természetes eszköze) meghonosodott a matematikában. [147]

3 E. A modern területmérés: Peano, Jordan és a terület általános fogalma

3.42 (a) A 19. század legvégén végre kialakult az „igazi” területfogalom, a Peano−Jordan-mérték fogalma és elmélete. Először egy kissé egyszerűsített és ezáltal „népszerűsített” formában mutatjuk be ezt a koncepciót.

(b) A 3.42a ábrán a mérendő sík-alakzatot a vastagon rajzolt határú közönséges „idom” szimbolizálja; valójában az tetszőleges nem-üres síkbeli *korlátos* ponthalmaz lehet. A síkban elhelyezünk egy négyzetrácsot. Megszámláljuk azokat a (zárt) rácsnégyzeteket, amelyek az alakzat befedéséhez szükségesek. Ez a *külső közelítés* az ábrán 76 rácsnégyzet. A *belső közelítés* annak a 32 rácsnégyzetnek az együttese, amelyeket az alakzat lefed. 44 $(=76-32)$ azoknak a rácsnégyzeteknek a száma, amelyek az alakzat határának a befedéséhez szükségesek.Tekintsük ezt 0. külső−belső közelítésnek.



3.42a ábra

(c) Ebből kiindulva a külső−belső közelítéseknek egy végtelen sorozatát gondoljuk el. Az $n-1$-edikből úgy származik az *n*-edik, hogy a négyzetrácsot az alapszakasz felezésével, vagy harmadolásával, vagy tizedelésével stb. finomítjuk, ami által az $\mathcal{A}$ rácsnégyzet négy, vagy kilenc, vagy száz stb. egybevágó négyzetre bomlik. Az új négyzetrácsban ismét megszámláljuk a külső közelítés négyzeteit (ez a szám nem növekedhet), a belső közelítés négyzeteit (ez a szám nem csökkenhet). Ha pl. tizedeltük az alapszakaszt, vagyis az új rácsnégyzet az $\mathcal{A}$ századrésze, akkor az új külső közelítés, az új belső közelítés és a különbség − az eredeti $|\mathcal{A}|$ terület-egységgel mérve − pl. így alakul:

---

[144] „A matematika aritmetizálása” kifejezést Felix Klein honosította meg a matematika-történeti irodalomban. A 19. sz. … kétkötetesben?

[145] Az analízis korrekt felépítésének mind a mai napig ez a sztenderd mintája.

[146] Ennek egyik mintája ez: „*Minden* […..]-hez *van olyan* […..], hogy *minden* olyan […..]-re, amely […..], érvényes, hogy […..]”).

[147] A következő füzetekben visszatérünk Weierstrass szerepére a valós számtest és az analízis modern megalapozásában.

külső	*belső*	*különbség*
$76\cdot\lvert\mathcal{A}\rvert=7600\cdot\frac{\lvert\mathcal{A}\rvert}{100}=76{,}00\cdot\lvert\mathcal{A}\rvert$	$32\cdot\lvert\mathcal{A}\rvert=3200\cdot\frac{\lvert\mathcal{A}\rvert}{100}=32{,}00\cdot\lvert\mathcal{A}\rvert$	$4400\cdot\frac{\lvert\mathcal{A}\rvert}{100}=44{,}00\cdot\lvert\mathcal{A}\rvert$
$6945\cdot\frac{\lvert\mathcal{A}\rvert}{100}=69{,}45\cdot\lvert\mathcal{A}\rvert$	$4709\cdot\frac{\lvert\mathcal{A}\rvert}{100}=47{,}09\cdot\lvert\mathcal{A}\rvert$	$2236\cdot\frac{\lvert\mathcal{A}\rvert}{100}=22{,}36\cdot\lvert\mathcal{A}\rvert$
fogyás	növekedés	fogyás

Ha mármost a kialakuló

76, 69,45 , … ill. 32, 47,09 , …

fogyó (és alulról korlátos, tehát konvergens) ill. növekedő (és felülről korlátos, tehát konvergens) számsorozat határértéke ugyanaz a valós szám, *akkor ez az alakzat mértékszáma az* $\lvert\mathcal{A}\rvert$*-val mérve és erre a konkrét mérés-sorozatra vonatkoztatva*.

Ekkor egyébként a harmadik sorozat nem csak fogyó, hanem nulla-sorozat. Megfordítva: *Ha* a különbség-sorozat határértéke 0, akkor ez az eljárás egyértelműen hozzárendel az alakzathoz egy (nem negatív) valós számot (ti. az első és a második sorozat közös határértékét).

Ebben az esetben a rövidség kedvéért magát a mérési eljárást is *konvergensnek* mondhatjuk.

3.43 (a) Ezzel azonban még nem lehet egy általános számszerű „terület”-fogalmat értelmezni, hiszen sem az, hogy egy alakzatnak van-e „területe”, sem az, hogy ebben az esetben mi annak a számértéke, nem függhet attól, hogy

− milyen léptékű négyzetrácsot választottunk a nulladik lépésben (vagyis mit választottunk alapszakasznak),

− hogyan helyeztük el ezt a rácsot az alakzathoz viszonyítva,

− hogyan finomítottuk minden egyes lépésben a négyzetrácsot,

mert egy alakzat „területének” mind a létezése, mind az értéke az alakzat olyan tulajdonsága kell hogy legyen, amely független a mérés módjától. Márpedig ezen paraméterek változtatásával más-más sorozatokhoz jutunk.

(b) Lehetne arra matematikai garanciákat találni (vagyis olyan tételeket bizonyítani), hogy bármely korlátos alakzatra nézve két különböző ilyen típusú eljárás

− mindig egyszerre konvergens ill. nem konvergens és

− konvergencia esetében mindig ugyanazt a számot ragadja meg.

Ehhez a weierstrassi gondolatrendszer, az intervallumskatulyázások elméletének elemei elégségesek.

3.44 (a) A számszerű terület fogalmának megalkotói, Peano és Jordan azonban más kiutat választottak. Ennek is két fokozata van:

Egyszerre vették figyelembe egy alakzat összes 1. négyzetrácsszerű ill. 2. tetszőleges „téglányokkal” való	
befedéseinek területét, és minthogy ezek egy alulról korlátos nem-negatív számhalmazt alkotnak, amelynek tehát van alsó határa, ezt az alakzat *külső mértékének*	kitöltéseinek területét, és minthogy ezek egy felülről korlátos nem-negatív számhalmazt alkotnak, amelynek tehát van felső határa, ezt az alakzat *belső mértékének*
nevezték. A külső mérték és a belső mérték mindig − vagyis bármely korlátos alakzatnál − létezik, és külső mérték mindig nagyobb vagy legalább egyenlő a belső mértékkel. Amennyiben egyenlők, akkor az alakzatot *mérhető*nek mondjuk *a Peano-Jordan-értelemben*, a külső és a belső mérték közös értéke pedig az alakzat *Peano-Jordan-mértéke,* speciálisan a 2-dimenziós esetben *területe.*	

(A két fokozat egyébként egyenértékű.)

(b) Ez is teljesen Weierstrass szellemében fogant koncepció (alsó határ, felső határ, a valós számtest teljessége, számsorozatok helyett „nagyon nagy” és nem lineárisan rendezett halmazok); jellegzetes terméke a 19. század utolsó harmadának, amely erős analógiát mutat a Riemann-integrál fogalmának ugyanebben a korban megszülető végső koncepciójával (lásd 3.40).

(c) Ezzel végre pótlólagos „garanciák” nélkül, magával a mértékfogalommal kiküszöbölték a koncepciónak azokat a problémáit, amelyeket 3.43 alatt fogalmaztunk meg.[148]

3.45 *Kiegészítő megjegyzések.* (a) A két névadó szerző, Peano[149] és Jordan[150], nem pontosan ugyanazt a mértékfogalmat építette föl.

(a_1) Peano az egy-, két és háromdimenziós euklideszi térre vonatkoztatta a mértékfogalmat, Jordan tetszőleges *n*-dimenziós térre ($n \in \mathbb{N}$).

(a_2) Jordan a 3.44(a) alatti 1. változatban gondolkodott, Peano pedig a 2. változatban.

A matematikai gondolat igazi lényege azonban ugyanaz volt.

(b) Egészen egyszerű, de nagyon fontos ténye ennek az elméletnek az, hogy

egy alakzat pontosan akkor mérhető, ha a határa nulla-mértékű.

Ennek értelmezéséhez annyit kell tudnunk, hogy

− a <u>*nulla-mértékűség*</u> ekvivalens a <u>*nulla-külső-mértékűséggel*</u>, vagyis azzal, hogy az *n*-dimenziós térben lévő alakzat lefedhető véges sok, tetszőlegesen kicsiny össz-„térfogatú” *n*-dimenziós „téglány" együttesével. (Szemléltetésként ismét a 3.42a ábrára utalhatunk).

(c) Tulajdonképpen − némi leegyszerűsítéssel azt mondhatjuk, hogy a nullamértékűség Peano−Jordan-féle fogalmából nőtt ki a modern mértékelmélet, amelynek fogalomkörében azonban a Peano−Jordan-mérték nem „mérték”. Erről kissé részletesebben szólunk majd a 3.53 szakaszban.

Mindenesetre erre való tekintettel a „mérték”, „külső mérték”, „belső mérték”, „nulla-mérték”, „mérhetőség” szavakhoz mindig hozzá kell tennünk, hogy „Peano-Jordan” (hacsak nem nyilvánvaló a kontextusból, hogy erről van szó).

(d) *Egy* $[a;b]$ *intervallumon definiált korlátos függvény pontosan akkor Riemann-integrálható ezen az intervallumon, ha az oszcillációs összeg tetszőlegesen kicsivé válik, hacsak az* $[a;b]$ *felosztását elég finomra választjuk.*

A Riemann-integrál elmélete ezen kézenfekvő kiinduló tételének szembetűnő analógiája a (b) tétellel arra mutat, hogy a Riemann-integrál elmélete és a Peano−Jordan-mérték elmélete között szoros kapcsolatnak kell lennie. Valóban:

(e) *Egy* $[a;b]$ *intervallumon definiált korlátos nem-negatív függvény pontosan akkor Riemann-integrálható ezen az intervallumon, ha az ordinátahalmaz*[151] *határának*[152] *a Peano−Jordan-mértéke*

---

[148] Ezek Euklidész és Arkhimédész óta (vagyis amióta algoritmikus végtelen mérési eljárások egyáltalán fölléptek a matematikában) súlyosan terhelték a mérés témakörét és még ma is terhelik a témakör népszerűbb ismertetéseit.

[149] Guiseppe Peano (olasz, 1858−1939) elsősorban az analízis területén dolgozott; munkássága jelentősen befolyásolta a mai matematika arculatát. Igen nevezetessé − sőt „népszerűvé” is − vált a természetes számok Peano-féle axiómarendszere, továbbá a Peano-görbének nevezett példa olyan folytonos (bár nem egy-egy-értelmű) leképezésre, amely nem dimenziótartó. A ma Peano−Jordan-mértéknek nevezett, általa 1887-ben kezdeményezett fogalom volt tulajdonképpen az a mag, amelyből a modern matematika egyik nagyon fontos ága, a mértékelmélet kisarjadt. Egyik kezdeményezője volt az 1897-es zürichi I. Nemzetközi Matematikuskongresszusnak.

Peano elkötelezte magát a századvég nagyon jelentős olasz matematika-oktatási reformmozgalmának, és vezető szerepe volt az olasz matematika-tanárok egyesületének 1895-ös megalakításában.

[150] Camille Marie Ennemond Jordan (francia, 1838−1922) jelentős eredményekkel és fontos kezdeményezésekkel gazdagította az algebrát (permutációcsoportok, Galois-elmélet), a valós függvénytant és a topológiát. Az általa bevezetett és róla elnevezett, alapvető koncepciók közül kiemeljük a korlátos variációjú függvény fogalmát, a Jordan-görbe fogalmát és ezek elméletének az alapvetését.

[151] A matematikai köznyelvben: „a függvénygörbe alatti idom”.

[152] Vagyis lényegében a függvény gráfjának *a* és *b* között (mint síkbeli „alakzatnak”, pontosabban ponthalmaznak), hiszen egy egyenes szakasz mindig Peano−Jordan-nullamértékű.

0*, vagyis, ha az ordinátahalmaznak van „területe” a Peano−Jordan-mérték értelmében. Ebben az esetben pedig az integrál értéke megegyezik az ordinátahalmaz ilyen értelmű területével.*[153]

(f) Ha szem előtt tartjuk ezt a kapcsolatot, akkor természetesnek találhatjuk, hogy a Jordan-Peano-mértéket olykor *Riemann-mérték*-nek is nevezik.

3.46 *További kiegészítő megjegyzések*. (a) Ahogyan a határozott integrál a legfontosabb példája a korlátozott hatókörű számszerű-terület-mérési eljárásoknak[154], úgy a Peano−Jordan-mérték a legfontosabb példája a nem-korlátozott hatókörűeknek.

Ehhez két megjegyzést kell fűznünk.

1. A „korlátozottságot” itt nem úgy értjük, hogy a tekintett eljárás szerint „kevés” síkidomnak van mértéke, hanem úgy, hogy „kevés” idom van, amelyre alkalmazható az adott eljárás, hogy egyáltalán eldönthető legyen, mérhető-e a kérdéses idom. (A Riemann-integrál akkor alkalmazható valamely H ponthalmazra mérési módszerként, ha létezik a H-hoz úgy igazítható koordinátarendszer, hogy arra vonatkoztatva a H az x-tengely egy bizonyos szakaszán definiált és ott integrálható függvény ordinátahalmaza.)

2. Egyáltalán nem korlátozott hatókörű mérési eljárás nincsen. Ennek a kérdéskörnek a vizsgálata vagy akár csak ismertetése nem ebbe a keretbe tartozik, csupán megemlítjük, hogy a Jordan-mérés csak korlátos idomokra akalmazható (lásd a 3F.8 feladatot!), és az integrállal kezelhető „görbe alatti idomok” (koordináta-pont-halmazok) is olyanok, amelyeknél szereplő függvény korlátos.[155]

(b) A Riemann-integrált kitünteti a területmérési módszerek közül, hogy módot nyújt az *analízis* eszközeinek a felhasználására. A legfontosabb ilyen lehetőség a határozatlan integrál, amely lehetővé teszi, hogy a határozott integrál értékét − az eredeti, nehézkesen kezelhető definíció megkerülésével − a differenciálszámítás eszközeit értékesítve számítsuk ki.

(c) A két koncepció összehasonlításánál fontos szempont, hogy a Riemann-integrál a területmérésen − és egyéb matematikai feladatokon − kívül sok más feladat kezelésére is alkalmas. Ilyen például a fizikából a forgatónyomaték, a tehehetetlenségi nyomaték, a munka számítása, és sok feladattípus a legkülönbözőbb más tudományok területéről. Itt tulajdonképpen arról van szó, hogy például egy *tehetetlenségi nyomaték* mértékszáma is egy síkbeli alakzat *területének* mértékszámaként jelenik meg.

A Peano−Jordan-mértéknél viszont *par excellence* területmérésről van szó.

3.47 (a) A „területmérés” történetében egy bizonyos fejlődési sajátosság nyilvánul meg: A fejlődés egy szűkebb objektum-tartomány (esetünkben az egydimenziós, kétdimenziós és háromdimenziós geometriai „idomok”, vagyis szakaszok, síkidomok és testek) köréből indul, de a megfelelő koncepciók akkor kristályosodnak ki fogalmilag erre a szűkebb objektumtartományra is, amikor − olykor egy

---

[153] Igen pregnáns a következő idézet Werner W. Rogosinski „Volume and Integral” (Oliver and Boyd, Edinburgh and London 1952) c. könyvéből, amely az n-dimenziós Jordan-Peano-mérték és az n-változós függvények Riemann-integráljának elméletét, továbbá analóg módon a Lebesgue-mérték és a Lebesgue-integrál elméletét mutatja be a történeti és a didaktikai aspektus érzékeny összekapcsolásával.

„As the title indicates, I have tried to bring out consistently the geometrical aspect of integration: the integral of a (positive) function is the volume of the ordinate set of the function. This seems to me, both historically and intrinsically, the natural approach and that which is likely to suit the student best.” („Ahogyan a cím is jelzi, arra törekedtem, hogy következetesen érvényesítsem az integrál geometriai aspektusát: egy (pozitív) függvény integrálja a függvény ordináta-halmazának a térfogata. Mind történeti szempontból, mind a lényegi tartalmat tekintve ezt látom a természetes megközelítésnek, és bizonyára ez szolgálja legjobban a tanulót.”)

[154] Ha ui. a határozott integrált területmérési eljárásnak fogjuk föl, akkor csak olyan idomokra alkalmazható, amelyek egy ismert és analitikusan jól kezelhető függvényre vonatkozó koordinátahalmazként értelmezhetők. A Peano-Jordan-mértéknél nincs efféle korlátozás. Az olyan mérési eljárások, mint pl. az Arkhimédész-féle körmérés és az Arkhimédész-féle parabola-kvadratúra pedig „túlságosan is korlátozott hatókörűek” (hiszen egészen speciális síkbeli idomokra vonatkoznak).

[155] Az eredeti Riemann-integrál-fogalomnak vannak persze olyan kiterjesztései, amelyek nem-korlátos integrandusokat is megengednek.

sokkal későbbi korban − a matematika képessé válik bővebb objektumtartományok (pl. tetszőleges korlátos síkbeli ponthalmazok) kezelésére.

A következő táblázat ezt érzékelteti.

objektumtartomány	*mérési koncepció*	*megjegyzés*
az egydimenziós, kétdimenziós és háromdimenziós geometriai „idomok”, vagyis szakaszok, elemi geometriai síkidomok és testek	exhausztió	A gondolkodásban a mérési eljárások dominálnak
általánosítás két irányban: − az n-dimenziós $(n \in \mathbb{N})$ térbeli − tetszőleges ponthalmazok	Peano−Jordan-mé	ndolkodásban a mérték-fogalom dominál

(b) A táblázat ezen kívül egy másik fejlődési sajátosságra is rámutat. Az első sor a görög matematika korszakára utal, a második a mai matematikára (a 19. század vége óta). A két szakaszt az az óriási történelmi ív köti össze, amelyben a mérési eljárások sokirányú fejlesztése, finomodása, erősödése ment végbe, számottevő fogalmi előrelépés nélkül. Ez az inkább technikai, analitikus, metodológiai fejlődés mégis előkészítette és megalapozta a modern mértékfogalmak kialakulását, amelyekben az antik exhausztiós gondolat egy sokkal magasabb szinten visszatér; erre emlékeztet a táblázatba berajzolt nyíl.

(c) Mindkét fejlődési minta *mutatis mutandis* gyakran érvényesül a matematika különböző területeinek történetében.

3.48 (a) Mindeddig „területmérési” *eljárásokról* és egy *konkrét* mérési eljárásra épített *terület-fogalomról* szóltunk, de nem hagyhatjuk említés nélkül a számszerű terület *általános fogalmát*, amely történetileg szintén a 19. század végén kristályosodott ki.

(b) A síkidomok (pontosabban inkább:síkbeli ponthalmazok) valamely osztálya minden eleméhez hozzá kell rendelni egy nem-negatív valós számot (az illető idom „*terület*”-t), mégpedig úgy, hogy teljesüljenek a következő feltételek (a terület-fogalom „axiómái”):

(b_1) Az *invariancia*. Egybevágó idomokhoz ugyanaz a szám tartozzék.

(b_2) Az *additivitás*. Két közös belső pont nélküli idom együtteséhez[156] tartozó szám egyenlő a két idomhoz tartozó számok összegével.[157]

Hozzá szokás venni ezekhez a következőt is:

(b_0) A *normálás*. Valamely négyzethez (amit „alapnégyzetnek” vagy „egységnégyzetnek” fogunk nevezni), az 1 szám tartozzék.

A normálással egy teljes mértékrendszert jelölünk ki, vagyis az alapnégyzet kiválasztásával meghatározzuk minden mérhető idom területét.[158]

---

[156] Az „együttesen” itt a két idom ponthalmazként való egyesítését értjük.

[157] Ennek a követelménynek akkor van értelme, ha definiálva van a belső pont és a határpont elemi topológiai fogalma. Ezek a fogalmak, miként maga az általános topológia szintén a 19. század végén (kezdetben G. Cantor halmazelméleti munkáinak keretében) szűrődtek le. A legegyszerűbben és speciálisan a közönséges síkra vonatkoztatva így írhatjuk le őket:

1. Egy síkbeli A ponthalmaznak egy p pont *belső pontja*, ha van olyan p-t tartalmazó körlemez, amely ponthalmazként részhalmaza A-nak. (Ilyenkor persze $p \in A$.)

2. Egy síkbeli A ponthalmaznak egy p pont *határpontja*, ha minden p-t tartalmazó körlemeznek van közös pontja A-val is és A komplementumával is. (Itt $p \in A$ vagy $p \notin A$; mindkettő előfordulhat.)

3. Egy síkbeli ponthalmaz *határa* a határpontjainak a halmaza.

[158] Fogalom-szerkezeti szempontból ez a helyzet analóg pl. a logaritmusrendszerek rendszerének a szerkezetével: Egy (pozitív) számnak „annyi” logaritmusa van, ahányféleképpen megválaszthatjuk a logaritmusrendszer bázisát. Azáltal, hogy a megválasztott alapszámhoz az 1 logaritmust rendeljük, meghatároztuk minden (pozitív) szám logaritmusát. (Valójában *bármely* pozitív szám logaritmusa − amely, az alaptól függően, tetszőleges

3.49 (a) A területmérési eljárásoknak sajátos dialektikus kapcsolatuk van az általános számszerű-terület-fogalommal.

(b) Tulajdonképpen minden egyes konkrét területmérési eljárásból származik egy számszerű terület-"„fogalom": Az adott eljárás szerint mérhető idomokhoz az adott eljárás szerinti mértéket rendeljük mint "„területet”. Így persze egyrészt nem alakul ki egységes és általános számszerű-terület-fogalom, másrészt vizsgálni kellene, hogy az így keletkező fogalom-kompiláció eleget tesz-e azoknak a − axiomatikus értelemben vett − „minimális” követelményeknek (lásd 3.43(b)), amelyek az egyszerű geometriai, intuitív terület-elképzelésnek felelnek meg.

(c) Lehet azonban bizonyos értelemben megfordítva is haladni:

1. Először rögzítünk egy általános számszerű-terület-fogalmat (elvont, axiomatikus jelleggel, tehát nem konstruktív-operatív módon, vagyis nem úgy, hogy ez a fogalom eleve magában hordjon egy vagy több konkrét mérési eljárást); ez az, ami a matematika történetében évezredekig váratott magára (aminek sok egyéb mellett egyik legmeghatározóbb oka az volt, hogy maga a valós számtest fogalmilag csak a 19. század végén alakult ki).

2. Azután megalkotunk − a hatókör terjedelmét ill. természetét tekintve és a praktikus használhatóság vonatkozásában is különböző − „mérési” eljárásokat, amelyekkel egy-egy idom „területét” − vagyis azt a nem-negatív valós számot, amely az általános terület-fogalom szerint ahhoz az idomhoz tartozik − meg is lehet ragadni (persze általában csak egy határátmenet értelmében).

3. Végül ellenőrizzük, hogy a „megengedni” szándékozott mérési eljárások valóban illeszkednek az általános terület-fogalomhoz (vagyis minden esetben az annak megfelelő valós számot szolgáltatják).

(d) *A mai matematika-tudomány* − absztrakt, az axiomatizmusra hajló, a biztonságos fogalmi megalapozást igénylő − gondolkodásmódja a (c) vonalon halad. *A történeti fejlődés* azonban nagyon hosszú ideig sokkal inkább a (b) utat követte (anélkül, hogy az egész logikai és megismerés-elméleti problematikát vizsgálták vagy akár csak tudatosították volna).

(e) A határozott integrál (mint terület-mérési eljárás) és a Peano−Jordan-féle mérési eljárás egyaránt megfelel a fenti követelményeknek.

3 F. Kitekintés a modern mértékelméletre

3.50 (a) Az integrál elméletének a klasszikus terrénuma (a 19. század utolsó harmadáig) a folytonos függvények osztálya. Az a felismerés azonban, hogy az integrandus folytonossága − bár elegendő, de − nem szükséges feltétele az integrálhatóságának, vagyis hogy az integrandusnak szakadási helyei is lehetnek, az integrál-elméletnek egy új, „nem-geometriai”, inkább halmazelméleti irányát nyitotta meg. A halmazelméleti gondolkodás kirobbanó térhódítása a század 70-es éveitől hatalmas lendületet adott ennek.

(b) Könnyen látható, hogy nem csak a folytonos függvények integrálhatók, hanem pl. az olyanok is, amelyeknek vannak ugyan szakadási helyeik, de ezek véges sokan vannak. Mármost az integrál-elmélet elemeihez tartozik az, hogy a folytonosság mellett a függvény monotonitása is elegendő feltétele az integrálhatóságának. Monoton függvény viszont nem okvetlenül folytonos, bár igaz, hogy csak megszámlálhatóan sok szakadási helye lehet. Mindenesetre lehet tehát egy integrálható függvénynek akár végtelen sok szakadási helye is.

(c) Természetes kívánság, hogy egy f függvény Riemann-integrálhatóságát valahogyan a szakadási helyei $D(f)$ halmazának valamilyen „kicsiségével” karakterizáljuk (hiszen az eléggé nyilvánvaló, hogy az f „esélye” az integrálhatóságra csökken, ha e halmaz számossága nő ill. a szerkezete bonyolultabbá válik). Egyszóval valahogyan „mérni” kell ezt a halmazt, és bizonyára nem − vagy nem csak − a számosságával, hanem inkább a szerkezeti komplexitásával.

A Peano−Jordan-mérték fogalma és elmélete valóban nyújtott egy ilyen lehetőséget: egy halmaz 0-mértékűségének fogalmát, amelynek kulcsszerepe van ebben az elméletben (l. 3.45). Itt most azonban

---

valós szám lehet − meghatározza bármely másik pozitív szám logaritmusát ugyanabban a logaritmusrendszerben.)

nem a függvény gráfját „mérjük”, hanem a szakadási helyek halmazát, és erről a Riemann-integrálhatóság vonatkozásában a következő tétel szól:

Egy intervallumon definiált korlátos, nem-negatív f függvény integrálhatóságának elegendő, de nem szükséges feltétele, hogy a szakadási helyek $D(f)$ halmaza 0-mértékű a Peano−Jordan-értelemben.[159]

A Peano−Jordan-mértékelmélet tehát előrelépést hozott a Riemann-integrálhatóság problémájában, de nem vezetett annak teljes megoldásához.

3.51 (a) A Peano−Jordan-0-mértékűség fogalma azonban a legtermészetesebb módon általánosítható (vagyis gyengíthető) úgy, hogy megtartjuk a fogalom vázát, de nem kívánjuk, hogy a befedés *véges* legyen (l. 3.45); megelégszünk azzal, hogy *megszámlálható*:

Egy az *n*-dimenziós térben fekvő ponthalmaz	
Peano−Jordan-0-mértékű (vagy külső mértékű),	*Lebesgue*[160]*-0-mértékű* (vagy külső mértékű),
ha lefedhető	
véges sok	megszámlálhatóan sok
tetszőlegesen kicsiny össz-„térfogatú” *n*-dimenziós „téglány" együttesével.	

(b) A Lebesgue-0-mértékűség gyengébb feltétel, mint a Peano−Jordan-0-mértékűség.[161]

(c) Ez a gyengébb feltétel még mindig elegendő, de már szükséges is az integrálhatósághoz:

Egy intervallumon definiált korlátos, nem-negatív f függvény integrálhatóságának elegendő és szükséges feltétele, hogy a szakadási helyek $D(f)$ halmaza Lebesgue-0-mértékű.

3.52 (a) A Lebesgue-0-mértékűség azután új fordulatot érlelt: megszületett a Lebesgue-mérték fogalma és elmélete, majd az általános modern mértékelmélet, amelyben általános mértékfogalmak keretében sok különböző konkrét mértékfogalom elmélete bontakozott ki. Ez már kívül esik e füzetek tárgykörén. Csupán azt jegyezzük meg, hogy ez a fejlődés nem jelentette az integrál eszméjétől való teljes elszakadást. Éppen ellenkezőleg: A Riemann-integrál után sok más, új integrálfogalom született, és ezek elmélete szorosan összefonódik a mértékelmélettel.

(b) Az új integrálfogalmak egyike a már említett Lebesgue-integrál (amelynek ismertetése már nem tárgya ennek a füzetnek).

Azt, hogy a Jordan-Peano-mértéket olykor „Riemann-mérték”-nek is nevezik (l. 3.45(f)), éppen az az analógia teszi természetessé, amely a Riemann-mérték − Riemann-integrál kapcsolat és a Lebesgue-mérték − Lebesgue-integrál kapcsolat között van.

3.53 Végezetül még egy terminológiai problémát említünk meg. A modern mértékelmélet szerint a Peano−Jordan-mérték nem „mérték”. Ennek az az oka, hogy az utóbbi nem megszámlálhatóan additív, csak végesen additív. Más nyelvekben használatos terminológia jól támogatja ezt a megkülön-

---

[159] Iskolapéldának számít az analízisben az a $[0;1]$ szakaszon definiált f függvény, amelyre

$$f(x)=\frac{1}{q},\ \text{ha}\ x=\frac{p}{q}\ (p,q\in\mathbb{N}\ \text{és}\ (p,q)=1)\ \text{vagy}\ x=0;\ f(x)=0,\ \text{ha}\ x\ \text{irracionális.}$$

Ez Riemann-integrálható, és pontosan a racionális helyeken vannak szakadásai. Márpedig itt $D(f)$ nem Peano-Jordan-mérhető (az ilyen értelmű külső mértéke 1, a belső mértéke 0), ami azt mutatja, hogy a tételben szereplő feltétel valóban nem szükséges feltétele az integrálhatóságnak.

[160] Henri Lebesgue (1875−1941, francia) több területen tett fontos kezdeményezései és eredményei mellett (például az általános topológia keretébe tartozó dimenzióelméletben) elsősorban a valós függvénytanban, azon belül az integrálelméletben és a mértékelméletben nagyon széleskörű, a további fejlődést meghatározó elsőrendű jelentőségű munkásságot fejtett ki.

[161] A „gyengeség” abban *is* megmutatkozik, hogy nem-korlátos ponthalmaz eleve nem lehet Peano-Jordan-mérhető, míg a Lebesgue-mérhetők és a Lebesgue-0-mértékűek között is vannak nem-korlátosak. (Ez azonban nem érinti az itteni problémakört, hiszen az integrációs intervallumok eo ipso korlátosak.)

böztetést.[162] A magyar matematikai nyelvben sem kell félreértéstől tartanunk, ha világos definíciókkal és megbeszéléssel tudatosítjuk ezeket a viszonyokat.

3 G. A Bolyai−Gerwien-tétel és a szintetikus geometriai területfogalmak évezredes fogalmi diszharmóniáinak felszámolása

3.54 (a) A 19. század végére kikristályosodott a számszerű terület fogalma (beleágyazva a sokkal általánosabb, messzire vezető modern mértékelméletbe), és megbízhatóan kidolgozták a számszerű terület mérésének egy általános és egy speciális (de azért nagyon átfogó) eljárását: a Peano−Jordan-mértéket és a Riemann-féle határozott integrált. Ez a problématerület egy − történelmi mértékkel nézve is grandiózus − fejlődési ívben jutott el ide, a tudományos matematika kezdeteinek − a pitagoreusoknak − szintetikus geometriai „terület-összehasonlítás”-gondolkodásától.

(b) Különös azonban, hogy nagyon sokáig fennmaradtak azok a homályosságok, logikai hézagok, matematikailag nem megalapozott, de hallgatólagosan felhasznált tények és viszonyok magukkal az eredeti geometriai „terület-egyenlőségi” elképzelésekkel kapcsolatban, amelyeket a 2. füzetben, az Euklidész-féle *Elemek*-kel foglalkozva bemutattunk. Konkrétan a következő hiányosságokról van szó.

(b_1) Hiányzott ezeknek az elképzeléseknek a szabályszerű fogalmakká való fejlesztése, korrekt definíciókkal és megkülönböztető elnevezésekkel.

(b_2) Hiányzott az egyes terület-egyenlőségi relációk kardinális tulajdonságainak − mint pl. a monotonitásnak és a tranzitivitásnak − a szisztematikus vizsgálata, bizonyított tételekben való nyílt megfogalmazása.

(b_3) Hiányzott a különböző relációk kapcsolatainak − pl. a hallgatólagosan evidensnek tekintett ekvivalenciáknak − a szisztematikus vizsgálata, bizonyított tételekben való nyílt megfogalmazása.

Ezek a hiányosságok a kezdetektől a 19. századig lényegében változatlanul fennmaradtak. Kissé más természetű a 4. hiányosság.

(b_4) Amikor a 19. század folyamán kialakult a valós számtest, a mértékgeometria és ezen belül a számszerű terület modern fogalma, megkerülhetetlenné vált annak tisztázása, hogy mi a kapcsolata ennek a fogalomnak a szintetikus geometriai területegyenlőség-fogalmakkal.

(c) Érdekes, hogy milyen sorrendben kerültek napirendre és oldódtak meg ezek a problémák. A (b_1), (b_4) probléma-területek a század közepe táján váltak „aktuálissá”, míg a (b_2), (b_3) hiányosságok megszüntetése a 19. és 20. század fordulójáig, sőt részben a 20. század első feléig váratott magára. A következőkben (3.56 − 3.58) szólunk még ezekről a fejleményekről.

3.55 (a) „Átvezetésképpen” azonban még egy fontos, tisztázó megjegyzést kell tennünk.

Ha van mértékgeometriánk, akkor sok ide vonatkozó szintetikus geometriai kérdés nem is kérdés − eltekintve attól a stílustörésről, hogy szintetikus geometriai kérdéseket onnan kilépve, a mértékgeometriából visszatekintve válaszolunk meg.

(b) Ennek érzékeltetésére emeljünk ki egyet a szóban forgó kérdések közül: azt a problémát, hogy egy sokszög lehet-e átdarabolhatóan egyenlő egy valódi-rész-sokszöggel.

A számszerű terület a definíciója szerint additív függvény és ebből − valamint abból, hogy ha egy mérhető idomból elvesszük egy mérhető valódi részét, akkor a maradék idom is mérhető − következően monoton is. Márpedig átdarabolással egyenlő (és számszerűen mérhető) idomok számszerűen is egyenlők. Így hát pl. egy sokszög nem lehet átdarabolható egy valódi rész-sokszögbe.

---

[162] Néhány példa:

magyar	angol	német	francia
Peano−Jordan-mérték és mérhetőség	content Jordan measurable	Inhalt Quadrierbarkeit	contenu mesurable au sens de Jordan
mérték és mérhetőség	measure measurability	Maß Messbarkeit	mesure mesurabilité

Amíg azonban nem volt megalapozott mértékgeometria, addig ez a kiút sem volt megalapozott. Amikor kialakult a korrekt mértékgeometria, akkor pedig természetesen merült föl, hogy ezek a szintetikus geometriai kérdések megoldhatók-e „stílusosan”, vagyis a szintetikus geometria eszközeivel.

3.56 (a) Bolyai Farkas 1832-ben a *Tentamen*-ben[163] definiálta a *végszerű egyenlőség* fogalmát[164] − ez az, amit ma magyarul átdarabolhatóságnak vagy átdarabolhatóan-egxyenlőségnek nevezünk −, és ott közölte az erre vonatkozó következő három tételét.[165]

(a_1) *Ha két sokszög számszerűen egyenlő területű, akkor átdarabolhatóan egyenlők.*

(a_2) *Két egybevágó és egymást részlegesen átfedő síkidom nem-közös részei átdarabolhatóan egyenlők.*

(a_3) *Ha két egybevágó síkidomból páronként egybevágó részeket veszünk el, a maradék idomok átdarabolhatóan egyenlők.*[166]

Bolyai Farkas ezek közül csak (a_1)-re adott teljes bizonyítást.

A tétel a számszerű terület korrekt fogalmának ismeretében azonnal kibővíthető a következő ekvivalencia-tétellé:

(a_1^*) *Két sokszög pontosan akkor egyenlő számszerű területű, ha átdarabolhatóan egyenlők.*

A végszerű egyenlőség fogalma ill. e három tétel Bolyai Farkasnak a legismertebb és bizonyára legfontosabb matematikai kezdeményezése ill. eredménye.

(A 3F.4 feladat példa ennek a tételnek a közvetlen alkalmazására egy fontos − eredetileg szintetikus geometriai − tétel bizonyításában; v. ö. 3F.13.))

(b) A végszerű egyenlőség fogalma és az (a_1^*) tétel önmagukban is alapvetően fontosak, de jelentőségüknek különös nyomatékot ad három tény:

1. David Hilbert a „Grundlagen der Geometrie” c. korszakfordító művében[167] (a 19. és 20. sz. fordulóján) az „euklideszi” geometria modern, logikailag korrekt felépítésének kikerülhetetlen alkotó-

---

[163] *Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi. Cum appendice triplici* („Kísérlet a tanulóifjúságnak a tiszta matematika elemeibe és magasabb részeibe szemléletes és következésképpen közérthető módon való bevezetésére. Három függelékkel.”), Marosvásárhely 1832 (1. kötet), 1833 (2. kötet). Az egyik függelék (latinul *appendix*) Bolyai Farkas fiának, Bolyai Jánosnak a (szintén latin nyelvű) korszakalkotó műve az abszolút geometriáról, amelyet röviden „az Appendix” szóval szoktunk idézni.

[164] Bolyai Farkas utalt rá, hogy eredetileg ezt a fogalmat nem csak sokszögekre remélte alkalmazni, és hogy az indítéka a környégyzetesítés problémájával való foglalkozás volt.

[165] A könnyebb olvashatóság és az egyértelműség végett az eredeti „egyenlő területű” helyett „számszerűen egyenlő területű”-t, a „végszerűen egyenlő” helyett pedig „átdarabolhatóan egyenlő”-t írunk.

[166] Vegyük észre, hogy ez az állítás gyengébb, de azonos természetű, mint az, hogy *kiegészítéssel egyenlő sokszögek átdarabolhatóan is egyenlők*. (Akkor lennének ekvivalensek, ha (a_3) szövege így kezdődne: *Ha két átdarabolhatóan egyenlő síkidomból … .*)

Ha tehát Bolyai Farkas be is bizonyította volna az (a_3) állítást, akkor ezzel részlegesen tisztázta volna a 2. füzetbeli 2.4(c) alatti (1) kérdést. Az állítás mindenesetre arról tanúskodik, hogy Bolyai Farkasban − az Euklidész *Elemeiből* származó fogalmi tisztátalanságok két évezredes érintetlens0ége után − feltámadt az *igény* a fogalmi tisztázásra ezen a területen. Bolyai Farkas − az életkörülményeiből fakadó elszigeteltsége ellenére − korának, a 19. század első felének igazán „modern” matematikusa volt.

[167] David Hilbert (német, 1862−1943), talán a legjelentősebb, mindenképpen a legátfogóbb hatású matematikus a századforduló körül. Széleskörű munkásságának akár csak utalásszerű érzékeltetése is messze meghaladja e füzetek kereteit. Művei nagy horderejű eredmények sokaságával gazdagították az invariánselméletet, a számelméletet, a geometria alapjait, a modern axiomatikát, a matematikai logikát és bizonyításelméletet, az analízist és a matematikai fizikát. Ezek a művek a modern megalapozás igényével és sikereivel meghatározó befolyást is gyakoroltak a 20. századi matematika természetének alakulására.

Közelebbről érinti kurzusunk tárgyát az 1899-ben megjelent „Grundlagen der Geometrie” (A geometria alapjai”) című műve, amely nagyon gyorsan a matematika egész történetének egyik legfontosabb klasszikusává vált. A mű tárgya: Az euklidészi geometria hilberti axiómarendszere, mélyre hatoló axiomatikai vizsgálatok, az

elemeiként ismerte föl és építette be az átdarabolhatóság (németül „Zerlegungsgleichheit”) és a kiegészítéssel való egyenlőség (németül „Ergänzungsgleichheit”) fogalmát.

2. A „kétdimenziós” átdarabolhatóság mintájára a legtermészetesebben adódik az analóg „háromdimenziós” átdarabolhatóság-fogalom. Mármost Hilbert nevezetes „23 problémája” [168] közül a harmadik az volt, hogy igaz-e az (a_1) tétel háromdimenziós analogonja is, amit konkrétan például így lehet kérdezni: Igaz-e, hogy számszerűen egyenlő térfogatú tetraéderek átdarabolhatóan egyenlők? Hilbert így tette föl a kérdést: Igaz-e, hogy két egyenlő alapterületű és egyenlő magasságú tetraéder mindig átdarabolható egymásba?[169] (A problémát eredetileg − talán Gauss nyomán − maga Bolyai Farkas is fölvetette.)

Csupán néhány hónappal Hilbert előadása után közölte Max Dehn[170] (a habilitációs disszertációjában) a probléma megoldását. A válasz nemleges: vannak egyenlő térfogatú tetraéderek, amelyek nem darabolhatók át egymásba![171]

3. 1833-ban, egy évvel a Tentamen megjelenése után − de attól függetlenül, azt nyilvánvalóan nem ismerve − P. Gerwien német szerző is közölt a Bolyai Farkas eredményeihez hasonló tételeket, köztük az (a_1) tételt is. Ma ezt az eredményt világszerte *Bolyai−Gerwien-tétel*-ként tartják számon.

A későbbiekben az átdarabolhatóság fogalma körül igen kiterjedt irodalom született, amely a mai napig nem apadt el.[172]

3.57 A 3.54(b_2) típusú hiányosságokról.

(a) Az átdarabolhatóságnak és a kiegészítéssel-átdarabolhatóságnak mind a tranzitivitása mind a „szigorú monotonitása”[173] szinte triviálisan belátható, ha a mértékgeometria felől nézzük (lásd 3F.4). Ezek azonban szintetikus geometriai állítások, és ezért a mai matematikai gondolkodásban természetes a szintetikus geometriai bizonyítás igénye.

(b) Az átdarabolhatóság tranzitivitása elég egyszerűen bizonyítható a szintetikus geometrián belül is (konkrétan: pusztán az egybevágóság felhasználásával). Ebből pedig könnyen levezethető − szin-

---

euklideszi geometria Euklidész általi felépítésének ismeretelméleti, logikai és metodológiai „naivitásainak” végleges kiküszöbölése. Ezzel Hilbert új irányokat szabott nem csak a geometriának, de az egyetemes matematikának is.

[168] Híres eseménye a matematika-történetnek Hilbert előadása 1900-ban, a párizsi 2. Nemzetközi Matematikuskongresszuson, amelyen a matematika szinte minden akkor művelt területéről 23 megoldatlan problémát ismertetett, és ezeket a matematika további fejlődését nagy mértékben meghatározónak mondotta. A matematika fejlődése a 20. század első felében valóban jelentős mértékben igazolta ezt az előrelátást, és Hilbert problémáinak tényleges ösztönző hatásuk volt erre a fejlődésre.

[169] Az (a_1) tételt felhasználva így is kérdezhetnénk: Van-e két olyan egyenlő magasságú tetraéder, amelyeknek az alapjai egymásba átdarabolhatók, de a tetraéderek nem átdarabolhatóan egyenlők?

[170] Max Dehn német matematikus (1878−1952), Hilbert tanítványa, követője és művének folytatója.

[171] Meglepően érdekes ugyanakkor, hogy egyenlő térfogatú *hasábok* mindig átdarabolhatóan egyenlők! (Ebben a gondolatkörben a későbbiekben további eredmények is születtek.)

[172] Ebben magyar matematikusok is jelentős szerepet játszottak; a következő felsorolás távolról sem teljes.

Réthy Mór, fizikus és matematikus (1848−1925), aki a Bolyaiak tudományos hagyatékának ápolása mellett további kutatások kiindulópontjaként is használta azt és dolgozataival új kutatási irányokat inspirált ezen a területen. (A „végszerű egyenlőség” szót − amely ugyan Bolyai Farkas leleménye, de ő maga inkább más szavakat használt magyar nyelvű publikációiban − is Réthy Mór terjesztette el a témában írt dolgozatai által.)

Szász Pál (1901−1978), aki az analízis és a Bolyai−Lobacsevszkij-féle geometria kiváló kutatója (és nagy hírű egyetemi oktató) volt, egy 1956-os dolgozatában új bizonyítást adott Bolyai Farkas (a_1) tételére.

Az (a_1) tételt Varga Tamás (1919−1987) is újra bizonyította, mégpedig Bolyai Farkas bizonyításából kiindulva, de az iskolai matematikához jól illeszkedő módon (Matematikai Lapok 1954, 101−114).

[173] Ezen természetesen nem az értendő, hogy egy sokszög „nagyobb” minden valódi-rész-sokszögnél (hiszen ez a szintetikus geometriában, az átdarabolhatóság fogalomkörében nem is értelmezhető), hanem csak azt, hogy nem átdarabolhatóan egyenlők.

tén mértékgeometriai eszközök nélkül − a kiegészítéssel-átdarabolhatóság tranzitivitása. (3F.13 feladat.)

(c) A „szigorú monotonitás” kérdése sokkal nehezebb. Az első szintetikus geometriai bizonyítások a 19. és 20. század fordulója körül születtek. (Az egyik, nagyon nevezetes, de meglehetősen bonyolult ilyen témájú tételt Hilbert bizonyította a „Grundlagen der Geometrie”-ban).[174]

3.58 (a) Ami a 3.54(b_3) típusú hiányosságokat illeti: A legfontosabb az a kérdés, hogy *kiegészítéssel-átdarabolható sokszögek mindig átdarabolhatóan egyenlők-e*. A válasz: *igen*, és itt is fennáll, hogy a mértékgeometria felől nézve szinte trivialitásról van szó. A 20. században szintetikus geometriai bizonyítások is születtek, és ezek meglehetősen terjedelmesek és nem egészen könnyűek.[175] Az egyik ilyen bizonyítás magyar nyelven is hozzáférhető.[176]

(b) Ezek a bizonyítások a háromszögek egybevágóságán kívül szükségképpen felhasználják az arkhimédészi axiómát is, és ez nem véletlen. Hilbert, aki a „Grundlagen der Geometrie”-ben bizonyára az első ilyen bizonyítást közli, ugyanott *lényegében* (csak kissé más értelmezésben) azt is megmutatja, hogy *az arkhimédészi axióma nélkül az állítás nem igaz*[177]. Konkrétan a következő tételt bizonyítja be:

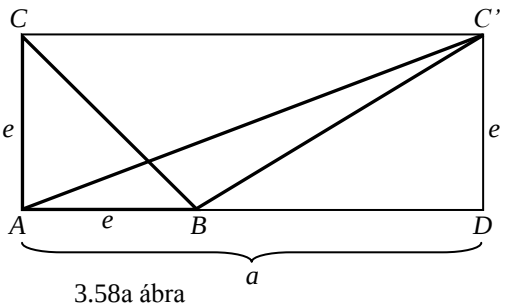
A nem-arkhimédészi geometria bármely modelljében van két közös alapú és közös magasságú háromszög, amelyek nem átdarabolhatóan egyenlők.[178]

A tétel annyira a témánkba vág és a bizonyítás gondolatmenete szerencsére annyira egyszerű, hogy indokolt ideiktatnunk Hilbert bizonyítását.[179]

Egy valódi nem-arkhimédészi geometriában van olyan *e*, *a* szakaszpár, hogy

(F) $n \cdot e < a \quad (n \in \mathbb{N})$.

Ennek a szakaszpárnak a felhasználásával építsük fel a 3.58a ábrán ábrázolt geometriai konfigurációt. Ekkor az *ABC*, ABC' háromszögek kiegészítve-átdarabolhatóan egyenlők. Felhasználjuk majd, hogy $BC < e + e = 2e$ és



3.58a ábra

[174] Hilbert tétele (21.§ 52.tétel) így szól: *Ha egy téglalapot háromszögekre bontunk és ezekből akár csak egyet is elhagyunk, akkor a maradék háromszögekkel már nem rakható ki a téglalap*. (L. a 3F.5 feladatot!)

Ez a szintetikus geometriai tétel mintapéldája lehetne az olyan állításnak, amely azért megdöbbentő, mert *látszatra* − vagyis, ha megfeledkezünk róla, hogy nem a mértékgeometriában vagyunk − „nagyon triviális” dolgot állít, ráadásul meglehetősen nehéz bizonyítással.

[175] Igaz, hogy ezek a bizonyítások sem használnak más eszközt, mint az egybevágóságot. Egy bizonyítás „nehézségi foka” azonban nem csupán a felhasznált tételszerű bizonyítási eszközök milyenségétől függ, hanem legalább ilyen mértékben a bizonyítás terjedelmétől és logikai komplexitásától is.

[176] B. V. Kutuzov: Geometria. Tankönyvkiadó, Budapest 1954; 261−265.

[177] Hilbert ebben a művében széleskörűen és mélyrehatóan elemzi az arkhimédészi axióma szerepét a geometria felépítésében, vagyis vizsgálja, hogy mi az, ami ezen axióma nélkül is igaz marad. (A „nem-arkhimédészi geometria” eszméje analóg az „abszolút geometria” Bolyai János-féle eszméjével, de a párhuzamossági axióma helyett az arkhimédészi axiómából indul ki.) Hilbert − azért, hogy ezek a vizsgálatok ne maradjanak tárgytalanok −, meg is konstruálta e könyvben a nem-arkhimédészi geometriának egy modelljét. (Ez a modell egyébként meglehetősen bonyolult (mindenesetre sokkal bonyolultabb, mint pl. a hiperbolikus geometria népszerű modelljei).

[178] Azt már láttuk, hogy az ilyen háromszögek kiegészítéssel-átdarabolhatóan egyenlők, és ebben az arkhimédészi axiómának nincs szerepe (lásd 2. füzet 2.8.)

[179] A „Grundlagen der Geometrie” 1899-es, 92 oldalas 1. kiadása óta egyre több kiegészítéssel, függelékkel és kísérő tanulmánnyal ellátott, rohamosan növekvő terjedelmű kiadások születtek. A „Kísérő füzetek”-ben az ezzel az alapművel kapcsolatos hivatkozásoknál és idézeteknél az 1909-es, 279 oldalas 3. kiadást és az 1999-es, 408 oldalas 14. kiadást vesszük alapul. (Az utóbbi különlegesen gazdag tartalmú kötetet a mű megjelenésének századik évfordulója alkalmából, számos − főleg németországi − jubileumi tudományos konferenciához és más rendezvényhez kapcsolva jelentették meg.)

hogy minden, az *ABC* háromszög belsejében fekvő szakasz kisebb, mint 2*e*.[180]

Tegyük fel most indirekten, hogy van véges sok, mondjuk *k* darab háromszög, amelyekkel a két háromszög egyaránt kirakható. Ekkor az *ABC* feldarabolásánál használt mindegyik háromszög minden oldala vagy az *ABC* belsejében, vagy az *ABC* valamelyik oldalán fekszik, tehát mindenképpen kisebb, mint 2*e*. Így mindegyik részháromszög kerülete kisebb, mint 6*e*, és e kerületek összege kisebb, mint $6k \cdot e$. Ugyanez érvényes akkor az ABC' feldarabolására is. Abban a részháromszög-kerület-összegben azonban benne kell hogy legyen a teljes AC' oldal, tehát $AC' < 6k \cdot e$ és még inkább $a < 6k \cdot e$.[181] Ez viszont ellentmond az (F) föltevésnek, és ezzel teljes a bizonyítás.

(c) Hilbert tehát történetesen közös alapú és közös magasságú *háromszögekkel* mutatta ki, hogy minden nem-arkhimédészi geometriában egyáltalán léteznek kiegészítéssel-átdarabolhatóan egyenlő, de átdarabolhatóan nem egyenlő sokszögek. Ezzel bebizonyosodott: Az arkhimédészi axióma szükséges előfeltétele annak, hogy a kiegészítéssel-átdarabolhatóság ekvivalens legyen az átdarabolhatósággal.

3.59 Ennek a füzetsorozatnak a programja szempontjából azonban különösen érdekesek a közös alapú és egyenlő magasságú *paralelogramma*-párok is (a 2. füzetben részletesen foglalkoztunk velük). Ezért megfogalmazzuk a 3.58 tétel analogonját háromszögek helyett paralelogrammákra:

A nem-arkhimédészi geometria bármely modelljében van két közös alapú és közös magasságú paralelogramma, amelyek nem átdarabolhatóan egyenlők.

A bizonyítást − a 3.58 tétel fölhasználásával − feladatként tűzzük ki (3F.18).

Ebből a tételből látszik, hogy nem esetleges, hanem szükségszerű volt az átdarabolhatóság bizonyításánál (2.7*(d)-ben) bizonyos esetekben az arkhimédészi axióma fölhasználása.

3.60 Befejezésül egy „egyszerű” tisztázó megjegyzést kell tennünk. A szintetikus geometriában a „sokszögekre” vonatkozó minden fogalomalkotásban, tételben és bizonyításban célszerű eleve az *egyszerű sokszögekre* szorítkozni (hogy elkerüljük a sokszor igen bonyolult vizsgálatokat arról, hogy mely konkrét témákban lényeges és hol lényegtelen ez a megkülönböztetés).[182] Hilbert is így járt el a többször idézett alapvetően fontos könyvében; mi csak azért tértünk el ettől, hogy elkerüljük a megfogalmazások nehézkességét.

3F Feladatok

3F.1 Le lehet-e vezetni a véges mértani sor összegképletét „Arkhimédész-módra” (lásd 3.14)

(a) $1/k$ hányadossal ($k \in \mathbb{N}$);

(b) tetszőleges (0-tól különböző) valós hányadossal?

3F.2 (a) Olvassa el újból a 3.11(b) szakaszt és a hozzáfűzött lábjegyzetet!

(b) Bizonyítsa be, hogy egy körbe írt szabályos $n+1$-szög területe nagyobb a beírt szabályos *n*-szögénél $(n \in \mathbb{N})$, mégpedig annak felhasználásával, hogy

(b_0) a $0 < x < \frac{\pi}{2}$ intervallumon a $\frac{\sin x}{x}$ függvény szigorúan monoton fogyó.

(c) Bizonyítsa be a (b_0) állítást a differenciálszámítás elemei segítségével![183]

---

[180] Ezek az állítások nem függnek az arhimédészi axiómától.

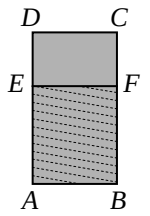
[181] Hilbert itt arra hivatkozik, hogy minden háromszögben (itt az ADC' derékszögű háromszögről van szó) nagyobb szöggel nagyobb oldal van szemközt. (A könyvben korábban már kimutatta, hogy ez sem függ az arkhimédészi axiómától; kizárólag az egybevágóság axiómái kellenek a bizonyításához).

[182] Emlékeztetőül: Egy sokszöget *egyszerű*nek nevezünk, ha 1) bármely két csúcsa különböző, 2) egyik csúcsa sem esik egy oldal belsejébe és 3) bármely két oldalnak nincs közös belső pontja.

[183] A (b_0) állítást a differenciálszámítás nélkül is be lehet bizonyítani, pusztán goniometriai eszközökkel; ilyen bizonyítást azonban meglehetősen nehéz fölfedezni.

3F.3 (a) Olvassa el újból a 3.29 szakaszt!
(b) Szűrje ki a levezetésből és elemezze a mai matematika szemszögéből nem korrekt lépéseket!
(c) Hogyan lehetne az ottani „arkhimédészi” ötletet *korrekten* felhasználni az *OQP* idom területének a kiszámítására?

3F.4 Bizonyítsa be a mértékgeometrián belül, hogy
(a) az átdarabolhatóság tranzitív reláció,
(b) a kiegészítéssel-átdarabolhatóság tranzitív reláció!
Útmutatás. Használja föl a Bolyai-Gerwien-tétel 3.56(a_1*) változatát!



3F.5a ábra

3F.5 Vezesse le Hilbert tételéből (3.57(c), lábjegyzet), hogy
egy téglalap nem lehet átdarabolhatóan egyenlő egy valódi-rész-sokszöggel.
(A 3F.5a ábra emlékeztető egy speciális esetre: Az *ABCD* téglalap nem lehet átdarabolhatóan egyenlő az *ABFE* téglalappal.) négyzet kirakása egybevágó négyzetekkel, hol?

3F.6 Bizonyítsa be, hogy ha a számszerű szakaszhosszúságot és a számszerű területet az egydimenziós ill. a kétdimenziós Peano−Jordan-mértékkel definiáljuk, akkor egy négyzet területe egyenlő az oldala hosszának a négyzetével!

3F.7 Bizonyítsa be, hogy átdarabolhatóan egyenlő szakaszok egybevágók![184]

3F.8 (a) Bizonyítsa be, hogy nem-korlátos síkbeli ponthalmazra nem alkalmazható a Peano−Jordan-mérés!
Útmutatás. Valójában arról van szó, hogy az ilyen ponthalmaznak nincs Peano−Jordan-külső mértéke (lásd 3.45).

3F.9 (a) Bizonyítsa be ezt az állítást: Ha az *a, b, c* szakaszok közül (a,b) és (a,c) összemérhető párok, akkor (b,c) is összemérhető pár, sőt mindhárom szakasznak van közös mértéke!
(b) Ennek a tételnek nincs érvényes aritmetikai analogonja. Miért?

3F.10 Olvassa át a 3.12 szakaszt, amelyben felhasználtuk az $ACF\mathrm{V}=4\cdot ABC\mathrm{V}$ összefüggést! Bizonyítsa ezt be a szakaszban található adatok alapján!
(a) a mértékgeometria keretében,
(b) a szintetikus geometria keretében (pl. az átdarabolhatóság értelmében)!

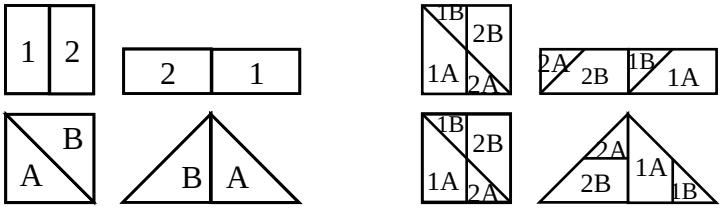
3F.11 (a) Bizonyítsa be a szintetikus geometria keretében, hogy a szintetikus geometriában (szakaszokra vonatkoztatva) az arkhimédészi axióma ekvivalens az eudoxoszi axiómával!
(b) Van ennek a tételnek megfelelője a valós számokra vonatkoztatva?
(c) Van-e kapcsolat azzal a tétellel, hogy tetszőleges $0<q<1$ számra $q^n\to 0$, ha $n\to\infty$?

3F.12 Kepler „körmérési” eljárásának (3.152) vannak olyan gondolati elemei, amelyek elmozdulást mutatnak az euklideszi körméréstől és az arkhimédészi parabolakvadratúrától a modern Riemann-integrál felé. Melyek ezek?

3F.13 (a) Bizonyítsa be a szintetikus geometrián belül (pusztán az egybevágóság felhasználásával) az átdarabolhatóság tranzitivitását, vagyis azt, hogy ha (A,C) és (B,C) átdarabolhatóan egyenlő sokszögpárok, akkor (A,B) is átdarabolhatóan egyenlő sokszögpár!
Útmutatás. 1. Tanulmányozza és értelmezze a 3F.13a szimbolikus ábrát!
2. Az ábra két különböző szempontból is szimbolikus. Fogalmazza meg ezeket!
(b) Vezesse le ebből − szintén a szintetikus geometria talaján − a kiegészítve-átdarabolhatóság tranzitivitását!

---

[184] Ez a tény nagyon pregnánsan mutatja, hogy mennyivel gazdagabb a sík struktúrája, mint az egyenesé (és ez *csak egy* nézőpont ebben az összehasonlításban).



3F.13a ábra

3F.14 Bizonyítsa be a szintetikus geometria keretében, hogy bármely sokszöghöz[185] van vele átdarabolhatóan egyenlő négyzet![186]

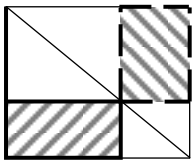
(*Útmutatás.* Állítsa össze a bizonyítást a következő − szintén bizonyítandó − állításokból:

(a) Minden sokszög közös belső pont nélküli háromszögek egyesítése.

(b) Minden háromszöghöz van vele átdarabolhatóan egyenlő paralelogramma.

(c) Minden paralelogrammához van vele átdarabolhatóan egyenlő téglalap.

(d) Minden téglalaphoz van vele átdarabolhatóan egyenlő olyan téglalap, amelynek egyik oldala tetszőlegesen megadott szakasz. (Használja föl a 3F.14a ábrát és a 2. füzetbeli 2.11, 2.21 szakaszokat!)

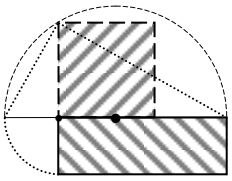


3F.14a ábra

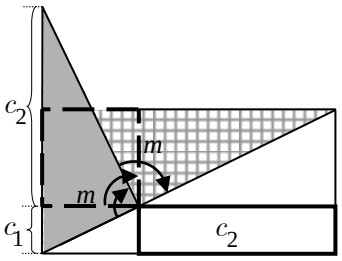
(e) Két téglalap együtteséhez van vele átdarabolhatóan egyenlő téglalap.

(f) Minden téglalaphoz van vele átdarabolhatóan egyenlő négyzet.

Útmutatás. Használja föl az 1. füzetbeli 1F.16 feladat (a) részét! A 3F.14c ábra az 1F.16a ábra ismétlése annak bizonyítására, hogy egy téglalap két oldalából, c_1-ből és c_2-ből kiindulva a 3F.14b ábra szerinti szerkesztéssel nyert négyzet valóban „egyenlő” az eredeti téglalappal.[187]



3F.14b ábra



3F.14c ábra

3F.15 Bizonyítsa be:

(a) Az a konstruktív eljárás, amellyel 3F.14-ben kimutattuk bármely sokszöghöz vele átdarabolhatóan egyenlő négyzet létezését, két olyan sokszöghöz, amelyek egyike a másiknak valódi része, mindig különböző négyzeteket feleltet meg.

---

[185] „Sokszög”-ön itt is − mint ezekben a füzetekben mindvégig − *egyszerű sokszöget* értünk. (Lásd 3.60.)

[186] Megjegyzések. 1. Az alábbiakban javasolt bizonyítás konstruktív, vagyis a szóban forgó objektumok létezését úgy bizonyíthatjuk, hogy azzal a − körzővel és vonalzóval való − megszerkesztésükre is eljárást nyerünk.

2. Ennél az állításnál egyértelműségről nincs szó! Az állítás nyitva hagyja azt a lehetőséget, hogy egy sokszög két különböző (különböző oldalú) négyzettel átdarabolhatóan egyenlő. Ez természetesen − az átdarabolhatóság tranzitivitása következtében − azt hozná magával, hogy létezne két különböző, de átdarabolhatóan egyenlő négyzet. (Lásd ezzel kapcsolatban a 3F.15 feladatot!)

[187] A 3F.14b ábra szerinti szerkesztés közismert a mai iskolai matematikából is („két szakasz középarányosának − mértani közepének − megszerkesztése a Thalész-tétel fölhasználásával”). Az iskolai *mértékgeometriában* ebből a geometriai konfigurációból − a derékszögű háromszög két rész-háromszöge hasonlóságát fölhasználva − könnyen adódik a négyzet *számszerű* területegyenlősége a téglalappal. A 3F.14c ábra szerint viszont *szintetikus geometriai* (pl. a görög matematikába beleillő) bizonyítást találhatunk a négyzet és a téglalap „egyenlőségére”. (A három nyíl azt jelzi, hogy a kiinduló téglalap oldalaiból szerkesztett − satírozott − derékszögű háromszöget 90°-kal elforgatjuk.)

(b) Az *S*, *N* állításokra nézve $S \Leftrightarrow N$[188], ahol
az *S* állítás: *Ha egy sokszög valódi része egy másiknak, nem lehetnek átdarabolhatóan egyenlők*,
az *N* állítás: *Különböző négyzetek*[189] *nem lehetnek átdarabolhatóan egyenlők.*
Útmutatás. $N \Rightarrow S$-et indirekten bizonyítsuk; használjuk föl az (a) állítást és az átdarabolhatóság tranzitivitását.

3F.16 A Pitagorász-tételek megfordításai a következő állításban foglalhatók össze.

A *P* állítás: *Ha egy a, b, c oldalú háromszögnél* $a^{\mathrm{W}} \oplus b^{\mathrm{W}} \mathrm{B} c^{\mathrm{W}}$, *akkor az a, b oldalak által közbezárt szög derékszög.*

A szintetikus geometriában természetesen különböző tételekről van szó (akárcsak maguknál a pitagorász-tételeknél, l. az 1. füzetet) aszerint, hogy mit értünk a „B” szimbólummal jelzett „egyenlőség”-en. Ebben a feladatban legyen ez az „egyenlőség” az átdarabolhatóság.

(a) Tanulmányozza „*a* pitagorász-tétel megfordításának” bizonyítását − beleértve a hivatkozott előzmények elemzését is − Euklidésznél (*Elemek* I. 48). Állapítsa meg, hogy

(a_1) hogyan érti ő itt az „egyenlőség”-et (ill. hogy egyáltalán lehetséges-e ennek − az ő kontextusában − egyértelmű értelmezése), és

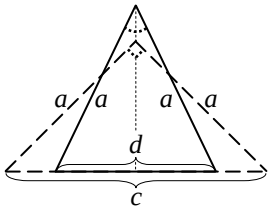
(a_2) a bizonyítás melyik részében és mily módon hivatkozik arra, hogy különböző négyzetek nem lehetnek „egyenlők”!

3F.17 (a) Bizonyítsa be, hogy $N \Rightarrow P$ (l. 3F.15, 3F.16)!
Útmutatás. Dolgozza ki a következő vázlatot:

Ha $\neg P$, vagyis létezik olyan *a, b, c* oldalú háromszög, amelyre $a^{\mathrm{W}} \oplus b^{\mathrm{W}} \mathrm{B} c^{\mathrm{W}}$, de az *a* és *b* által közbezárt szög nem derékszög, akkor tekintsük azt a derékszögű háromszöget is, amelynek befogói *a* és *b*; az átfogóját jelöljük c'-vel. Ekkor c' nem egybevágó *c*-vel (miért is?) stb.

(b) Bizonyítsa be, hogy $P \Rightarrow N$!
Útmutatás. Dolgozza ki a következő vázlatot:

Ha $\neg N$, vagyis létezik két különböző, *c* ill. *d* oldalú négyzet, amelyek átdarabolhatóan egyenlők, akkor legyen pl. $d < c$, és tekintsünk két háromszöget (3F.17a ábra): 1. Azt az egyenlőszárú derékszögű háromszöget, amelynek *c* az alapja; a szárát jelöljük *a*-val. 2. Azt az egyenlőszárú háromszöget, amelynek *d* az alapja, a szára pedig szintén *a*. Ekkor a 2. háromszög biztosan nem derékszögű (miért is?). Az 1. háromszögre érvényes az átdarabolásos pitagorász-tétel stb.[190]



3F.17a ábra

(c) Okvetlenül szükséges-e a (b) bizonyításban *egyenlőszárú* háromszögekkel dolgozni?

3F.18 (a) Olvassa át újra a 3.58, 3.59 szakaszokat!

(b) Bizonyítsa be, hogy a valódi nem-arkhimédészi geometria bármely modelljében van két olyan paralelogramma, amelyek nem átdarabolhatóan egyenlők, bár az alapjaik egybevágók és a magasságaik is egybevágók!

3F.19 Legyenek egy tetszőleges *T* téglalap oldalai az *a, b* szakaszok; a mértékszámaikat jelöljük $|a|$-val és $|b|$-vel.

(a) Bizonyítsa be, hogy bármely *T* téglalap Peano−Jordan-mérhető.

---

[188] Természetesen ezzel még egyik állítás sincs bebizonyítva.

[189] Két négyzetet különbözőnek mondunk, ha az oldalaik nem egybevágók; ekkor az egyikük egybevágó a másiknak egy valódi-rész-négyzetével.

[190] A 3F.16, 3F.17 feladatok eredményének összefoglalása: A szintetikus geometriai pitagorász-tétel megfordítása lényegében ekvivalens a „szigorú monotonitási tétellel” (3.57). Márpedig az utóbbinak a szintetikus geometriai bizonyítása bonyolult és Euklidész után 2200 évet váratott magára. A görög matematikában és a mai iskolai matematikában mégis „problémamentesen” jelenik meg a pitagorász-tétel megfordítása. Egészítse ki hát ezeket a feladatokat ennek a paradox helyzetnek az elemző magyarázatával! (V. ö. 3F.5, 3F.16 !)

Útmutatás. Olvassa át újból a 3.45 szakaszt!

(b) Legyenek T oldalai az *a, b* szakaszok; a mértékszámaikat jelöljük $|a|$-val és $|b|$-vel. Bizonyítsa be, hogy T Peano−Jordan-mértéke az $|a|\cdot|b|$ szám.

Útmutatás. Olvassa át újból a 3.42−3.44 szakaszokat! Válasszon olyan speciális Peano−Jordan-mérési eljárást a T-hez (3.42 értelmében), amely nyilvánvalóan az $|a|\cdot|b|$ számhoz vezet.[191]

3F.20 (a) Olvassa át újra a 3.4 szakaszt!

(c) Bizonyítsa be, hogy a 3.4a$_2$ ábra két kiemelt idomának megegyező a számszerű területe!

3F.21 (a) Olvassa át újból a 3.29 szakaszt!

(b) „Bizonyítsa be” a Mehler-könyvből idézett „levezetés” mintájára, annak lépéseit követve, hogy

(b$_1$) az x a x^2 $(0\le x\le c)$ függvény $[0;c]$ fölötti ordinátahalmazának területe egyenlő a *c* alapú és c^2 magasságú téglalap területének $\frac{1}{3}$-részével,

(b$_2$) az x a x^3 $(0\le x\le c)$ függvény $[0;c]$ fölötti ordinátahalmazának területe egyenlő a *c* alapú és c^2 magasságú téglalap területének $\frac{1}{4}$-részével,

(b$_3$) az x a x^n $(0\le x\le c, n\in\mathbb{N})$ függvény $[0;c]$ fölötti ordinátahalmazának területe egyenlő a *c* alapú és c^2 magasságú téglalap területének $\frac{1}{n+1}$-részével,

vagyis, hogy − mai felfogásban − $\int_0^c x^2dx=\frac{c^3}{3}$, $\int_0^c x^3dx=\frac{c^4}{4}$ és $\int_0^c x^ndx=\frac{c^{n+1}}{n+1}$.

3F.22 (a) Olvassa át újból a 3.27 szakaszt!

(b) Ellenőrizze a szóban forgó „végtelen test” térfogatának a Torricelli által „kiszámított” értékét úgy, hogy a testet bizonyos két részre bontva kezeli:

(b$_1$) Annak az egyenes körhengernek a térfogata, amelynek az alapja ill. a magassága a *c* sugarú körlemez ill. $\frac{a^2}{2c}$: $\pi c^2\cdot\frac{a^2}{2c}=\frac{1}{2}\cdot\pi a^2c$.

(b$_2$) Számítsa ki − egy improprius integrállal − annak a végtelen forgáshiperboloidnak a térfogatát, amely az $xy=\frac{1}{2}\cdot a^2$ egyenletű hiperbola $y=\frac{a^2}{2c}$ és $y=\infty$ közötti ágának az *y*-tengely körüli megforgatásával jön létre.[192] A helyes eredmény: $\frac{1}{2}\cdot\pi a^2c$.

(b$_3$) A keresett térfogat értéke tehát: $\frac{1}{2}\cdot\pi a^2c+\frac{1}{2}\cdot\pi a^2c=\pi a^2c$, s ez igazolja Torricelli „számításának” *az eredményét*.

3F.23 (a) Olvassa át újból a 3.30 szakaszt!

(b) Bizonyítsa be: *Két olyan trapéz, amelyeknél a négy alap egybevágó és a két magasság is egybevágó, átdarabolhatóan egyenlő.*

Útmutatás. Az állítás egyaránt bizonyítható a tiszta szintetikus geometria keretében ill. úgy, hogy a számszerű területet is fölhasználjuk.[193]

(c) *Legyenek* f_1 *és* f_2 *továbbá* g_1 *és* g_2 *olyan, egy* $[a;b]$ *intervallumon értelmezett, szakaszonként lineáris, folytonos függvények, amelyekre*

$$0\le f_2(x)\le f_1(x),\ 0\le g_2(x)\le g_1(x)\ \ (x\in[a;b])\ ,$$

---

[191] Az (a) feladat eredménye azt is jelenti, hogy a *T*-re alkalmazott Peano−Jordan-mérési eljárások mind ekvivalensek.

[192] Integrációs változónak az *y*-t válassza!

[193] Az utóbbihoz alkalmazzuk Bolyai Farkas tételét a végszerű egyenlőségről (l. 3.56(a$_1$)).

és

(E) $$f_1(x)-f_2(x)=q[g_1(x)-g_2(x)]\ \ (x\in[a;b],\, q\in\mathbb{R}^+)\,.$$

Legyen továbbá $\mathcal{F}$ ill. $\mathcal{G}$ az a sokszög a koordinátasíkon, amelyet felülről és alulról az f_1 és f_2 ill. a g_1 és g_2 görbék, balról és jobbról az $x=a$, $x=b$ egyenletű egyenesek határolnak.[194]

Bizonyítsa be a következőket az itt megadott sorrendben!

(c_1) *Ha $q=1$, akkor $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ átdarabolhatóan egyenlő.*

Útmutatás. Szintetikus geometriai bizonyítás, (b) fölhasználásával.

(c_2) *Ha $q\in\mathbb{N}^+$, akkor $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ átdarabolhatóan egyenlő.*

Útmutatás. Szintetikus geometriai bizonyítás, (c_1) fölhasználásával.

(c_3) *Ha $q\in\mathbb{Q}^+$, akkor $\mathcal{F}$ és $\mathcal{G}$ átdarabolhatóan egyenlő.*

Útmutatás. Szintetikus geometriai bizonyítás, (c_2) fölhasználásával.[195]

3F.24 (a) Olvassa át újból a 3.31 szakaszt!

(b) Bizonyítsa be − kétféleképpen −, hogy az ottani $\mathcal{F}$ ponthalmaz nem Riemann-mérhető!

Útmutatás. *Az egyik mód*: Állapítsa meg az $\mathcal{F}$ külső Riemann-mértékének értékét és belső Riemann-mértékének értékét!

A másik mód: Használja föl

(a) egy nem-negatív függvény R-integrálhatóságának (valamely $[a;b]$ intervallumon) az ekvivalenciáját a megfelelő ordinátahalmaz R-mérhetőségével (3.45(e)) és

(b) az R-integrálhatóságnak a függvény oszcillációs összegeivel kifejezett kritériumát (3.45(d))![196]

3F.25 (a) Olvassa át újból a 3.33 szakaszt (a lábjegyzetekkel együtt)!

(b) Bizonyítsa be a 3.33(b) alatti dőlt betűs állítást!

3F.26 (a) Olvassa át újból a 3.14 szakaszt (a lábjegyzetekkel együtt)!

(b) Idézze föl a parabolának egy egyenlettel való (koordinátageomeriai) karakterizálását!

(c) Idézze föl a parabolának egy karakterisztikus geometriai tulajdonságát!

(d) Bizonyítsa be, hogy a parabola (b) alatti és (c) alatti „szimptomái” ekvivalensek egymással és a 3.14 szakaszbeli (S) szimptomával!

---

[194] Az (E) feltétel azt jelenti, hogy $\mathcal{F}$ *ill.* $\mathcal{G}$ − a megadott elrendezésben − eleget tesz a Cavalieri-elv 3.19(a), 2. alatti változata feltételének.

[195] *Megjegyzés a (c) alatti feladatokhoz*. $\mathcal{F}$ *és* $\mathcal{G}$ még akkor is átdarabolhatóan egyenlő, ha $q\in\mathbb{R}^+$. Ez azonban itt már nem lehet bizonyítási „feladat”, hiszen közvetlen következménye a 3.30 alatti tételnek és Bolyai Farkas 3.56(a_1) alatti tételének.

[196] A második módnál célszerű a 3.31a ábrában az $\mathcal{F}$ idomot a koordinátasíkon 90°-kal elforgatni.