ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ

Deák Ervin

Kísérő füzetek a „A matematika-tudomány története” c. kurzushoz

2. füzet

Kézirat 2., javított és bővített változat

2010

Eszmetörténeti vonalak a „mérés” fogalomkörében

A „területegyenlőségi” fogalmak; az „egyenlőség” Euklidész Elemei-ben; az eudoxoszi arányelmélet; a gnomón-ábrák probléma-területe; a geometriai algebra; a „területillesztések”; kitekintés a kúpszeletekre; kitekintés az algebra egy fejlődés-vonalára; Eudoxosztól Dedekindig

2A. A terület-egyenlőségi fogalmak. A gnomón-ábrák mellékátlóinak párhuzamossága és a kiegészítő paralelogrammák „egyenlősége” (a problémák). Az „egyenlőség” Euklidész *Elemei*ben.

2.1 *Terület-)egyenlőségi fogalmak a sokszögek körében.*

(a) *Definíciók és jelölések.* A terület-elmélet alapja: négy, a síkbeli sokszögek[1] körében definiált binér reláció. $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ sokszögeket jelentenek.

(1)	$\mathcal{A} \overset{\mathrm{v}}{=} \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ <u>*és*</u> $\mathcal{B}$ <u>*átdarabolhatóan egyenlő*</u>
		az egyik sokszög felbontható[2] véges sok sokszögre[3] úgy, hogy ezek kongruens példányaiból a másik sokszög is kirakható
(1*)	$\mathcal{A} \overset{\mathrm{kv}}{=} \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ <u>*és*</u> $\mathcal{B}$ <u>*közvetve átdarabolhatóan egyenlő*</u>
		mindkettő átdarabolhatóan egyenlő ugyanazzal a harmadikkal
(2)	$\mathcal{A} \overset{\mathrm{k}}{=} \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ <u>*és*</u> $\mathcal{B}$ <u>*kiegészítve-átdarabolhatóan egyenlő*</u>
		átdarabolhatóan egyenlők hozzávételével átdarabolhatóan egyenlőkké tehetők
(2*)	$\mathcal{A} \overset{\mathrm{kk}}{=} \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ <u>*és*</u> $\mathcal{B}$ <u>*közvetetten kiegészítve-átdarabolhatóan egyenlő*</u>
		mindkettő kiegészítve-átdarabolhatóan egyenlő ugyanazzal a harmadikkal

(b) A legegyszerűbb és legtermészetesebb ekvivalencia a sokszögek körében az egybevágóság. Az „átdarabolhatóan egyenlő”-ség ennek közvetlen általánosítása; (véges sok) „részenkénti egybevágóság”-nak is mondható. Bolyai Farkas az *átdarabolhatóságot* <u>*végszerű egyenlőség*</u>-nek nevezte.[4]

(c) (1*) ekvivalens (1)-gyel és (2*) ekvivalens (2)-vel, vagyis az (1), (2) relációk tranzitívok.

Ezeket Euklidész bőségesen, de hallgatólagosan kihasználja; a bizonyításnak azonban még az igénye sem merül föl. A tranzitivitásnak nagy jelentősége van, ui. sokszor csak egy harmadik idom közbeiktatásával sikerül fölismerni, hogy két idom pl. átdarabolhatóan egyenlő.

(d) A felsorolt „terület-egyenlőségek” szintetikus geometriai fogalmak. A mértékgeometriában szokásosan $|\mathcal{V}|$-vel jelölve egy $\mathcal{V}$ sokszög számszerű területét (Jordan-Peano-mértékét),

(3) $|\mathcal{A}|=|\mathcal{B}|$ jelentése: $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ területegyenlő (<u>*számszerűen egyenlő területű*</u>).

(e) Az (a) alatti tárgykörben *nincsenek sztenderd jelölések* (a mai matematikában sem); az (a)-beli szimbólumokat az itteni célokra szabadon választottuk. (Az átdarabolhatóság-reláció másik jele ezekben a füzetekben olykor a $\doteq$ jel.) A görög matematikában, ahol ezeknek a „terület”- vagy „idom”-

---

[1] Az egész gondolatrendszer hilberti pontosítását követve célszerű *egyszerű sokszög*-re gondolni, vagyis olyan zárt töröttvonalra (az élei az *oldalak*, a töréspontjai a *csúcsok*), amelynek bármely két csúcsa különböző, egyik csúcs sem belső pontja valamely oldalnak, és nincs két egymást metsző oldal.

[2] A „felbontás” itt – mai fogalmakkal és mai nyelven – a sokszögnek mint ponthalmaznak olyan rész-sokszögek mint részhalmazok egyesítéseként való előállítását jelenti, hogy bármely két ilyen résznek nincs közös belső pontja.

[3] Végső soron háromszögre.

[4] Bolyai Farkasnak ezzel kapcsolatosalapvetően fontos eredményeiről többször is szólni fogunk.

-egyenlőségi elképzeléseknek – átfogóan használható számszerűterület-fogalom hiányában – egészen alapvető jelentőségük volt[5], természetesen szintén hiányoztak a megfelelő szimbólumok, minthogy általában nem valamilyen „algebrai” jellegű formula-rendszer volt a matematika prezentációs formája és kommunikációs eszköze.[6]

(f) Annál különösebb viszont, hogy a görög matematikában *nem is definiálták* ezeket a relációkat, nem vizsgálták a tulajdonságaikat és egymás közötti kapcsolataikat, és külön neveket sem adtak nekik. Ezzel a nyelvi helyzettel még bővebben foglalkozunk, mert ez nemcsak önmagában, történetileg érdekes, hanem olyan tények kifejeződése, amelyek ezen kurzus alapgondolatának fő vonalába esnek. Ezek a tények ui. olyan fogalmi „rendetlenségek”, amelyek ugyan a matematika-tudományban a 19. században fölerősödő Euklidész-kritikai folyamatok után 1900 körül végre megszűntek (erről később részletesen szólunk majd), de az iskolai matematikában a „terület” fogalmát mindmáig terhelik.

2.2 (a) Euklidész mindezeket a relációkat és magát a kiinduló ekvivalenciát, az egybevágóságot is (amelynek általánosításaképpen az összes többi fogalmilag felépül), egyaránt *egyenlőség*-nek nevezi ott, ahol egy geometriai szituációban megjelennek (de nem kezeli őket elkülönített és definiált önálló fogalmakként).

(b) Minden ilyen előforduláskor (nagyon sok helyen, nem csak az I. könyvben) azután *az elnevezés alapján* hivatkozik az I. könyv elején közölt axiómákra, hogy az ezekben kifejezett *tényeket* – amelyek logikailag valójában *kívánalmak* egy egyenlőségnek nevezett fogalommal szemben – nagyon sok helyen bizonyítási eszközként használja. (A kilenc axióma közül az első nyolcról van szó.)

Axiómák Euklidész Elemeinek I. könyvében	
1. *Amik ugyanazzal egyenlők, egymással is egyenlők.*	5. *Ugyanannak a kétszeresei egyenlők egymással.*
2. *Ha egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek egyenlők.*	6. *Ugyanannak a fele részei egyenlők egymással.*
3. *Ha egyenlőkből egyenlőket veszünk el, a maradékok egyenlők.*	7. *Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással.*
4. *Ha nem egyenlőkhöz egyenlőket adunk hozzá, az összegek nem egyenlők.*[7]	8. *Az egész nagyobb a résznél.*[8]
9. Két egyenes vonal nem fog közre területet.	

[5] Ezt már tapasztaltuk az 1. füzetben a Pitagorász-tétellel kapcsolatban, speciális – négyzetek és négyzetösszetételek közötti – „egyenlőség”-viszonyok értelmezésénél. Ebben a füzetben, ahol Euklidész Elemeinek – kiemelkedően az I. és az V. könyvnek – behatóbb vizsgálatára térünk éppen ebben a tárgykörben – látni fogjuk ezeknek az elképzeléseknek az idomok sokkal szélesebb körében való felhasználását.

[6] Az olvasást éppen az teszi nagyon nehézzé, hogy olyan matematikai tartalmakat, amelyeknek megjelenítési eszközeként a képletnyelvet szoktuk meg, óhatatlanul hosszadalmas, szövevényes és nehézkes szövegekkel fejeztek ki.

[7] Egyes kiadásokban ez után még a következő is szerepel: *És ha nem egyenlőktől egyenlők vétetnek el, a maradékok nem egyenlők.*

(Ez az idézet Brassai Sámuel erdélyi polihisztor 1865-ös *Elemek*-kiadásából való, amely a legteljesebbek közé tartozik, minthogy az autentikus I.-XIII. könyveken kívül a nem-autentikus XIV. és XV. könyvet is tartalmazza. Ez a nagyon gondos kiadás – amelyet ma már alig ismernek – nagyon nehezen olvasható (bár ez az idézett mondatból nem tűnik ki), mert a nyelvezete, amelyet Brassai jóformán a semmiből teremtett meg (minthogy a 19. század közepén magyar matematikai nyelv – eltekintve a legelemibb matematikától – még alig létezett), végül mégsem vált sztenderddé. (A mai magyar matematikai nyelv a századforduló körül alakult ki.)

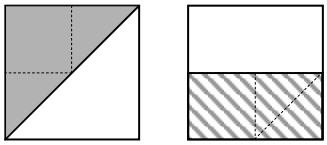
[8] Bár ebben nem szerepel az „egyenlő” szó, valójában az egyenlőtlenségről – tehát végső soron itt is az egyenlőségről – van szó.

2.3 (a) Az euklidészi axiómákban megjelenő „egyenlőség” tartalmi és logikai kritikájaként a következő szakaszokban (2.4–2.12) több oldalról is igyekszünk megvilágítani az idevágó matematikai és matematika-történeti viszonyokat. Ebben a kritikában erősen figyelnünk kell arra, hogy – még ha (igazodva Euklidész téma-választásához) szigorúan a sokszögek körében maradunk is – ez az „axiómarendszer” az önkényesség játékszereként kezeli a „hozzáadás”, „elvétel”, „kétszeres”, „fele rész” szavakkal fedezhető műveleteket.

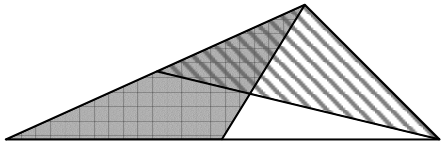
(b) Euklidész eljárását követve egyenlőségnek nevezhetnénk például azt a relációt a sokszögek körében, amelynek egy sokszög-pár akkor eleme, ha a két sokszög belső szögeinek összege megegyezik.[9] Ez kétségtelenül reflexív, szimmetrikus és tranzitív, vagyis ekvivalencia-reláció.[10]

Mármost a 2.3a ábrán két különböző módon „feleztük” egy négyzet két egybevágó példányát. Ezek a „felezések” megfelelnek Euklidész – kimondatlan – *elképzelésének* a felezésről (?), ui. mindkét esetben egybevágó részekre való bontásról van szó. (Lásd alább.) Az egyik négyzet „fele” azonban nem „egyenlő” a másik „felével” a fent definiált „egyenlőség” értelmében; a 6. axióma nem teljesül. Ha azonban az átdarabolhatósággal értelmezzük az „egyenlőséget”, akkor az ábrán bemutatott geometriai szituáció megfelel a 6. axiómának (lásd az ábrán a szaggatott felosztó vonalakat).

(c) Ha egy háromszög „felezését” bármely súlyvonal általi felbontással értelmezzük (l. a 2.3b



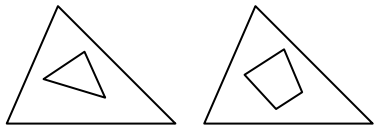
2.3a ábra



2.3b ábra

ábrát), akkor ez is „Euklidész szellemében” történik, hiszen a keletkező két rész-háromszög – bár nem okvetlenül egybevágó – átdarabolhatóan egyenlő (ami az *Elemek*-ben elfogadott és rendszeresen használt „egyenlőség”-reláció, még ha nincs is önálló fogalomként bevezetve és elnevezve); az „egyenlőséget” az átdarabolhatósággal értelmezve a két megjelölt – különböző „felezésekből” származó – rész-háromszög valóban „egyenlő” (bár azt, hogy egymásba átdarabolhatók, nem lehet pusztán ránézéssel fölismerni).

2.3* (a) A 2.3(b) alatti „egyenlőség”-relációnál óhatatlanul összeütközésbe kerülnénk a 8. axiómával (2.3*a ábra). Bár sem a „nagyobb” reláció, sem a „rész” fogalma nincs definiálva, biztos, hogy a szerző olyasmit gondolt el „nagyobb”-nak, ami kizárja az „egyenlőséget”, és olyasmit „rész”-nek (a szakaszok körében és az idomok körében), amely megfelel a mai ponthalmazelméleti felfogásnak.



2.3*a ábra

(b) Ezt az „egyenlőség”-relációt példaképpen konstruáltuk azoknak a nehézségeknek az egyszerűen átlátható illusztrálására, amelyek az *Elemek* I.-beli axiómarendszerből és annak problematikus használatából erednek.

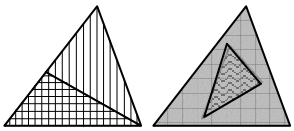
Ezek a nehézségek ténylegesen föllépnek Euklidésznél, anélkül, hogy ő érzékelné őket. Most két olyan helyet említünk az I. könyvből, ahol speciálisan a 8. axiómával való „visszaélés” történik.

---

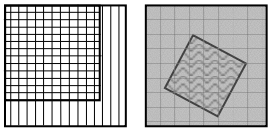
[9] Szögek összegét nem csak mértékelméletileg lehet értelmezni, hanem egészen természetes módon a szögek „összeillesztésével” is (hasonlóan, mint a szakaszok „összegét”).

[10] Érdekes, hogy Euklidész az „egyenlőség” reflexívitását és szimmetriáját nem követeli az axiómarendszerben, csak a tranzitivitását (1. axióma).

(c) Az I. 39 tétel bizonyításában (magáról a tételről lásd 2.9) Euklidész arra hivatkozik, hogy a 8. axióma szerint egy háromszög nem lehet egyenlő egy valódi rész-háromszöggel (2.3*a ábra), a pitagorász-tétel megfordításának bizonyításában (I. 48) pedig arra, hogy egy négyzet nem lehet egyenlő egy valódi rész-négyzettel (2.3*b ábra).



2.3*a ábra



2.3*b ábra

Vajon mit kell ezeken a helyeken „egyenlőség”-en érteni?

Ha pedig egyértelműen megállapítható lenne pl., hogy Euklidész az átdarabolhatóságra gondolt, akkor nem kellene-e – persze a szintetikus geometria talaján – ezt a „szigorú monotonitási tételt”[11] be is bizonyítani?

2.4 (a) 2.3 és 2.3* alatt csupán érzékeltetni akartuk – kiragadott példákon és „példázatokon” – a 2.1 alatti fogalmakkal és a 2.2 alatti axiómákkal kapcsolatos problémákat euklidészi *Elemek*-ben. Általánosságban a következőképpen lehet ezeket rendszerezni.

1. Ha valamely relációt „egyenlőségnek” nevezünk, akkor ellenőrizni kellene, hogy ez a reláció teljesíti-e az „egyenlőség” axiómáit.

2. Ha legalább két különböző „egyenlőség”-et definiálunk, akkor ellenőrizni kellene, hogy bármelyik kettő ekvivalens-e (vagyis, hogy – az eltérő fogalmi meghatározás ellenére – két sokszög pontosan akkor „egyenlő”-e az egyik értelemben, ha a másikban az).

A következő két diagramba foglalt áttekintések a 2. kérdéskörre vonatkoznak.

(b) Ezek az implikációk közvetlenül adódnak a definíciókból:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{egybevágó}} \arrow[r, Rightarrow] & \text{átdarabolható} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{kieg. átdarabolható} \arrow[d, Rightarrow] \\
& \text{közvetve átdarabolható} \arrow[r, Rightarrow] & \text{közvetve kieg. átdarabolható}
\end{tikzcd}$$

(c) Ezek viszont kérdésesek maradnak:

$$\begin{tikzcd}
\text{átdarabolható} \arrow[d, phantom, "(2)\ \Uparrow ?"] & \text{kieg. átdarabolható} \arrow[l, Leftarrow, "?", "(1)"'] \arrow[d, phantom, "(3)\ \Uparrow ?"] \\
\text{közvetve átdarabolható} & \text{közvetve kieg.átdarabolható} \arrow[l, Leftarrow, "?", "(4)"']
\end{tikzcd}$$

2.5 (a) Az „egyenlőség”-nek nevezett egybevágóságot és speciálisan a háromszögek egybevágóságát Euklidész bonyolultan, más – körülményes – tételekkel keverve és rendszertelenül (nem egy helyen összegyűjtve, hanem a 4., 8. és 26. feladatban) tárgyalja; a háromszögek egybevágóságának

[11] Sztenderd elnevezés hiányában azért választottuk ezt a kifejezést, mert ez talán érzékletesen utal a dolog lényegére. (Valamilyen elnevezésre mindenképpen szükségünk van, hiszen – ellentétben a egész problematika teljes elhallgatásával a görög matematikában – éppen az ilyen viszonyoknak a föltárára törekszünk.)

egyik – talán a legkényesebb – esetét (két oldal és az egyikkel szemben fekvő szög megegyezése) nem is említi. Az *Elemek*-ből tehát nem tűnik ki eléggé az egybevágóság centrális jellege a geometriában, mert

1. Nem kezeli önálló fogalomként (nincs is külön neve),
2. Nem elkülönítve, nem koncentráltan foglalkozik vele.
3. Nem emeli ki a háromszögek egybevágóságát, és csak hiányosan tárgyalja ennek eseteit.

(b) Euklidész az *Elemek* I. 6. tételének[12] bizonyításában azt használja ki, hogy – mai megfogalmazásban – egy háromszög valódi része egy másiknak, akkor a két háromszög nem lehet egybevágó.

	A mai matematikában	Euklidész az *Elemek*-ben
állítás	Egy háromszög nem lehet *egybevágó* egy valódi-rész-háromszöggel	Egy háromszög nem lehet *egyenlő* egy valódi-rész-háromszöggel
indoklás	Ez geometriai eszközökkel bizonyítandó állítás [13]	Csupán hivatkozás a 8. axiómára

Érdekes, hogy ezt az állítást nem tekinti egészen evidensnek, hiszen hozzáfűz valami indoklást, kb. így: „a kisebbik háromszög egyenlő lenne a nagyobbikkal, *de ez lehetetlenség*.” Ez az „indoklás” (nyilvánvalóan utalás a 8. axiómára) azonban semmitmondó, hiszen a 8. axiómával való kapcsolatot pusztán annak a relációnak az *elnevezése* jelenti, amelyet mi egybevágóságnak hívunk.

2.6 A 2.3 szakaszban szóltunk Euklidésznek egy idom „felezéséről” alkotott elképzeléséről. Ennek lényege az a nyilvánvalóan az aritmetikából importált képzet, hogy egy dolgot két egyenlő részre osztunk.[14] Ezt persze ma fogalmilag különbözőnek kell tekintenünk, aszerint, hogy az „egyenlőség”-nek melyik értelmezéséről van szó (lásd 2.4).

Az - I. 34 tétel bizonyításában konkrétan megjelenik ennek a legspeciálisabb formája, amikor a „felezés” a két egybevágó részre való felosztást jelenti. A tétel: *A párhuzamos vonalú idomok*[15] *szemközti oldalai és szögei egyenlők egymással, és az átló felezi őket*.[16]

---

[12] *Ha egy háromszög két szöge egyenlő, akkor az ezekkel szembeni oldalak is egyenlők*. Az indirekt bizonyításban fölhasználja az I. 4. tételt, amely szerint – mai megfogalmazásban – *két háromszög egybevágó, ha két oldal és a közbezárt szög megegyeznek*. (Valójában az I. 4. tétel az *Elemek*-ben így szerepel: *Ha két háromszögnek két-két oldala páronként egyenlő, és egy-egy szöge is egyenlő, az, amelyet az egyenlő oldalak fognak közre, akkor az alapok* (értsd: a két harmadik oldal) *is egyenlők, és a háromszögek is egyenlők, és a többi szög is páronként egyenlő, amelyekkel szemben az egyenlő oldalak fekszenek*.)

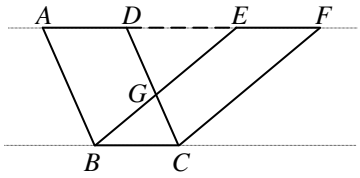
[13] Az állítás szintetikus geometriai. A bizonyításra két lehetőség van. 1. Szintetikus geometriai bizonyítás. (Ez az igazán stílusos.) Lásd a 2F.1 feladatot! 2. Mértékgeometriai bizonyítás indirekten: az indirekt föltevésből (az egybevágóság föltételezéséből) következik, hogy a két háromszög számszerű területe egyenlő, ami viszont ellentmondásban van a számszerű terület additivitásával. (Ez valójában olyan kerülő út, amelyen Euklidész nem is járhatott volna.)

[14] A görög geometriában több ilyen fogalmi „áthozat” van az aritmetikából. Ez a mai matematikából viszszatekintve azért érdekes, mert lényegesen különböző értéktartományokról van szó: A geometriai értéktartományok „folytonosak”, az aritmetikaiak (itt a természetes számok aritmetikájáról van szó) „diszkrétek”, sőt amíg a görög felfogású aritmetikában csak korlátozottan lehet felezni, például a paralelogrammák körében korlátlanul – és nem is egyféleképpen – létezik a „felezés”.

[15] Görögül *parallélogrammon*. (Euklidész definíció nélkül használja ezt a szót, I. 34-ben először.)

[16] Brassai Sámuel *Elemek*-fordításában (lásd a 2.2-hez fűzött egyik lábjegyzetet) a tétel szövege ez: *Az egyközvonalú üreknek átelleni oldalai s szegletei egymással egyenlők, s az átmérő amazokat ketté vágja*. (Feltűnő ebben, hogy a pontosabb értelmű – mert legalább hallgatólagosan valamilyen egyenlőség-relációra utaló – „felezés” szó helyett a lazább jelentésű „ketté vágás” kifejezést használja.)

2.7 (a) Az egybevágóságnál komplexebb, de abból épülő ekvivalencia-relációk az I. könyv 35. tételének bizonyításában bukkannak föl először. A tétel: „*Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák egyenlők egymással*”. A 2.7a ábrán a két paralelogramma: *ABCD* és *EBCF*.



2.7a ábra

(b) Euklidész bizonyításának lépései:

(b_1) „*EAB* és *FDC* egyenlő” [17];

(b_2) „*ABGD* egyenlő *EGCF*-fel” (a 3. axióma alapján);

(b_3) „*ABCD* egyenlő *EBCF*-fel” (a 2. axióma alapján).

(c) Az axiomatikus módszer szempontjából az ilyen bizonyítás előfeltétele lenne, hogy

• definiáljuk – és megkülönböztető elnevezésekkel elkülönítsük egymástól – a szükséges egyenlőség-relációkat, azután pedig

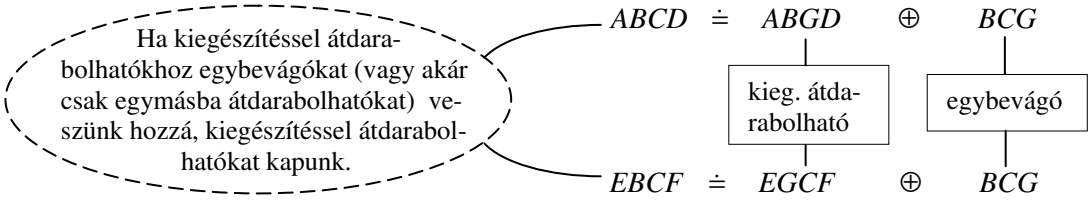
• ellenőrizzük, hogy mindezek „megérdemlik” az egységes „egyenlőség”-minősítést, vagyis hogy eleget tesznek az „egyenlőség” axiómáinak.

Ezek az *Elemek*-ben teljesen hiányoznak.

(d) Ilyen, logikailag korrekt felépítésben ez lehetett volna a tétel megfogalmazása:

Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák kiegészítéssel átdarabolhatóan egyenlők.

A bizonyításnak pedig ez lehetett volna a váza:



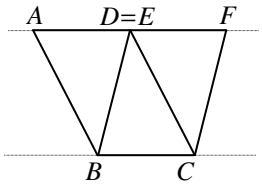
2.7b ábra

Az ovális keretben lévő végső érvet (amely alkalmas általános bizonyítási eszköz bizonyos helyzetekben) Euklidész sem itt, sem másutt nem fogalmazza meg, de ez – a megfelelő műszavak hiányában – nagyon nehéz is lett volna.

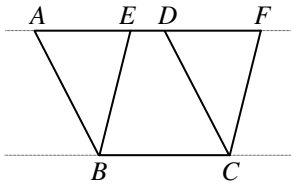
2.7* (a) Ennek a tételnek – amely az iskolai matematikának is nélkülözhetetlen része – azonban feltűnően és fölöslegesen bonyolult az imént bemutatott mindkét bizonyítása. A két paralelogramma ui. szinte triviálisan kiegészítéssel átdarabolhatóan egyenlő, minthogy az egyikhez a *DCF* háromszöget, a másikhoz az azzal egybevágó *ABE* háromszöget hozzávéve, ugyanahhoz az *ABCF* idomhoz jutunk (2.7a ábra).

[17] Valójában egybevágó, de Euklidész az egybevágóságot nem kezeli önálló fogalomként, nem is ad neki nevet, hanem egy kalap alá veszi több más – szintén definiálatlan – „egyenlőség”-relációval.

(b) Még egyszerűbb a tétel állítását *ABCD* -nek és *EBCF*-nek a 2.7*a és 2.7*b ábrákon bemutatott speciális helyzeteiben igazolni. Itt ui. a két paralelogramma szemmel láthatóan kiegészítéssel átdarabolható, sőt egyszerűen átdarabolható is egymásba.



2.7*a ábra



2.7*b ábra

Euklidész ezekre a speciális esetekre nem tér ki.

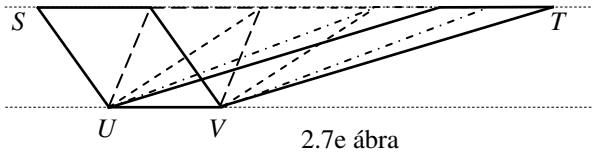
(c) Úgyszintén nem szól Euklidész arról a nagyon is érdekes kérdésről, amely bennünk (a) és (b) összevetésekor természetesen fölmerül. A (b) alatti esetekben a 2.1 alatti (1) és (2) relációk *mindegyike* fönnáll, a 2.7a ábra esetében[18] viszont csak (2) fönnállását – a két paralelogramma *kiegészítve*-átdarabolhatóan egyenlő voltát – sikerült igazolni; az egyáltalán nem látszik, hogy abban a helyzetben a két paralelogramma egymásba átdarabolható-e.

Ez azért izgalmas probléma, mert egy sokkal általánosabb kérdésnek egy specializációjára vonatkozik (amikor is az összehasonlítandó sokszögek egyenlő alapú és egyenlő magasságú paralelogrammák): A 2.4(c) alatti diagramnak az (1) kérdéséről van szó, hogy két, kiegészítéssel átdarabolhatóan egyenlő sokszög mindig átdarabolhatóan egyenlő-e, vagyis hogy a 2.1 alatti (1) és (2) relációk ekvivalensek-e?[19]

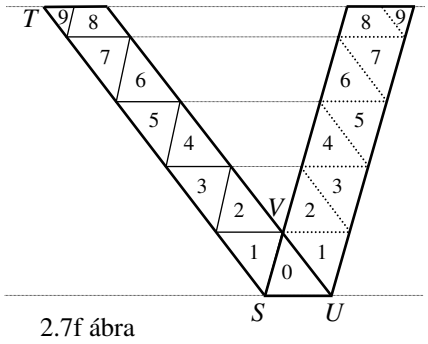
A görög matematikában sem a speciális sem az általános kérdés nem merülhetett föl, hiszen az ekvivalencia problémáját „egyszerűen” eldöntötték a két különböző reláció azonos elnevezésével!

(d) A 2.7e,f ábrák az itteni speciális kérdésnek két különböző – pozitív – megoldását mutatják.

A 2.7f ábra egy mindig lehetséges közvetlen átdarabolás módszerét mutatja, a 2.7e ábra pedig



2.7e ábra



2.7f ábra

azt, hogy miként lehet a problémát viszavezetni a 2.7c ábra egyszerű esetére, de azon az áron, hogy a két eredeti paralelogrammának csak a (többszörösen) *közvetett* egymásba átdarabolhatóságát kapjuk ezen a módon. Ez ismét visszavezet bennünket a 2.4(c) alatti diagramhoz, mégpedig annak a (2) kérdéséhez, hogy ti. a közvetett átdarabolhatóság *általánosan* implikálja-e az átdarabolhatóságot (vagyis, hogy ekvivalens-e vele).

(e) A (d) alatti két módszer nagyon különböző, de van egy rejtett közös részük: *Mindkettő föltételezi az arkhimédészi axiómát*, ui. csak akkor működnek, ha garantálva van, hogy az *UV* szakasznak van olyan (egészszámú) többszöröse, amely nagyobb az *ST* szakasznál. Ez Euklidésznél nem axiómaként, hanem általában magától értődő tényként szerepel.[20]

---

[18] Ez az *Elemek* eredeti ábrája (I.35), tehát Euklidész valóban erre a geometriai szituációra gondolt.

[19] Alább a 2.10(b), 2.k szakaszokban egy másik – szintén nagyon fontos – geometriai szituációt fogunk látni, amelyben a kiegészítve-átdarabolhatóság „szemmel látható”, és az átdarabolhatóság is fennáll, de egyáltalán nem „szemmel látható”.

[20] A V. könyv 4. *definíciója* így hangzik: „Mennyiségek egymáshoz viszonyított arányáról akkor beszélünk, ha az egyik többszöröse meghaladja a másikat.” (Értsd: Mennyiségek arányának csak akkor lehet értelme, ha „egyneműek”, és ennek kritériuma éppen az, amit az „arkhimédészi axióma” kifejez.)

(f) Mindenesetre igaz, hogy a *mai* „euklidészi geometriában” – amely nem csak „euklidészi”, hanem „arkhimédészi” is (hiszen az axiómarendszerében ott van az arkhimédészi axióma) – *az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák egymásba átdarabolhatók.*

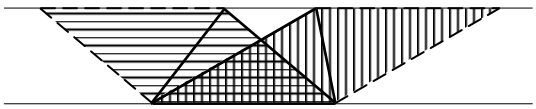
(g) Végül megjegyezzük, hogy *ez a tétel* – amelynek mindkét itt bemutatott bizonyítása csak a görög geometriában jól ismert eszközöket használja – *nem szerepel az Elemek-ben*. Az I. 35 tétel – amint a bizonyításából kiderül – nem az átdarabolhatóságról, hanem a kiegészítéssel-átdarabolhatóságról szól. A tétel szövegéből azonban – az „egyenlő” szó elmosódott használata miatt – ez nem tűnik ki; aki tehát csak a tételt olvassa, könnyen félreértelmezheti azt.[21]

2.8 (a) Az *Elemek* I. 37 tétele így szól: „*Az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő háromszögek egyenlők egymással*”. (V.ö. az I. 35 tétel szövegével, a 2.7(a) szakaszban.)

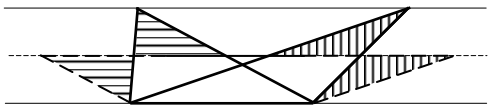
A bizonyítás az I. 35 tétel és a 6. axióma összekapcsolásából áll.

(b) Ez a tétel a bizonyítással együtt beszédes példája az *Elemek* bizonyos részein végighúzódó egyfajta logikai zürzavarnak. A két összehasonlítandó háromszög nem „ugyanaz”. De még ha úgy is szólna az axióma, hogy „egyenlők fele részei egyenlők”, akkor sem lehet tudni, hogy a fele részek milyen értelemben „egyenlők”, ha az egészek „egyenlők”? Abból, hogy a két paralelogramma (2.8a ábra) kiegészítéssel átdarabolható, következik-e ugyanez a kapcsolat a (valamilyen értelemben vett) felerészek között is? Az analóg kérdést persze az átdarabolhatóságra vonatkoztatva is föl lehetne – és kellene – vetni.

Mindenesetre ennek az ábrának a konstellációja nem látszik alkalmasnak a tétel bizonyítására.

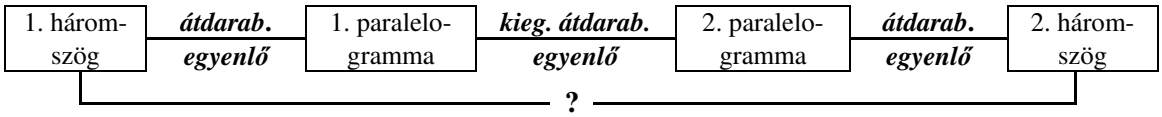


2.8a ábra



2.8b ábra

(c) A 2.8b ábra azonban valódi lehetőséget mutat (a görög matematika szellemében) az I. 37 tétel bizonyítására. Az egyformán vonalkázott részek áthelyezésével ismét I. 35-re redukálódik a tétel (ezúttal nem kell hivatkozni a 6. axiómára). Minthogy a 2.8c ábra diagramjában „átdarab. egyenlő” helyett mindkét helyen „kieg. átdarab. egyenlő”-t is írhatunk (hiszen az utóbbi gyengébb az előbbinél,



2.8c ábra

l. 2.4), azért csak a kiegészítéssel-átdarabolhatóság tranzitivitására van szükség[22], hogy leolvassuk az I. 37 tétel érvényességét a kiegészítve-átdarabolhatóság értelmében (és függetlenül az archimédészi axiómától).

Későbbi füzetekben fogunk foglalkozni az arkhimédészi axióma jelentőségével a szintetikus geometriában és abban, hogy a szintetikus geometriát mértékgeometriává lehessen fejleszteni.

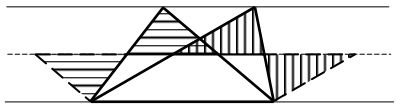
[21] Ez pedig „végzetessé” válhat például akkor, amikor a tételre egy másik tétel bizonyításában hivatkozunk, bizonyítási eszközként. Ez a logikai hiba gyakori az *Elemek*-ben.

[22] A kiegészítve-átdarabolhatóság valóban tranzitív. (F.18 feladat.)

Itt egyébként egy „furcsa tranzitivitási helyzettel” találkozunk. Nem tehetjük meg ugyanis, hogy a diagram közepén – vagyis mindhárom helyen – „átdarab. egyenlő”-t írunk, ti. azért, hogy az átdarabolhatóság tranzitivitása felhasználásával bizonyítsuk az I. 37 tétel érvényességét az átdarabolhatóság értelmében is. Igaz ugyan, hogy ez a tranzitivitás könnyen belátható[23], de a (gyengébb) kiegészítéssel-átdarabolhatóság ekvivalenciája az (erősebb) átdarabolhatósággal súlyos kérdés, legalább is a szintetikus geometriában[24].

(d) Mindebből kitűnik (sok más hasonló szituáció mellett), hogy mennyire szükséges tisztázni az átdarabolhatóság és a kieg. átdarabolhatóság logikai kapcsolatát a szintetikus geometrián belül (lásd 2.4). Ez azonban a görög matematika ezer éve alatt nem történt meg.

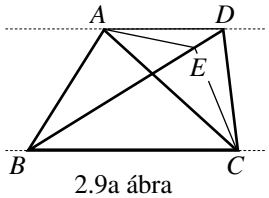
(e) Megjegyzendő még, hogy a diagramnál említett egyik nehézség nem lép fel akkor, ha a két háromszög a 2.8d ábra szerint helyezkedik el egymáshoz és a középvonalhoz képest, ellentétben a 2.8b ábrával. Ekkor ui. a 2.8c ábra diagramjának középső részében „kieg. átdarab.” helyett is „átdarab.”-t írhatunk minden további nélkül, és így csak az átdarabolhatóságra vonatkozó „sima” tranzitivitásra kell hivatkozni (a „furcsa”, vegyes „tranzitivitás” helyett).



2.8d ábra

2.9 „*Ugyanarra az alapra, ugyanarra az oldalára helyezett egyenlő háromszögek ugyanazon párhuzamosok között vannak.*” Ez az I. 39 tétel az *Elemek*-ben.

A 2.9a ábrán a két háromszög *ABC* és *DBC*. A bizonyítás indirekten történik. Ha $AD \nparallel BC$, akkor legyen $AE \parallel BC$; ekkor *ABC* egyenlő *EBC*-vel (I. 37), tehát *DBC* is „egyenlő” *EBC*-vel (1. axióma, lásd 2.2) *DBC* „egyenlő” *EBC*-vel, „a nagyobb a kisebbel”; ez viszont nem lehetséges (8. axióma), tehát $AE \nparallel BC$.[25]



2.9a ábra

Euklidész itt tehát felhasználja, hogy egy sokszög nem lehet egy valódirész-sokszöggel „egyenlő” . De milyen értelemben „egyenlő”? Ha pl. valaki „egyenlőség”-nek nevez bármely relációt – akár ekvivalencia-relációt –, arra is érvényes ez? (V. ö. 2.3*.)

2.10 (a) Euklidész az *Elemek* I. 43. tételében exponálja a következő tételt, amely az egész görög matematikában bizonyos centrális szerepet játszik. A tétel szövegét – a maitól erősen eltérő ill. hiányos – terminológia miatt – nehéz megérteni az elterjedt *Elemek*-kiadásokból, pedig voltaképpen nagyon egyszerű geometriai szituációról van szó. Ezért mai nyelven mutatjuk be a tételt.

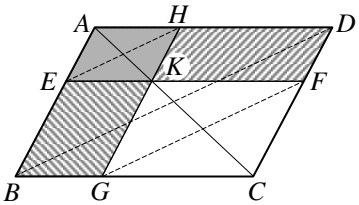
---

[23] Lásd a 2F.18 feladatot; v.ö. a 3F.4, 3F.13(b) feladatokkal is! – A mértékgeometriában persze, a Bolyai-Gerwien-tétel fölhasználásával, más – nem konstruktív – bizonyítása is lehetséges az átdarabolhatóság tranzitivitásának (lásd a 3F.13(a) feladatot)!

[24] A mértékgeometria fogalmilag erős eszközeivel persze nagyon könnyen bizonyítható ez az ekvivalencia.

[25] Euklidész itt még megjegyzi, hogy egyetlen másik egyenes sem párhuzamos *BC*-vel, csak *AD*. (Ebben hallgatólagosan felhasználja azt, hogy egyáltalán létezik pl. az *A* ponton át a *BC*-vel párhuzamos egyenes. Ezt az I. 31 tételben mondja ki, amely tulajdonképpen – mint sok más „tétel” az *Elemek*-ben – szerkesztési feladat megoldása (hivatkozva a híres 5. posztulátumra, amit „párhuzamossági axiómának” is szokás nevezni).

A 2.10a ábrán látható geometriai konfigurációt *gnomón-ábrának* fogjuk nevezni. Ennek lényege: Egy *ABCD* paralelogramma valamely átlója, például az *AC* egy belső *K* pontján át párhuzamosokat húzunk az oldalakkal: *EF* és *GH*. *AEKH*-t és *KGCF*-t *az átló körüli paralelogrammáknak*, *EBGK*-t és *HKFD*-t *kiegészítő paralelogrammáknak* nevezzük. Ebben a vonatkozásban *AC* a gnomón-ábra *főátlója*, *BD*, *GF* és *EH* pedig a gnomón-ábra *mellékátlói*.



2.10a ábra

A „gnomón-ábra” ugyan nem sztenderd műszó, de a *gnomón* görög szóra utal[26]; ez a neve – talán a pitagoreusok óta – a két kiegészítő paralelogrammából és az egyik átló körüli paralelogrammából öszetett, az ábrán satírozott – idomnak. (Egy gnomón-ábrában tehát két gnomón van.)

(Az 1. füzet 1.9 szakaszában említettük a gnomónnak egy valamennyire általánosabb értelmezését is a görög matematikában.)

(b) A tétel mármost így fogalmazható: *Minden gnomón-ábrában a kiegészítő paralelogrammák egymásba kiegészítve-átdarabolhatók.*[27]

A 2.10a ábrán ez szinte „szemmel látható”: az ábrán a sraffozott kiegészítő paralelogrammákat az egybevágó *AEK* ill. *KGC*, *AKH* ill. *KCE* háromszögekkel kiegészítve az egybevágó *ABC* ill. *ACD* háromszöget kapjuk.

2.11 A gnomón-ábrák szolgáltatják számunkra a második olyan probléma-helyzetet, ahol érzékletesen jelenik meg a 2.4(b) alatti (1) kérdés: Vajon minden olyan esetben, ahol két sokszög kiegészítve-átdarabolhatóan egyenlő, fennáll-e közöttük az átdarabolhatóság is? Az első ilyen helyzettel 2.7(c) alatt találkoztunk az ugyanazon az alapon és ugyanazon párhuzamosok között fekvő paralelogrammák „egyenlőségével” kapcsolatban.

Az itteni kérdés tehát ez: *Vajon minden gnomón-ábrában átdarabolható egymásba a két kiegészítő paralelogramma?*

Az ottani problémahelyzet mégis egyszerűbb volt, mint az itteni, mert 1. a 2.7e ábrán egy már megoldott speciális esetre való visszavezetéssel (és annak megelőlegezésével, hogy az átdarabolhatóság tranzitív reláció), sőt 2. a 2.7f ábrán minden további ismeret felhasználása nélkül, pusztán a háromszögek egybevágóságának alkalmazásával sikerült egy közvetlen átdarabolást is létrehozni.

A gnomón-ábrák kiegészítő paralelogrammái között azonban eléggé reménytelennek *látszik* egy közvetlen átdarabolást megtalálni. Közvetett átdaraboláshoz is újabb eszközök kellenek. A végeredményt megelőlegezve már itt eláruljuk, hogy a problémának pozitív megoldása van. Ennek a „szellemi

---

[26] Az *Elemek* II. könyvében a 2. definíció így szól: Nevezzük gnómónnak minden paralelogrammában az átló körüli bármelyik paralelogrammát a két paraplérómával együtt. (A „paraplérómák” a kiegészítő paralelogrammák.) A klasszikus görög tudományos nyelvben ennek a szónak a napórával, csillagászati mérésekkel kapcsolatos jelentése is volt. (Az asztronómia fontos indítékokat szolgáltatott a matematika fejlődéséhez.)

[27] Érdekes egybevetni a tétel szövegét az általunk tekintetbe vett három magyar kiadásban.

Brassai: *Minden egyközényben az átmérő körüli egyközények pótlékai egyenlők.*

Baumgartner: *Minden parallelogrammban a parallelogrammok kiegészítői az átló körül egyenlők egymással.*

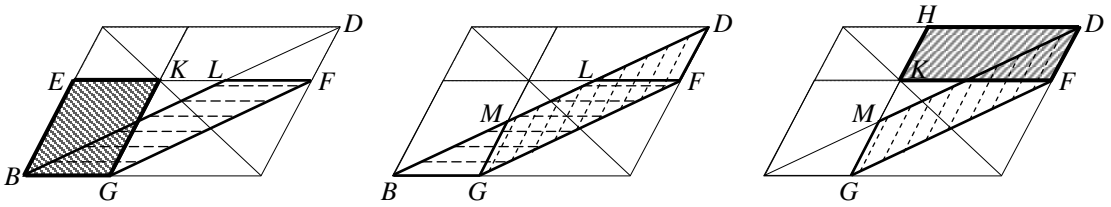
Mayer-Szabó: *Minden paralelogrammában az átló körüli paralelogrammák paraplérómái egyenlők egymással.*

Magyarázatok. „egyközény” = paralelogramma; „egyenlő” = kiegészítéssel átdarabolható; a „paraplérома” görög szó „töltelék”-et jelent.

kalandnak” a rövid leírását most beiktatjuk (2.12-ben). A probléma teljes megoldása majd 2C-ben következik, az Eudoxosz-féle arányelmélet (2B) felhasználásával.

2.12 (a) A 2.12a ábrán a mellékátlók párhuzamosnak látszanak.[28] Vajon valóban párhuzamosak-e és törvényszerű-e ez?

(b) Ennek a kérdésnek nagy a jelentősége a 2.11 alatti probléma szempontjából. Ha ui. igaznak bizonyul ez a föltevés, akkor pozitív a válasz a 2.11 alatti kérdésre is!



2.12a ábra

Akkor ui. a 2.1 alatti jelölésekkel, a 2.7(f) tétel szerint

$$EBGK \overset{v}{=} LBGF \overset{v}{=} MGFD \overset{v}{=} HKFD \text{, tehát } EBGK \overset{kv}{=} HKFD$$

(2.8c ábra), és így – az átdarabolhatóság tranzitivitása folytán – valóban

$$EBGK \overset{v}{=} HKFD .$$

(c) A mellékátlók párhuzamosságának a kérdésében világosan tükröződik egy alapvető eltérés a görög és a mai matematika között, amelynek a tudatosítása lényegesen hozzájárulhat az előbbi megértéséhez.

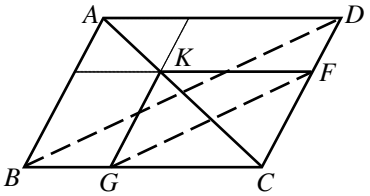
Ez a kérdés ui. nem is kérdés akkor, ha fölhasználjuk a párhuzamos szelők tételét és annak megfordítását. A 2.12b ábrán az ABC, KGC ill. az ACD, KCF háromszögek hasonlóságából

$$|BC|:|GC| = |AC|:|KC| \text{ ill. } |AC|:|KC| = |DC|:|FC|$$

adódik; végül is

$$|BC|:|GC| = |DC|:|FC|,$$

amiből valóban $BD \parallel GF$ következik.



2.12b ábra

(d) Itt azonban a mértékgeometriában mozogtunk; számszerű (racionális vagy irracionális) szakasz-arányokat használtunk. A görög matematika szempontjából tehát az az igazi kérdés, hogy lehetséges-e a szintetikus geometriában is olyan hasonlóság-elmélet (arányelmélet), amely a valós szám fogalma nélkül lényegében ugyanazt nyújtja, mint a mértékgeometria hasonlóság-elmélete (arányelmélete). A görög matematikának ezt a teljesítményét fogjuk a most következőkben megismerni.

2B. Az eudoxoszi arányelmélet és alkalmazásai.

2.13 *Az eudoxoszi arányelmélet* kiindulópontja a következő fogalomalkotás.

(a) Az a, b, a', b' szakaszokból alkotott $(a, b), (a', b')$ szakaszpárok <u>*egyenlő arányúak*</u>, képletben hagyományosan kifejezve

(K) $\quad a : b = a' : b'$,

[28] Érdemes néhány különböző megrajzolt gnomón-ábrán megfigyelni ezt a meggyőzően szembetűnő sajátosságot.

ha bármely p, q természetes-szám-párra $p \cdot a \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} q \cdot b \Rightarrow p \cdot a' \begin{pmatrix} < \\ = \\ > \end{pmatrix} q \cdot b'$. (Szavakban: az a', b' szakaszok között ugyanaz a kisebb-nagyobb-egyenlő viszony van, mint az a, b szakaszok között.)

(b) Ennek világos megértéséhez három tényt kell különösen tudatosítanunk.

1. Ez a fogalom tisztán szintetikus geometriai; a valós számtestnek semmi szerepe sincs. A (K) képlet is félrevezető, ui. az itteni „:” jelnek fogalmilag nincs köze az aritmetikai osztás-jelhez; az „=” jel sem két dolog egyenlőségét jelenti. (Lásd ehhez a 3. megjegyzést is.) Mégis használjuk ezt a képletet, mert ezzel a matematikatörténeti irodalomnak egy erős hagyományát követjük.[29]

2. A fogalom alkalmazását semmiféle összemérhetőségi feltétel nem korlátozza.

3. Ez az arány-egyenlőségi fogalom nem valamiféle arányok közötti egyenlőséget jelent![30] *Két szakasz arányát ui. ez az elmélet nem definiálja*; ezt valójában csak a – egzakt formában csak sokkal később kifejlődő – valós-szám-fogalom és a mértékgeometria teszi majd lehetővé.

(c) A görög matematika eme kimagasló, rendkívül termékeny és a saját korán messze túlmutató teljesítménye a matematikai absztrakció zseniális példája: Az összemérhetetlenség fölfedezése okozta súlyos megrendülés azt sugallta, hogy lehetetlen arányelméletet építeni, minthogy maga az arány (két szakasz között) az akkor ismert szám-tartományban nem definiálható. Ezután képesek voltak lemondani a számszerű arány fogalmáról (sőt arról is, hogy egyáltalán valamilyen módon definiálják a szakasz-arányt), és – elvontabb formában – mégis lehetővé tenni egy arányelméletet, amely tökéletesen illeszkedett a geometria elméleti és tapasztalati világába.

2.14 (a) Igen fontos, karakterisztikus és az alkalmazások szempontjából kikerülhetetlen is, hogy ezt az arányegyenlőség-fogalmat nem csak szakaszokra, hanem más „értéktartományokra” is átvitték, pl. sokszögekre. (Erre egy példát idézünk majd föl 2.17 alatt.) Ezzel kapcsolatban két negatívumot kell megemlítenünk.

(b) Az egyik a magyar matematikai műnyelvnek az a sajátossága, hogy hiányzik belőle az „értéktartomány” (ezt a szót csak kényszerűségből használtuk) sztenderd elnevezése. Nem a „tartomány”, hanem az „érték” a problematikus. A görögök gondosan megkülönböztették a számok, a szakaszok, a „területek”, a „térfogatok” tartományát; itt minőségileg különböző „értékek”-ről van szó az ő felfogásukban. Más nyelveken könnyebb erről beszélni: az „azonos típusú érték” angolul *quantity of the same art*, németül *Größe von derselben Art*, franciául *grandeur de même espèce*[31], oroszul величина одинакового рода. A magyar *mennyiség* szó kevéssé alkalmas, mert a mértékgeometrián nevelődött mai matematikai érzékünknek egyoldalúan a számszerűséget sugallja. Valóban, a mai matematikai nyelvben a *szám*, a *terület* és a *térfogat* nem külön értéktartomány, hanem egyértelműen és egységesen valós szám, és a mennyiség szót leginkább ebben az értelmezésben használjuk.[32]

Ez a magyar szaknyelvi nehézség egyrészt eléggé súlyos akadálya nem csak a matematika története, hanem az iskolai matematika megértésének, másrészt azért is érdekes számunkra, mert egy na-

---

[29] Nem követjük azonban azt a kifejezetten káros hagyományt, hogy sokszor alapos elemzés és magyarázat nélkül használják ebben a kontextusban a (K) kifejezést.

[30] Ezt azért is fontos hangsúlyozni, mert *nyelvileg* nagyon nehéz lenne a két dolgot világosan elkülöníteni.

[31] Angolul és franciául a *magnitude* szó is alkalmas.

[32] Nagyon érdekes, hogy Brassai Sámuel az 1865-ös *Elemek*-fordításban a *mekkoraság* szót használja. Ezt az archaikus hangzása miatt bizonyára nehéz lenne ma meghonosítani, pedig kitűnő szóalkotás, mert egyaránt alkalmazható a felsorolt különböző értéktartományok mindegyikében, anélkül, hogy mindenképpen a számszerűséget sugallná. (A Mayer–Szabó-féle fordítás a számszerűséget felidéző *mennyiség* szóval él.)

gyon mélyreható eltérést tükröz a görög matematika (és más korszakok és kultúrák matematikája) és a mai matematika között.

(c) Egy másfajta, nem nyelvi, hanem fogalmi hiányosság a görög matematikában azzal kapcsolatos, hogy nem vették figyelembe bizonyos különböző értéktartományoknak, mint pl. a szakaszokénak és az idomokénak, az alapvetően különböző természetét. Az előbbiben ui. egyértelmű elemi jelentése van a „kétszeres”, „háromszoros”, „fele akkora”, „tizedrész akkora” szavaknak, míg az utóbbiban olyan gazdag sokféleség uralkodik ebben a tekintetben, amelynek legalább egy részére e füzetek tartalmával is igyekszünk ráirányítani a figyelmet. A szintetikus geometriában egy idom „fele” vagy „háromszorosa”gazdag, sokrétű fogalomvilágot takar, amelyben nagyon sok – a görög matematikában, sőt még azután is két évezreden át megoldatlan – ekvivalencia-probléma lép fel. Ez a fogalmi bizonytalanság terheli az idevágó tételeket és bizonyításokat. (Legközelebb 2.17-ben találkozunk majd ezzel.)

2.15 (a) A „szakaszarány-egyenlőségnek” van egy elemi, szintetikus-geometriai fokozata: Két *összemérhető* szakaszpárt, $(a;b)$-t és $(a';b')$-t (a összemérhető b-vel, a' összemérhető b'-vel) <u>*egyenlő arányúnak*</u> mondhatunk, ha van olyan *közös* (m,n) $(m,n\in\mathbb{N})$ számpár, hogy

$$m\cdot a=n\cdot b \text{ és } m\cdot a'=n\cdot b'.$$

Ez azonban valóban csak az összemérhető szakaszpárok körében értelmezhető reláció. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges szakaszpárok körében értelmezett bármiféle „szakaszarány-egyenlőség-relációnak” csak akkor lehet létjogosultsága, ha ennek az elemi relációnak kiterjesztése, vagyis ha az összemérhető szakaszpárok körében ekvivalens vele.

(b) Bizonyítsuk ezt a kapcsolatot az „elemi” és az „eudoxoszi” szakaszarány-egyenlőség között az egyik irányban:

(*) *Ha a és b szakaszok, m és n természetes számok és* (1) $m\cdot a=n\cdot b$, (2) $m\cdot a'=n\cdot b'$, *akkor*

$$(3)\ \ p\cdot a\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}q\cdot b\Rightarrow p\cdot a'\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}q\cdot b'\quad (p,q\in\mathbb{N}).$$

A bizonyításban felhasználjuk a következő elemi tényt:

(**) *Tetszőleges c szakaszra és* $r,s\in\mathbb{N}$ *számokra* $r\cdot c\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}s\cdot c\Leftrightarrow r\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}s$.

A bizonyítás minden lépésében jelezzük, hogy mire hivatkozunk:

$$\underset{(1)}{pn\cdot b=pm\cdot a}\underset{(3)\text{ előtagja}}{\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}}\underset{(*)}{qm\cdot b,}\quad \underset{(*)}{p\cdot n\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}q\cdot m,}\quad \underset{(*)}{pn\cdot a'\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}qm\cdot a'}\underset{(2)}{=qn\cdot b',}\quad \underset{(*)}{p\cdot a'\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}q\cdot b'.}$$

A (*) kapcsolat megfordításának a bizonyítását az Olvasóra bízzuk (l. a 2F.10. feladatot).

2.16 (a) Az *Elemek* V. könyve – mint a 8., 9., 12., 13. könyv kivételével az összes többi – definíciókkal kezdődik; ezek között az ötödik az az alapvető, az egész arányelméletet megalapozó definíció, amelyet 2.13(a) alatt idéztünk.

(b) Ezután a könyv huszonöt tételt mond ki és bizonyít arányok közötti kapcsolatokról. Kiragadott példaképpen közlünk ezek közül kettőt, mégpedig az azonnali érthetőség és áttekinthetőség érdekében olyan mai, közismert szimbolikával, amely tulajdonképpen félrevezető (mert a betűk helyébe

önkéntelenül számokat, az „:” jelek mögé pedig számtani osztásokat képzelünk).[33] Nem kell azonban félreértéstől tartanunk, ha nem minden magyarázat nélkül tesszük ezt, hanem *beszélünk* róla.

V. 11. Ha $a:b=c:d$ és $c:d=e:f$, akkor $a:b=e:f$.

(A tétel könnyű, de nem olyan banális, mint amilyennek akkor látszik, ha a mondott módon félreértelmezzük a használt szimbolumokat.)

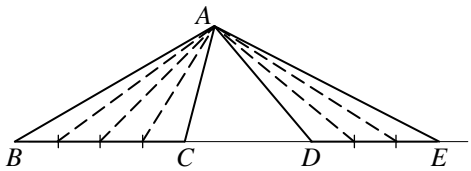
V. 22. Ha $a:b=d:e$ és $b:c=e:f$, akkor $a:c=d:f$.[34]

2.17 (a) Ismerkedjünk az eudoxoszi módszerrel először az *Elemek* egy alapvetően fontos tételével kapcsolatban (VI.1):

Az ugyanazon magasságú háromszögek és paralelogrammák úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik.

Az egyszerűség és a módszer világosabb kimutatása érdekében itt csak a háromszögekre vonatkozó állítással foglalkozunk.

(b) Először speciális körülmények között tekintjük a problémát.



2.17a ábra

Legyen *ABC* és *ADE* a két összehasonlítandó háromszög (2.17a ábra), és legyen a *BC*, *DE* alapok viszonya racionális, vagyis van közös mértékük, amely egész-számszor, mondjuk *p*-szer van meg *BC*-ben és *q*-szor *DE*-ben. Ekkor *ABC* ill. *ADE* felbontható *p* ill. *q* számú háromszögre, és ezek a részháromszögek mindannyian „egyenlők” az *Elemek* I. 37 tétele szerint (l. 2.8). Az *ABC* háromszög tehát valóban „úgy aránylik” az *ADE* háromszöghöz, mint *p* a *q*-hoz.

Ekkor *ABC* ill. *ADE* felbontható *p* ill. *q* számú háromszögre, és ezek a részháromszögek mindannyian „egyenlők” az *Elemek* I. 37 tétele szerint (l. 2.8). Az *ABC* háromszög tehát valóban „úgy aránylik” az *ADE* háromszöghöz, mint *p* a *q*-hoz.

Ennek a felismerésnek korlátozott az érvényességi köre. A megismerés-fejlődés folyamatában azonban kétségtelenül ez a „nulladik” fokozat, és történetileg is ez a problémakör kiindulópontja, hiszen a pitagoreusok, mielőtt fölfedezték az irracionalitás létezését a szakaszok körében, nem tudták elképzelni, hogy létezik két szakasz, amely nem összemérhető.[35]

(c) A problémát a maga általánosságában, vagyis a korlátozó összemérhetőségi föltevés nélkül, Euklidész az *Elemek* idézett VI. 1. tételével oldja meg.

A bizonyítást Euklidész nyomán, de három változtatással ismertetjük. 1. Itt is csak a háromszögekre vonatkozó állítást bizonyítjuk.[36] 2. A hosszadalmas és pleonasztikus szöveget a mai stílusban

---

[33] Ha ezt a szimbólumrendszert mellőzni akarnánk, akkor vagy hosszadalmas szövegeket kellene írnunk (ezt tette Euklidész), vagy egy külön szimbólumrendszert kellene létrehoznunk. (A Baumgartner-féle *Elemek*-kiadás tartalomjegyzéke ezen „félrevezető” módon közli az egyes tételek tartalmát, ami jelentősen könnyíti a könyv használatát. Más kiadások a kommentárokban használják ezt a „félrevezető” szimbolikát.)

[34] Ez már bonyolultabb tétel, de a „félreértett” tétel ismét banalitás lenne, ui. a feltételekből az következik, hogy $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}=\frac{d}{e}\cdot\frac{e}{f}$. Az euklidészi tétel azonban *fogalmilag* más tartalmú!

[35] Ezt persze csak a mai matematikából visszatekintve fogalmazhatjuk így. A pitagoreusok számára a ma „összemérhetetlenség”-nek nevezett jelenség fölfedezése előtt értelmetlenség lett volna „összemérhetőség”-ről beszélni (és ilyen fogalmat alkotni).

[36] A paralelogrammákra vonatkozó állítás bizonyítása analóg módon történik; csupán az I. 37 tétel helyett (lásd 2.8) az I. 35 tételre (lásd 2.7) kell hivatkozni. Lásd a 2F.8 feladatot.

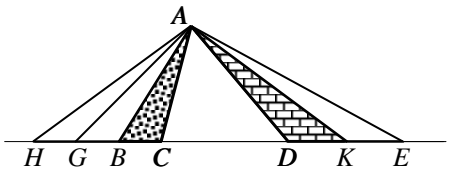
fogalmazzuk. 3. Az *Elemek*-kiadások egy része – köztük a tekintetbe vett két újabb magyar kiadás – helytelen ábrával kíséri a bizonyítást (amely azt sugallja, mintha a tétel speciálisan derékszögű háromszögekre vonatkozna).[37] Ezt a hibát elkerüljük.

Legyenek az azonos magasságú *ABC*, *ADK* háromszögek alapjai *BC* és *DK*. Ha az alapokat a 2.17b ábra szerint a tetszőleges $p \in \mathbb{N}$ ill. $q \in \mathbb{N}$ szorzóval növeljük, akkor az így keletkező *AHC* háromszög az *ABC* *p*-szerese, *ADE* pedig az *ADK* *q*-szorosa. Így akkor és csak akkor igaz, hogy

„ $p \cdot ABC$ kisebb, egyenlő ill. nagyobb, mint $q \cdot ADK$ ”

ha

$p \cdot BC$ kisebb, egyenlő ill. nagyobb, mint $q \cdot DK$ [38],



2.17b ábra

ami a háromszögekre nézve az eudoxoszi arányegyenlőség-fogalom értelmében éppen a tétel állítása.

Megjegyzések. 1. Természetesen itt is föllép – $p \cdot ABC$ és $q \cdot ADK$ értelmezésében – az a fogalmi zavar, amiről 2.14(c) alatt szóltunk. 2. Abban a tekintetben azonban, hogy az (b) alatti korlátozást (*BC* és *DK* összemérhetőségének föltételezését) sikerül elkerülni, az eudoxoszi elmélet tökéletesen beválik; a tétel esetszétválasztás nélkül bizonyítható.

(d) A mértékgeometriában, ahol az *ABC* ill. *ADK* háromszög területe például az $\frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |m_A|$ ill. $\frac{1}{2} \cdot |DK| \cdot |m_A|$ képlet értéke, a két terület aránya egyszerűen e két számérték hányadosa, vagyis $|BC| : |DK|$.[39]

2.18 (a) Az eudoxoszi arányelméletből vett következő példánk: a hasonlóság-elmélet „lelkének”, a párhuzamos szelők tételeinek az *Elemek* VI. 2 tételeként való bemutatása.

Ha egy háromszög egyik oldalával húzunk egy párhuzamost, az arányosan osztja a háromszög másik két oldalát; s ha egy háromszög két oldalát arányosan osztjuk, az osztáspontokra illesztett egyenes párhuzamos a háromszög harmadik oldalával.

A 2.18a ábra megegyezik az *Elemek*-kiadások évezredek óta hagyományos ábrájával (eltekintve a különböző vonalstílusoktól és a háromszögek sraffozásától, amik itt a jobb áttekintést szolgálják). A bizonyításban is Euklidészt követjük, csupán a fölépítést igyekszünk követhetőbbé tenni.

---

[37] A Brassai-féle magyar kiadás a helyes ábrát közli.

[38] Érdemes az Olvasónak átgondolnia és megfogalmaznia, hogy pontosan mit jelent $p \cdot ABC$ és milyen értelemben „kisebb, nagyobb ill. egyenlő” $q \cdot ADK$ -val az *Elemek* fogalomkörében. (A másik – a szakaszokra vonatkozó analóg – kijelentéssel nincsenek ilyen értelmezési problémák.)

[39] Még a 20. század első felében (talán még később is) – tehát jóval azután, hogy a jól megalapozott mértékgeometria a matematika integráns része lett – előfordult gimnáziumi tankönyvekben (e füzet írója saját tankönyveiből és a magyar iskolai matematika akkori „szatellit-irodalmából” emlékszik rá), hogy a „*BC* és *DK* összemérhetetlen” esetet különválasztva így kezelték: Mérjük *BC*-t maradékosan $\frac{DK}{n}$ -nel ill. osszuk $|BC|$-t maradékosan $\frac{|DK|}{n}$-nel: $m_n \cdot \frac{|DK|}{n} \le |BC| < (m_n+1) \cdot \frac{|DK|}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$, ebből $\frac{m_n}{n} \le \frac{|BC|}{|DK|} < \frac{m_n}{n} + \frac{1}{n}$, tehát $\frac{m_n}{n} \le \frac{|BC|}{|DK|} < \frac{m_n}{n} + \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ és így – $\frac{|BC|}{|DK|} - \frac{m_n}{n} < \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ miatt – $\frac{|BC|}{|DK|} = \lim_{n \to \infty} \frac{m_n}{n}$.

(b) Legyen $DE \parallel BC$.

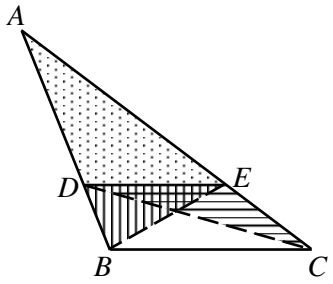
1. A BDE, CDE háromszögek „egyenlők”, mert közös a DE alapjuk és ugyanazon párhuzamosok között fekszenek (I. 37 tétel, l. 2.8).

2. DB úgy aránylik DA-hoz[40], mint BDE az ADE -hez.

3. EC úgy aránylik EA-hoz, mint CDE az ADE-hez.

Tehát

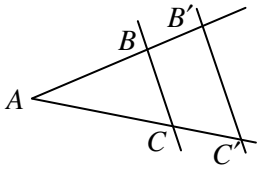
4. DB úgy aránylik DA-hoz, mint EC aránylik EA-hoz.[41]



2.18a ábra

(c) A tétel másik részének (amely az előbbi állítás fordítottját tartalmazza) a bizonyítása hasonló módon történik, csak az I. 37 tétel helyett értelemszerűen a fordítottjának, az I. 39 tételnek (l. 2.9) a felhasználásával.

2.19 (a) A párhuzamos szelők tételeinek a strukturális lényege: *A szakaszarány-egyenlőségnek olyan fogalmát alkotjuk meg, hogy a 2.19a ábrán bemutatott geometriai szituációban az* $(AB; AB')$, $(AC; AC')$ *szakaszpárok „arány-egyenlősége” ekvivalens legyen a* $BC, B'C'$ *szelők párhuzamosságával*. (Ezt azután konkrét – főleg bizonyítási – helyzetekben vagy az egyik, vagy a másik irányban, de jellemzően a kettőt kombinálva használjuk ki.) Ilyen „szakaszarány-egyenlőség-fogalom pedig több, esetleg lényegesen eltérő módon is definiálható.



2.19a ábra

(Az eudoxosz-féle fogalom tisztán szintetikus-geometriai, míg a számunkra megszokott – és az iskolai matematikában kizárólagos – hasonlósági fogalom- és tételkör a szakaszoknak valós számokkal való reprezentációján alapul.[42])

(b) Más kérdés az ilyen fogalmaknak az egymás közötti ekvivalenciája. Ezt éppen a dőlt betűs kritérium teljesítése garantálja. Világos tehát, hogy két szakaszpár, $(A_1B_1; A_2B_2)$ és $(A_1'B_1'; A_2'B_2')$ akkor és csak akkor egyenlő arányú az eudoxoszi értelemben, ha $|A_1B_1| : |A_2B_2| = |A_1'B_1'| : |A_2'B_2'|$.

2C. A gnomón-ábrák mellékátlóinak párhuzamossága és a kiegészítő paralelogrammák „egyenlősége” (a megoldás)

2.20 (a) Most már fölvehetjük a 2.12(d) alatt elejtett fonalat. Az volt a kérdés, hogy vajon szintetikus geometriai eszközökkel is bizonyítható-e, hogy:

TÉTEL. *Minden gnomón-ábra mellékátlói párhuzamosak.*

A BIZONYÍTÁS-hoz használt 2.20a ábra lényegében azonos a 2.12b ábrával , de a vonalstílusokkal most jobban követhetővé tesszük az egyes lépéseket, amelyek egyébként *formálisan* ugyanazok, mint amikor 2.12-ben a mértékgeometriai párhuzamos szelők tételével bizonyítottuk az állítást. Most azonban ahelyett a 2.18 tételt használjuk.

---

[40] Persze az eudoxoszi arányegyenlőség-fogalom értelmében (lásd 2.13) !

[41] Euklidész itt az V. 11. tételre hivatkozik: *Az ugyanazon aránnyal azonos arányok egymással is azonosak.* (Lásd a 2F.16 feladatot!)

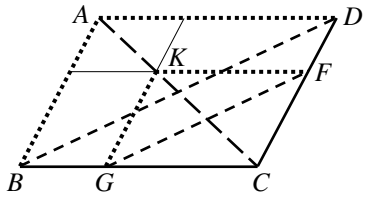
[42] Az egyik lényeges – és feltűnő! – különbség az, hogy a mértékgeometriai környezetben *két* szakasz arányának önálló jelentése is van (egyszerűen a megfelelő mértékszámok hányadosáról van szó, felhasználva a valós számtest algebrai struktúráit), míg az eudoxosz-elméletben csak *két-két* szakasz szakaszarány-egyenlőségéről lehet beszélni (ami tehát nem két szakaszarány egyenlőségét jelenti!). V. ö. 2.13(b).

1. $BA \parallel GK$, és azért a $(CG; CB)$, $(CK; CA)$ szakaszpárok arányegyenlők;

2. $KF \parallel AD$, és azért a $(CK; CA)$, $(CF; CD)$ szakaszpárok arányegyenlők;

3. a szakaszarány-egyenlőség tranzitivitása[43] szerint ezekből a $(CG; CB)$, $(CF; CD)$ szakaszpárok arányegyenlősége következik;

4. ebből pedig a 2.18 tétel második része szerint azt nyerjük, hogy $BD \parallel GF$, ami bizonyítandó volt.



2.20a ábra

2.21 (a) A gnomón-mellékátlók párhuzamossága persze önmagában is érdekes, de minket abból a speciális okból foglalkoztatott, hogy annak felhasználásával bizonyíthattuk be 2.12-ben (a szintetikus geometrián belül) azt a 2.11-ban megsejtett tényt, hogy

minden gnomónban – nem csak kiegészítve-átdarabolhatóan, hanem – *átdarabolhatóan is egyenlők a kiegészítő paralelogrammák.*

(b) Továbbra is fennmarad azonban az az általános kérdés, hogy *kiegészítve-átdarabolható sokszögek mindig átdarabolhatók-e?*

2D. A „geometriai algebra”. A „területillesztések”

2.22 (a) A gnomón-ábráknak talán legfontosabb alkalmazási területe a <u>*geometriai algebra*</u>, amelyet a görög matematika egyik legsajátosabb részének tartanak. Itt is – mint oly sok más fogalomnál – félrevezető az elnevezés (amely persze sokkal későbbi keletű[44], nem a görög matematikusok használták), mert azt sugallja, hogy „valamiféle algebráról”, vagyis konkrétabban geometriai eszközökkel művelt *algebráról* van szó. A matematikatörténetben különféle felfogások léteznek erről. Mi inkább ahhoz a nézethez csatlakozunk, amely szerint a görög matematikának nem volt „algebrája”. Itt igazi *geometriáról* van szó, olyan geometriai fogalmakról, viszonyokról, tételekről és szerkesztésekről, amelyek geometriai objektumokra vonatkoznak. Hiányzik a természetes számokon túlnyúló számfogalom, hiányzanak az erre vonatkozó műveletek és műveleti struktúrák és teljesen hiányzik az algebrai szimbolika. A későbbi korok algebrájából visszatekintve viszont a görög geometriai algebra tételei és módszerei alkalmasak az elemi algebra sok tényének és feladatának (azonosságoknak, első- és másodfokú egyenletek megoldhatóságának és megoldásának) az *illusztrálására*, igaz, hogy nagyon korlátozott területen (negatív számok nélkül, magasabb fokú egyenletek nélkül stb.).

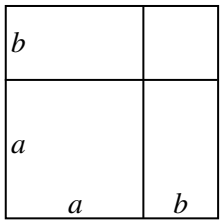
(b) A geometriai algebra egyik fő funkciója a görög matematikában ugyanaz, mint az eudoxoszi arányelméleté: A valós szám problematikájának a kikerülése. Két, egyaránt zseniális stratégiáról van tehát szó, amelyek ugyananazon – legyőzhetetlennek bizonyúló – akadály ellenére lehetővé tették a matematika továbbfejlesztését (legalább is az akkor fontosnak tartott területeken és az akkor elégségesnek tartott mértékben).

2.23 A geometriai algebra egyik témaköre az, amelyet a mai szóval algebrai azonosságoknak nevezett témakörrel rokoníthatunk.

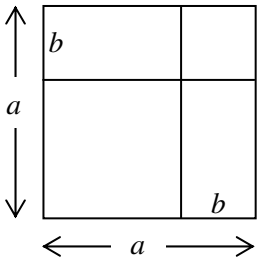
[43] *Elemek* V.11. tétel; lásd 2.16(b).

[44] Magát az *algebra* szót Al-Chwarizmi 9. századi arab matematikus, az algebra történetének egyik óriása, algebrai főműve címének első szavából, az „aldzsabr” (= „kiegészítés”) szóból alkották.

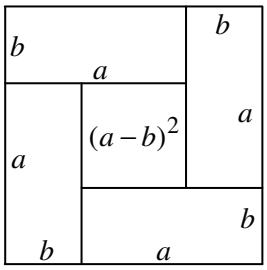
(a) A 2.23a, a 2.23b ill. a 2.23c ábra az $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2\cdot ab + b^2$, az $(a-b)a+(a-b)b = a^2 - b^2$ ill. a $4\cdot ab + (a-b)^2 \equiv (a+b)^2$ azonosságot illusztrálja.[45]



2.23a ábra



2.23b ábra



2.23c ábra

(b) A 2.23d ábra az *Elemek* II. 5. tételét kíséri: *Ha egy egyenesszakaszt egyenlő és nem egyenlő részekre osztunk, akkor a teljes szakasz nem egyenlő részei által közrefogott téglalap meg az osztópontok közötti szakaszra emelt négyzet együtt egyenlő a szakasz felére emelt négyzettel*. A mai olvasó által megszokott formulanyelven: Ha *C* az *AB* felezőpontja és *D* tetszőleges belső pontja *CB*-nek, akkor

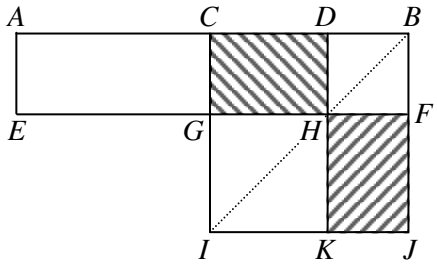
$$AH + GK = CJ$$ [46],

l. a 2.23d ábrát. (Itt a paralelogrammáknak azt a rövidebb jelölését használjuk, amely csak két átellenes pontot tüntet fel. Így pl. az *AEHD* téglalap jele *AH*, *HA*, *ED* vagy *DE*. Ezzel talán áttekinthetőbbek a formulák, és Euklidésznél amúgy is következetesen ezt a jelölést találjuk.)

A bizonyítás nagyon egyszerű:

$$AH + GK = AG + CH + GK = CF + HJ + GK = CJ\ .$$

(A bizonyításnak ebben a lépésében: $CH = HJ$, a 2.10(b) alatti gnomón-tétel speciális – és triviális – esete húzódik meg; ezt jeleztük a sraffozással.)[47]



2.23d ábra

(c) Ennek a tételnek fontos „algebrai” alkalmazása az $x + y = a$, $xy = b^2$ másodfokú egyenletrendszer vagy az $x(a-x) = b^2$ másodfokú egyenlet megoldása. Ezt a problémát valóban összekapcsolhatjuk a tétellel, az $AB = a$ választással és azt kívánva, hogy a *D* pont úgy legyen megválasztva, hogy az *AH* téglalap területegyenlő a *b* oldalú négyzettel. Az ismeretlen *x* szakasz értelemszerűen *DB*.

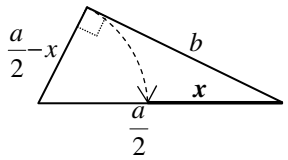
---

[45] Ezek az ábrák ill. geometriai viszonyok akkor sem „bizonyítanák” az azonosságokat, ha ismertnek vennénk a valós számokat és a mértékgeometriai apparátust, mert pl. szakaszokkal akkor is csak pozitív valós számokat lehet reprezentálni.

[46] Ez természetesen nem számszerű egyenlet; a „+” jel közös belső pont nélküli összeillesztést, az „=” jel pedig „idom-„ vagy „területegyenlőséget” jelent (például az átdarabolhatóság értelmében).

[47] Ez a tétel tartalmazza – geometriailag másként reprezentálva – a 2.23a,b,c ábrák „mondanivalóját” is: Az $AD = 2a,\ DB = 2b$ jelölésekkel a $4\cdot ab + (a-b)^2 \equiv (a+b)^2$ azonosság, az $AB = 2a, CD = b$ jelölésekkel az $(a+b)(a-b) + b^2 \equiv a^2$ azonosság adódik, ha pedig elhagyjuk az *AG* részt, a 2.23a ábrát nyerjük vissza, amely az $(a+b)^2 \equiv a^2 + 2\cdot ab + b^2$ azonosságot illusztrálja. (Euklidész nem tér ki ezekre a kapcsolatokra.)

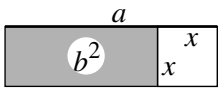
A D ilyen megválasztásánál a tétel szerint $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = b^2$, s így a keresett x szakasz előállítható – a pitagorász-tétel alapján – annak a derékszögű háromszögnek a megszerkesztésével, amelynek az átfogója az $\frac{a}{2}$ és az egyik befogója a b szakasz (2.23e ábra).



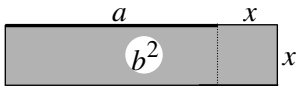
2.23e ábra

Nyilvánvaló egyébként ebből, hogy a feladat megoldhatóságának feltétele: $a > 2b$.[48]

A feladat neve: „Területillesztés hiánnyal”, avagy <u>*elliptikus területillesztés*</u>[49]. Az elnevezés kézenfekvő magyarázatát a 2.23f ábra mutatja: Az a szakaszhoz oly módon kell b^2 területű téglalapot



2.23f ábra

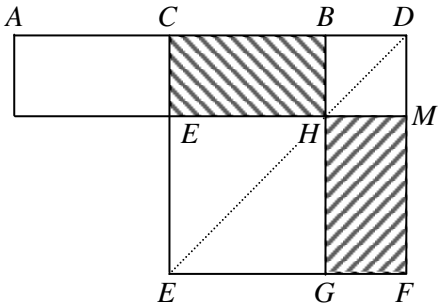


2.24a ábra

„illeszteni", hogy egy négyzet „maradjon ki”. A kérdés: Mekkora a keresett téglalap x-szel jelölt oldala.

2.24 (a) A 2.24a ábra az előbbivel analóg feladatot illusztrál. Most úgy kell az a szakaszhoz b^2 területű téglalapot „illeszteni”, hogy az „túlnyúljon” az a szakaszon, mégpedig egy négyzettel. A feladat most is a keresett téglalap x-szel jelölt oldalának a megkeresése (megszerkesztése). Ez a <u>*hiperbolikus területillesztés*</u>[50].

(b) Itt is megvan az *Elemek* II. 15. tétellel (l. 2.23(b)) analóg elméleti háttér: a II. 6. tétel: *Ha egy egyenesszakaszt megfelezünk, és egy egyenesben hozzáadunk valamely más szakaszt, akkor a teljes szakasz meg a hozzáadandó összege és a hozzáadandó által közrefogott téglalap meg a szakasz felére emelt négyzet együtt egyenlő a vonal feléből és a hozzáadandóból összeálló szakaszra emelt négyzettel.*



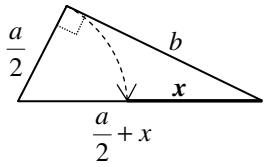
2.24b ábra

A mai formulanyelven, a 2.24b ábra alapján: Ha C az AB szakasz felezőpontja és D az AB egyenes tetszőleges pontja a B-n túl, akkor

$$AM + EG = CF .$$

A bizonyítás ugyanazokkal az ezközökkel történik, mint a II. 5. tételé (2.23(b)).

(c) Az (a) alatti feladathoz a kapcsolatot az $AB = a, BD = x$ választással és azzal a kívánsággal teremthetjük meg, hogy az AM téglalap legyen „egyenlő” a b oldalú négyzettel, azaz legyen $x(a + x) = b^2$. A D ilyen megválasztásánál a tétel szerint $b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2} + x\right)^2$, s így a keresett x szakasz előállítható – a pita-

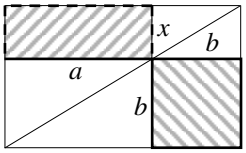


2.24c ábra

[48] Ez az $x(a - x) = b^2$ másodfokú egyenlet diszkriminánsából is leolvasható, de ez nem „korhű” eljárás.
[49] Elleipszisz (görög) = hiány.
[50] Hüperbolé (görög) = többlet, fölösleg.

gorász-tétel alapján – annak a derékszögű háromszögnek a megszerkesztésével, amelynek a befogói az $\frac{a}{2}$, b szakaszok (2.24c ábra).

2.25 Az elliptikus és a hiperbolikus területillesztés között mintegy középen áll a *parabolikus területillesztés*.[51] Itt se nem hiánnyal, se nem többlettel, hanem pontosan egy a szakaszhoz akarunk olyan téglalapot illeszteni, amely területegyenlő egy b oldalú négyzettel. A mai algebrai felfogásban az $ax = b^2$ egyenletet kell megoldani (természetesen az $a > 0$, $b > 0$ föltevés mellett[52]); azt is mondhatjuk, hogy x-et úgy akarjuk meghatározni, hogy b az a és az x középarányosa legyen.



2.25a ábra

A görög geometriai felfogásban a gnomón-tétel egyszerű és közvetlen alkalmazásáról van szó. A 2.25a ábra vastagon kihúzott részét (amely a b oldalú négyzetet és az a szakaszt tartalmazza egy bizonyos konfigurációban) nyílvánvalóan ki lehet bővíteni (egyértelműen!) egy gnomóm-ábrává[53], amelyben megjelenik a kívánt x szakasz.[54]

2.26 (a) A következő táblázatban áttekinthetően összefoglaljuk a területillesztésről mondottakat.

feladat	egyenlet	egyenlet-rendszer	aránypár	Euklidész: *Elemek*
Egyszerű területillesztés *Parabolikus területillesztés*	$ax = b^2$		$x : b = b : a$	I. 44.
„területillesztés hiánnyal” *elliptikus területillesztés*	$x(a-x) = b^2$ $x^2 + b^2 = ax$	$\left.\begin{matrix} x + y = a \\ xy = b^2 \end{matrix}\right\}$	$x : b = b : (a - x)$	II. 5., VI. 8.
„területillesztés többlettel” *hiperbolikus területillesztés*	$x(a+x) = b^2$ $ax + x^2 = b^2$	$\left.\begin{matrix} y - x = a \\ xy = b^2 \end{matrix}\right\}$	$x : b = b : (a + x)$	II. 6., VI. 27.–28.
aranymetszés	$a(a-x) = x^2$ $a^2 - ax = x^2$		$x : a = (a - x) : x$	II. 11.[55]

(b) A táblázat bizonyos további információkkal is szolgál.

1. E feladatoknak egyenletrendszerrel való reprezentálása (a szimbolikus algebrát megelőző korszakokban a megfelelő szöveggel) nagyon régi hagyomány.

---

[51] Parabolé (görög) = hasonlóság, illeszkedés. (Ez a hagyományos elnevezés kissé furcsa, ui. a „parabola” szó tk. maga is „illeszkedés”-t jelent.

[52] A $b > 0$ kikötés csak látszatra fölösleges; a görög matematika nem ismert negatív számokat.

[53] Itt a gnomón-módszer egy másfajta felhasználása is lehetséges (l. pl. Sain M.: Nincs királyi út! 156. o.), amely önmagában érdekes, de ennél az alkalmazásnál esetszétválasztást tesz szükségessé.

[54] Az *Elemek* I. 44. feladatában és annak leírt megoldásában lényegében ezzel találkozunk, igaz, hogy szövevényesebb formában; ezt az okozza, hogy Euklidész magát a feladatot általánosabban értelmezi.

[55] Euklidész az *Elemek*-ben még több helyen foglalkozik az aranymetszés irracionalitásával is. (L. pl. Elemek 1983.) II. 11-ben azonban csak a szerkesztési feladatot oldja meg (a gnomón-módszer és a II. 6. tétel alkalmazásával): *Osszunk úgy ketté egy adott szakaszt, hogy a teljes szakasz és az egyik rész által közrefogott téglalap egyenlő legyen a másik részre emelt négyzettel.*

2. Az aránypárral való reprezentáció igazi pitagoreus kutatói stílust mutat. A pitagoreusok igen sok ilyen szerkezetű aránypárokat vizsgáltak és rendszereztek; ez fontos kiindulópontja és egyben kerete volt a számelméleti (és speciálisan zeneelméleti) kutatásaiknak.

(c) Az utolsó sorában szereplő aranymetszés látszólag „kakukktojásként” került bele ebbe a háromféle területillesztésről szóló táblázatba. Valójában azonban a hiperbolikus területillesztés speciális esetéről van szó. Az aranymetszés ui. egy a szakasznak olyan két részre, x-re és $a-x$ -ra való osztását jelenti, hogy a szakasz úgy aránylik a nagyobbik részhez, mint az a kisebbikhez. Ez pedig a hiperbolikus területillesztés feladata abban az esetben, ha $b=a$.[56]

2E. Kitekintés az algebra további fejlődésére

2.27 *Történeti kiegészítések a 2.22–2.26 szakaszokhoz.*

(a) Egy szakasz két részre osztása egy mellékfeltétellel – pl. adott „szorzattal” (amit akár aritmetikailag, akár geometriailag lehet értelmezni) – jellegzetesen babiloni sőt ó-babiloni eredetű feladacsoport. Tulajdonképpen az egész „geometriai algebrának” erős babiloni gyökerei vannak, amelyekből a pitagoreusoknál kiteljesedett és teljesen geometriaivá vált ez a diszciplina, amit azután Euklidész magas szinten összefoglalt és rendszerezett.

(b) Euklidész után egy nagyon hosszú és bonyolult fejlődési folyamat vezetett el a többé-kevésbé mai értelemben vett algebrához (amibe itt még nem értjük bele a modern absztrakt algebrát), és ez a folyamat több, párhuzamosan futó fejlődési vonalon haladt előre:

• Nagyon lassú, nagyon fokozatos elszakadás a geometriától. (Érdekes, hogy a negatív – értsd negatív *racionális* – számok bevonása sok évszázadon át szinte nagyobb gondokat okozott, mint az *irracionalitás*, amely pl. a másodfokú algebrai feladatok területén kikerülhetetlen volt; ebben is a geometriai aspektus történelmileg is igen hosszú „uralkodásának” hatása jelenik meg.

• Az aritmetikai nézőpont erősödése mellett szinte szüntelen küzdelem az irracionalitás fogalmi problémáival – még akkor is, amikor algoritmikusan és szimbolikusan már jelentősen előrehaladt és „polgárjogot nyert” az irracionális „számok” használata.

• A szavakban, nehéz és szövevényes mondatokban leírt (és geometriai tartalmú) viszonyoktól a szimbólumokkal kevert szórövidítések nyelvén át (pl. alexandriai Diophantosznál, i. sz. 250 körül) a valódi szimbolikus algebrai nyelv megteremtéséhez (Vieta, Fermat stb. a 16. és 17. században) vezető küzdelmes folyamat.

(c) A görög matematikában nem léteztek „másodfokú egyenletek”, és különösen értelmetlen lett volna az általános és „nullára redukált” másodfokú egyenletről beszélni (ami ma – egy szisztematikus algebrai apparátussal kezelve – az iskolai matematika szerves része, mégpedig az $ax^2+bx+c=0$ szimbolikus formában és abban az általánosságban, hogy a, b, c és x egyaránt tetszőleges valós számok lehetnek). A táblázat második oszlopában a „másodfokú egyenlet”-nek olyan eseteit látjuk egymástól elkülönítve, amelyeket ma nem tekintünk önálló matematikai probléma-területnek és nem dolgozunk ki számukra egyedi megoldási módszereket.[57]

---

[56] Az aranymetszésre vonatkozólag lásd a 2F.11 feladatot is!

[57] Más – nem történeti, hanem didaktikai – kérdés (amelyet azonban a történeti megismerési folyamat hosszúsága és küzdelmes volta indukál), hogy nem kellene-e az oktatásban hossszabb, differenciáltabb, a fogalmi nehézségeket lassabban halmozó, tartalmilag érzékletesebb úton eljutni például az általános másodfokú egyenlet általános megoldásához. (Ez egyébként egyáltalán nem azt jelenti, hogy okvetlenül történeti mintákat kellene másolni a megismerési út ilyen meghosszabbításánál; nem, elsősorban didaktikai érdekeket kellene követni, és a történeti mozzanatok bevonását – a reguláris oktatásban, nem az ismeretterjesztésben – ezeknek kellene alárendelni.)

(d) Feltűnően érdekes, hogy még pl. Cardanonál[58] (a 16. században) is, aki pedig úttörője volt az algebra aritmetizálásának, algoritmizálásának és szisztematizálásának, keveredtek ezek a tendenciák a geometrizáló és egyedi „feladat-megoldások”-kal. *Ars Magna Sive de Regulis Algebraicis* („A nagy tudomány avagy az algebra törvényeiről) c. latin nyelvű főművében (1545) nem „az általános harmadfokú egyenlet általános gyökképletét” bizonyította be (ahogyan sok kevésbé pontos matematika-történeti szövegben olvashatjuk); ez a beállítás : matematika-történeti anakronizmus. Ezt a képletet – a maga ma szokásos általánosságában le sem írhatta volna (nem is szólva a 18. század óta sztenderddé vált általános, algoritmizáló bizonyítási eljárásokról), hiszen nem engedhette meg, hogy az együtthatóknak nem-pozitív értékei is lehessenek.[59]

Ezt úgy érhette el, hogy igen sok (huszonhárom!) speciális típust különböztetett meg, aszerint,

– hogy a harmadfokú egyenletben az ismeretlen mely hatványai szerepelnek,

és hogy

– ezek közül melyek vannak az egyenlet azonos oldalán ill. különböző oldalakon.

Néhány példa:

$$x^3+ax=b\,,\quad x^3=ax+b\,,\quad x^3=ax^2+b\,,\quad x^3+ax^2=b\,,\quad x^3+a=bx^2+cx\,,\ \dots\,.$$ [60]

---

[58] Geronimo v. Girolamo Cardano (latinul Hyeronimus Cardanus, 1501–1576), kiemelkedő olasz orvos, filozófus, fizikus-technikus, a 16. századi olasz matematika legjelentősebb művének tartott *Ars Magna …* szerzője. A 16. század algebrájának korszakalkotó eredményei: 1. az $x^3+ax=b$ egyenlet

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}+\frac{b}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}}-\frac{b}{2}}$$

„gyökképlete” (a másodfokú egyenlet gyökképletének mintájára), 2. annak megmutatása, hogy az általános harmadfokú egyenlet egy lineáris helyttesítéssel másodfokú tag nélküli harmadfokú egyenletbe vihető át, 3. negyedfokú egyenlet megoldásának visszavezetése harmadfokú egyenlet megoldására, 4. összefüggések algebrai egyenletek gyökei és együtthatói között, 5. összefüggés a gyökök száma és a fokszám között (ezzel kapcsolatban vizsgálatok többszörös gyökök, negatív és képzetes gyökök, a fenti egyenletre vonatkozó *casus irreducibilis* – a $\frac{b^2}{4}+\frac{a^3}{27}<0$ eset területén), nagyon fontos algoritmikus irányt jelöltek ki az algebra további fejlődésére. (Nem kisebbíti Cardano érdemeit, hogy fölfedezései nem előzmények nélküliek; jelentős elődök ill. kortársak voltak pl. S. dal Ferro, N. Tartaglia és Cardano tanítványa, L. Ferrari.)

Cardano a lineáris algebrában és a determináns-fogalommal kapcsolatban is kezdeményezőként lépett fel. Szerepe volt a valószínűségelmélet fejlődésének korai fázisában is.

A róla elnevezett „kardán-felfüggesztés”-t nem ő találta fel, de egy 1545-ben megjelent fizikai értekezésében közölt leírásból vált ismertté. Érdekes az értekezés címe: *De subtilitate rerum* (latin), vagyis „Egy nagyon agyafúrt dologról”; egyébként számos technikai találmánya, újítása volt.

[59] Ennek nem annyira önmagában a negatív számoktól és a nullától való idegenkedés volt az oka (amely az ő korában különben is már oldódott), hanem inkább az, hogy a geometriai algebra módszereit (amelyeknél a számokat geomtriai objektumok *mértékével* – mint hosszúság, terület stb. – kell reprezentálni) csak így alkalmazmazhatta. Ez is az algebra hagyományos geometrizálásának volt tehát a következménye.

[60] A jelölésrendszer persze nem az volt, amellyel most leírjuk, hanem nagyjából az ősi diophantoszi mintát követi: a „képletek” szöveges leírása, bizonyos szavak rövidített írásával és néhány szimbólum használatával.

Alexandriai Diophantosz (i. e. 3. sz) életéről alig tudunk valamit. Főműve, az *Aritmetika*, állítólag 13 könyvből állt, ezekből hat könyv görögül fennmaradt, további négyet pedig arab fordításban a 20. század 70-es éveiben fedeztek fel. Ennek a műnek óriási a jelentősége. Egyrészt jóformán az egyetlen fennmaradt dokumentum a görög logisztika több évszázados fejlődéséről. Másrészt a 10. századtól kezdve – amikor arabra fordították – jelentősen befolyásolta az aritmetika és az algebra fejlődését mind az iszlám világban, mind Európában.

(Igaz, hogy azután azt is kimutatja, hogy a minden hatványt tartalmazó egyenletek megoldása visszavezethető másodfokú tag nélküli egyenletekére.)

Cardano szövege (lehetőség szerint hű fordításban)[61]	*Mai értelmezés, mai jelöléssel*
A feladattípus: A köb és az első hatvány egyenlő a számmal	Megoldandó az $x^3 + ax = b$ egyenlet
A megoldás szabálya: Emeld köbre az x együtthatójának egyharmadát. Add hozzá a szám felének a négyzetét. Vedd az egésznek a négyzetgyökét. Ebből vegyél kettőt; az egyikhez add hozzá azt, amit az imént négyzetre emeltél , a másikból vond le ugyanazt. Így egy binomiumot és az ő apotomé-ját kaptál.[62] Végül vond le az apotomé köbgyökét a binomium köbgyökéből; a különbség, vagyis az, ami marad: az ismeretlen értéke.	$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} + \frac{b}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^3 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}$
Numerikus példák: 1. A köb és az első hatvány 6-szorosa egyenlő 20-szal.	$x^3 + 6x = 20$
Emeld köbre a 6-nak az egyharmadát …	$\left(\frac{6}{3}\right)^3 = 8\,,\ \left(\frac{20}{2}\right)^2 = 100\,,\ 8 + 100 = 108$ $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$
2. A köb és az első hatvány 3-szorosa egyenlő 10-zel.	$x^3 + 3x = 10$
Emeld köbre a 3-nak az egyharmadát …	$\left(\frac{3}{3}\right)^3 = 1\,,\ \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25\,,\ 1 + 25 = 26$ $x = \sqrt[3]{\sqrt{26} + 5} - \sqrt[3]{\sqrt{26} - 5}$

Cardano mindezeknek egy-egy külön fejezetet szentel, mindegyik típust konkrét számtani példával vezeti be. A bizonyítást is külön-külön, ezen esetek mindegyikére alkalmasan választott egyedi geometriai módszerrel végezte (a könyv külön-külön fejezeteiben).[63] Az eredmény pedig – mai szem-

[61] A fordításhoz a műnek ezt az angol nyelvű kiadását használtuk: *The Great Art or the Rules of Algebra by Girolamo Cardano*, Translated and edited by T. Richard Witmer, The M.I.T. Press, 1968.

[62] *Binomium*: kéttagú (tk. „kétnevű”) $a + b$ összeg, *apotomé* (tk. „elmetszett”): a megfelelő $a - b$ különbség.

A görög matematikában eredetileg egyenként mérhető („kimondható”, „racionális”), de egymással összemérhetetlen a, b „mennyiségekre” – főleg szakaszokra alkalmazták (lásd 1. füzet 1.23). Ezek az irracionalitás kiterjedt elméletének alapfogalmaihoz tartoztak. Az elmélet részletes és rendszeres kifejtése Euklidész *Elemei* X. könyvében található.

[63] Ez nem csak Cardano munkamódszere volt, hiszen annak az egész korszaknak a felfogását tükrözi, amely szerint ez az egyetlen lehetséges és egyáltalán elképzelhető eljárás. Példaképpen említjük a szintén olasz Luca Paciolit, aki fél évszázaddal korábban működött, mint Cardano.

mel visszatekintve – minden egyes esetben a ma ismert általános gyökképletnek a mindenkori konkrét esetre való való alkalmazása.

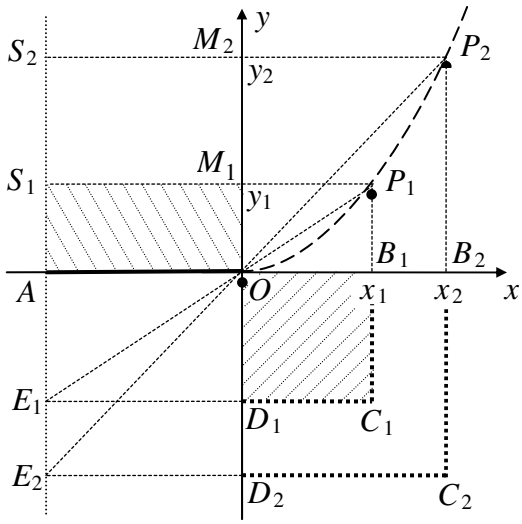
(e) Mindebben a görög geometriai algebra szívósan továbbélő hagyománya érvényesült. A reneszánsz korában – a jelentős aritmetikai fejlődés és a keleti (arab közvetítéssel érkező) más irányú újítások ellenére – különösen erős volt ez a hatás.

2F. Kitekintés a kúpszeletekre, a mértékgeometriára és az analitikus geometriára

2.28 (a) Amit a 2.28a ábrán látunk, az tulajdonképpen történeti anakronizmus. Itt ti. két olyan matematikai szemlélet kapcsolódik össze, amelyeket 2000 év választ el egymástól (de 2.27(a) alapján 2500 vagy talán 3000 évet is mondhatnánk): A görög (de babiloni eredetű) parabolikus területillesztésé és a 17. században meghonosodott analitikus geometriáé.[64]

2.25-höz illeszkedve jelöljük az *OA* szakaszt *a*-val, az *O*-tól a mindenkori *x* abszcisszájú *B* pontig terjedő *OB* szakaszt (bárhol legyen is a *B* az *x*-tengely pozitív részén) pedig *b*-vel. Az *a* legyen rögzítve, a *b* pedig változik az *x* ill. *B* változásával.

Ha mármost a mindenkori *B* pontból kiindulva rendre megszerkesztjük a *D*, *E*, *P* pontokat úgy, hogy $OD = OB$ (vagyis *OBCD* négyzet) legyen, akkor olyan gnomón-ábrát nyerünk, amelyben az *OASM* téglalap területegyenlő az *OBCD* négyzettel.



2.28a ábra

Itt mindegy, hogy a „területegyenlőség” melyik fogalmát használjuk, mert a mértékgeometriában mind ekvivalens a számszerű területek egyenlőségével. (Ezzel a következő füzetben foglalkozunk.)

Az ábrán a *B* pont két különböző helyzetében végeztük el ezt a szerkesztést (a megfelelő pontokat az 1 ill. 2 indexekkel megkülönböztetve). Az így adódó P_1, P_2 pontok jól láthatóan egy olyan – a szaggatott vonallal jelzett – görbén vannak, amelyet jól ismerünk az elemi koordinátageometriából: ez parabola, mégpedig az $ay = x^2$ egyenletű parabola. ($(x; y)$ a P pont koordinátái, az *a* jelet pedig itt az *a* szakasz *számszerű hosszának* a jelölésére használjuk). Ennek a parabolának a pontonkénti euklidészi szerkesztéséről van szó.

Az aritmetika nagymestere volt, aki a könyveivel sokat és igen eredményesen tett a matematikai (főleg aritmetikai) tudás terjesztéséért. Az 1494-ben megjelent és széles körben ismertté vált *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* („Az aritmetika, geometria, arányok és arányosság összefoglalása”) c. enciklopedikus művében pedig átfogó ismereteket nyújt az – elméleti és gyakorlati – aritmetika, algebra, pénz-, mérték- és súlyegységek (abban a korban különösen bonyolult, kaotikus viszonyok) és a kettős könyvvitel (!) területén, továbbá összefoglalóan ismerteti Euklidész *Elemei*t (amit egyébként 1509-ben latin nyelven kiadott).

Pacioli is hasonlóan osztályozza a harmad- és negyedfokú egyenleteket, mint majd Cardano teszi. Érdekes, hogy Paciolinál felmerül ezen egyenletek általános megoldhatóságának az *igénye*.

[64] Ezt a – didaktikai célra készült, de a matematika egy bizonyos történeti karakterváltozását is érzékeltető – konstrukciót a Deák E.: Matematika II. (Kiegészítő tankönyv), Harmadik kiadás, Tankönyvkiadó 1989 c. kísérleti tankönyvünkből vettük át (51. o.).

2.29 Bizonyára feltűnik, hogy itt a *parabola* pontjainak a megszerkesztésére a *parabolikus* területillesztést használhatjuk. Ez nem a szavak véletlen egybeesésének, hanem az elnevezésnek a kérdése. Apolloniosz ui., akit Euklidész és Arkhimédész mellett a görög matematika harmadik legkiemelkedőbb személyiségének tartanak és aki a kúpszeletek elméletének megalkotója[65], éppen a parabolikus területillesztés nevéhez igazodva nevezte „parabolának” a ma is ilyen nevű görbéket. Hasonlóképpen választotta az „ellipszis”, „hiperbola” elnevezéseket is.

Ezekben a füzetekben nincs terünk rá, hogy konkrétan megmutassuk az egyes kúpszeletek és a megfelelő nevű területillesztések közötti kapcsolatot. A kúpszeletek analitikus geometriai egyenletén át ez ugyan nem lenne nagyon nehéz (a fenti – legegyszerűbb – esetben megkíséreltük ezt), de ez történetileg nem is lenne helyénvaló. Apolloniosz természetesen nem használhatott ilyen eszközt; azonkívül a kúpszeleteket valóban "„kúpok szeletei”-ként értelmezte (bár használt – a görög matematikában *szimptoma*-nak[66] nevezett – síkgeometriai értelmezéseket is, vagyis olyan – az egyes görbe-típusokat

---

[65] Apolloniosz életéről (kb. i. e. 260 – i. e. 190) kevés megbízható adat ismeretes. Kezdetben elméleti csillagászként szerzett hírnevet. Kezdeményezője volt a bolygópályák epiciklus-elméletének, amelynek az volt az indítéka, hogy a körpályák feltételezése alkalmatlannak bizonyult a megfigyelések leírására. (Eszerint a bolygó olyan körön mozog, amelynek a középpontja kört ír le a Föld körül.) Ptolemaiosz (i. sz. 2. század) erre alapozta zseniális matematikai kozmogóniáját, amely azután másfél évezredre – Kopernikuszig – meghatározta az asztronómia irányát.

Ma elsősorban azt a nagy matematikust tiszteljük benne, aki 8 könyvből álló híres művének, a *Conica*-nak első felében, összegyűjtve és saját koncepciójába illesztve bemutatta a kúpszeletekre vonatkozó kutatásokat a görög matematikában, amelyeknek az eredeti dokumentumai nem maradtak fenn. (Arkhimédész is bizonyítás nélkül használt fel műveiben kúpszeletekre vonatkozó – bizonyára akkor „ismert” – tételeket, pl. a parabolakvadkvadratúráról szóló írásában is, amellyel a következő füzetben részletesebben foglalkozunk.) A második részben azután kifejti a maga elméletét, amelynek alapja ezen görbék kétféle értelmezésének világos fogalmi elkülönítése és ugyanakkor a kapcsolat tisztázása.

Az egyik értelmezés szerint a kúpszeletek valóban „kúp-szeletek”, vagyis egy – egyenes vagy ferde – kúp palástjának a metszetei olyan síkokkal, amelyek különböző szögeket zárnak be a kúp tengelyével. (A hiperbola esetében a kúpot kettős kúppá egészítjük ki.) Itt tehát rögzítve van a kúp, míg a sík hozzá viszonyított helyzetét változtatjuk. Apolloniosz ezzel a számunkra is megszokott térgeometriai értelmezéssel váltotta fel az addig ismert Arisztaiosz-féle elképzelést, amelyben éppen fordítva: egy rögzített síkot metszünk egy olyan kúppal, amelynek valamelyik alkotója merőleges a síkra, és ennek a kúpnak a szögét változtatjuk (hegyesszög– derékszög–tompaszög). (Euklidész, Konon és Arkhimédész mellett – i. e. 330 körül – Arisztaiosz foglalkozott kúpszeletekkel és ő írta az első szisztematikus művet is róluk, de egyikük sem alkotott olyan általános, átfogó kúpszelet-elméletet, mint Apolloniosz.)

A másik értelmezésben Apolloniosz eleve síkgörbékként vagyis síkgeometriai karakterisztikus tulajdonságaikkal – a szövegben alább említett szimptomákkal – definiálta a különböző típusú kúpszeleteket, összefüggésben a különböző típusú területillesztésekkel (l. fent 2.23, 2.26, 2.28).

Van egy érdekes és történetileg fontos különbség a görög matematika két nagy alapművének, Euklidész Elemeinek és Apolloniosz Conicajának az utóéletében és recepciójában. Európában az *Elemek*-et a középkorban is ismerték és tk. folyamatosan a 19. századig – persze csak kivonatosan – az iskolai geometriaoktatás centrumába állították. A Conicát viszont sok századon át csak az iszlám világban „fogadták be”. Európában a 17. században irányult ismét nagyobb figyelem a kúpszeletekre, amikor Kepler felismerte, hogy a bolygók ellipszis-pályán mozognak (és később ismét, amikor Newton bebizonyította, hogy ez az általános tömegvonzás törvényének következménye).

[66] A szó etimológiája: πίπτειν (piptein) = esni; πτωμα (ptoma) = esés, eset; συν-, συμ- (szin-, szim-) = együtt (v. ö. szinkron, szimmetria, szimfónia, szimptomatikus); „szimptoma” tehát „egybeesés”, „jellegzetesség", ami „valamire karakterisztikus”. (V. ö. aszimptota = olyan egyenes, amely egy görbéhez tetszőlegesen közeledik, de *nem* metszi, azaz „*nem* esik vele egybe”.)

karakterizáló – geometriai kapcsolatokat, amelyek tulajdonképpen azt a szerepet töltötték be az elmélet struktúrájában, mint a modern analitikus geometriában a görbék „egyenletei”).

2G. Az eudoxoszi arányelmélettől a Dedekind-szeletek elméletéig

2.30 Az eudoxoszi arányelméletnek – a saját korabeli és az azon túl még nagyon sokáig ható óriási jelentősége mellett – van egy olyan közvetlen, természetes folytatása, amely ennek ellenére 2300 évig váratott magára, pedig a görög matematika óta fennálló és mindvégig feszítő, a matematikatudomány alapjait érintő problémákat oldott meg. Ez a *Dedekind-szelet* fogalma és a rá épülő elmélet[67], amely a 19. század hetvenes éveiben – több, egészen más természetű, de végső soron ezzel egyenértékű[68] elmélet mellett – végre lehetővé tette a valós számtest fölépítését és ezzel a mértékgeometria egzakt megalapozását is.

A következőkben igyekszünk „genetikus” módon, vagyis természetes forrásából, az eudoxoszi arányelméletből *származtatva* bemutatni ezt a modern fogalmat és elméletet.

2.31 (a) Az eudoxoszi arányegyenlőség-definíció szerint egy $(a;b)$ szakaszpár akkor arányegyenlő egy $(c;d)$ szakaszpárral, ha minden olyan $(p;q)$ természetes szám-párra, amelyre

(1)		(2)		(3)
$p\cdot a<q\cdot b$	ill.	$p\cdot a=q\cdot b$	ill.	$p\cdot a>q\cdot b$,

egyben

$p\cdot c<q\cdot d$	ill.	$p\cdot c=q\cdot d$	ill.	$p\cdot c>q\cdot d$.

(b) Mindenekelőtt azt kell észrevennünk, hogy a (2) eset más természetű, mint az (1), (3) esetek. Olyan $(p;q)$ számpár, amire $p\cdot a<q\cdot b$, mindenkor létezik, mégpedig minden *p*-hez van ilyen *q*.[69] Ugyanez vonatkozik a (3) esetre. Az azonban, hogy létezik olyan $(p;q)$, amelyre $p\cdot a=q\cdot b$, egyenértékű azzal, hogy *a* és *b* összemérhető.[70] A (2) eset tehát nem-összemérhető $(a;b)$ szakaszpárnál „üresen” – és ezért automatikusan – teljesül[71], mégpedig függetlenül a $(c;d)$ pár megválasztásától.

(c) Összemérhető $(a;b)$ szakaszpár viszont pontosan akkor arányegyenlő $(c;d)$-vel, ha az is összemérhető és ráadásul e két pár az elemi értelemben is egyenlő arányú: van $m,n\in\mathbb{N}$ úgy, hogy $a=\frac{m}{n}\cdot b$, $c=\frac{m}{n}\cdot d$. Ebben az esetben az arányegyenlőség valóban „két arány egyenlősége”-ként értelmezhető, minthogy a két szakaszpár „arány” külön-külön létezik és egyenlők egymással.

---

[67] Richard Dedekind (német, 1831–1916) a matematika több területén ért el igen jelentős eredményeket és kezdeményezett nagy horderejű új irányokat. Itt nem foglalkozhatunk az algebrai, az algebrai számelméleti és a halmazelméleti munkásságával, a G. Cantor-féle halmazelmélet kifejlesztésében játszott szerepével, de a valós számtest modern szigorúsággal való fölépítése és annak nagyon hosszú, küzdelmes előtörténete az egyik központi tárgya a jelen füzeteknek.

[68] A valós számtest fölépítése különböző elméleteiről és ezek „egyenértékűségéről” még szólni fogunk egy későbbi füzetben.

[69] Ez a $p\cdot a$, *b* szakaszokra alkalmazott arkhimédészi axióma következménye: *b*-nek van olyan *q* többszöröse, amely nagyobb $p\cdot a$-nál.

[70] $p\cdot a=q\cdot b$ esetében ui. $a=q\cdot\frac{a}{q}$, $b=p\cdot\frac{b}{p}$, és minthogy $\frac{a}{q}=\frac{b}{p}$, azért ez a szakasz közös mértéke *a*-nak és *b*-nek; a fordított implikáció hasonlóan látható be.

[71] „Ha $p\cdot a=q\cdot b$, akkor $p\cdot c=q\cdot d$” azért igaz, mert $p\cdot a=q\cdot b$ egyetlen $(p;q)$ párra sem teljesül.

(d) *A görög arányelmélet* ismertetésében azonban különös hangsúllyal igyekeztünk érzékeltetni, hogy az eudoxoszi arányegyenlőség-fogalom (amely lehetővé tette pl. a geometriai arányelméletnek a kiterjesztését azáltal, hogy nem kell figyelembe venni az összemérhetetlenség lehetőségét) nem teremtett általános arány-fogalmat. *Két szakaszpár „arányegyenlősége” ebben a fölfogásban nem azt jelenti, hogy két „arány” egyenlő. Két szakasz aránya önmagában ui. nem-létező fogalom.*

A Dedekind-elmélet ugyan a valós számtest fölépítéséhez vezet, de alapvetően geometriai indítékú; egyebek mellett arra is irányul, hogy *az eudoxoszi elméletből kiindulva annak éppen ezt a hiányosságát számolja fel.*

(e) Ha a szakaszok speciálisan összemérhetők, akkor persze van „arányuk”, amely magából a közös mérték létezéséből adódik, s amelyet egy törtszám jelenít meg: Ha az a, b szakaszok közös mértéke a d szakasz, vagyis van $m, n \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $a = m \cdot d$, $b = n \cdot d$, akkor

$$a = \frac{m}{n} \cdot b \text{ [72]} \qquad \text{ill.} \qquad n \cdot a = m \cdot b \text{ [73]},$$

és így

$$\frac{m}{n} \qquad \text{ill.} \qquad (m; n)$$

az $(a; b)$ pár *arányának* mondható.

Az egyenlő-arányúság az összemérhető rendezett szakaszpárok körében nyilván ekvivalenciareláció.[74] Az összemérhető rendezett szakaszpárok tehát ekvivalencia-osztályokba sorolhatók, amelyeket törtszámokkal vagy pozitív egészekből alkotott rendezett párokkal „címkézhetünk”.

2.32 Az eudoxoszi arányegyenlőség-definíció gondolatkörében mozogva Dedekind idejében – a 19. század utolsó harmadában, a halmazelmélet születésének korában – már természetes volt az a felismerés, hogy minden $(a; b)$ szakaszpár a pozitív racionális számok rendezett halmazának egy két részhalmazból álló partícióját[75] hozza létre,

$$\mathbb{Q}^+ = \mathcal{A} \cup \mathcal{B},\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing,\ \mathcal{A} \neq \varnothing,\ \ \mathcal{B} \neq \varnothing, \text{ vagyis}$$

$\mathcal{A}$ ill. <u>*a partíció alsó*</u> ill. <u>*felső osztálya*</u>, mégpedig úgy, hogy

(Δ_1) Minden pozitív racionális szám eleme az egyik és csakis az egyik osztálynak,

(Δ_2) egyik osztály sem üres,

továbbá

(Δ_3) $\mathcal{A}$ minden eleme kisebb $\mathcal{B}$ minden eleménél,

(Δ_4) $\mathcal{B}$ -nek nincs minimuma (legkisebb eleme).[76]

A $\mathbb{Q}^+$ rendezett halmaz minden ilyen partícióját $\mathbb{Q}^+$ egy <u>*szeleté*</u>nek fogjuk nevezni.[77]

---

[72] Ui. $a = p \cdot d = p \cdot \frac{b}{q} = \frac{p}{q} \cdot b$.

[73] Ui. $q \cdot a = qp \cdot d = p \cdot b$.

[74] *Rendezett* szakaszpárokat kell mondanunk; ha az $(a; b)$ pár aránya $\frac{p}{q}$, akkor a $(b; a)$ páré $\frac{q}{p}$.

[75] Egy H halmaz valamilyen *partícionálása* vagy *partíciója* a halmaznak olyan nem-üres, diszjunkt részhalmazokra való bontása, amelyeknek az egyesítése maga az eredeti halmaz (vagyis mindegyik részhalmazban van H-elem és H minden eleme eleme ezen részhalmazok közül pontosan egynek).

[76] Ehelyett azt is mondhatnánk, hogy $\mathcal{A}$ -nak nincs maximuma (akkor azt kellene végigvezetni az elméleten); ez csak konvenció kérdése. A lényeg az, hogy nem lehet *mindkét* osztálynak szélső eleme.

Mármost egy $(a;b)$ szakaszpár ezen a módon generálja $\mathbb{Q}^+$ egy szeletét:

$$\mathcal{A}=\left\{\frac{p}{q}:\, p,q\in\mathbb{N},\ a\ge\frac{p}{q}\cdot b\right\},\qquad \mathcal{B}=\left\{\frac{p}{q}:\, p,q\in\mathbb{N},\ a<\frac{p}{q}\cdot b\right\},$$

amit az eudoxoszi elmélet nyelvezetéhez igazodva így is írhatunk:

$$\mathcal{A}=\left\{\frac{p}{q}:\, p,q\in\mathbb{N},\ q\cdot a\ge p\cdot b\right\},\qquad \mathcal{B}=\left\{\frac{p}{q}:\, p,q\in\mathbb{N},\ q\cdot a<p\cdot b\right\}.$$

2.33 (a) A döntő lépés a fordított kérdés föltevése: *Ha* $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ *egy tetszőleges szelete* $\mathbb{Q}^+$ *-nak, van-e olyan* $(a;b)$ *szakaszpár, amely éppen ezt a szeletet generálja 2.32 értelmében?*

(b) Abban a speciális esetben, ha $\mathcal{A}$ -nak van maximuma – nevezzük az ilyen szeleteket *1. típusúaknak* –, szinte triviálisan igen a válasz. Legyen ui. az $\mathcal{A}$ legnagyobb eleme $\frac{m}{n}$, és válasszuk b-t tetszőlegesen, a-t pedig így: $a=\frac{p}{q}\cdot b$. Ekkor a

$$\frac{p}{q}\in\mathcal{A}\qquad\text{ill.}\qquad\frac{p}{q}\in\mathcal{B}$$

esetben valóban

$$a\ge\frac{p}{q}\cdot b\qquad\text{ill.}\qquad a<\frac{p}{q}\cdot b$$

hiszen

$$a=\frac{m}{n}\cdot b\ge\frac{p}{q}\cdot b\qquad\text{ill.}\qquad a=\frac{m}{n}\cdot b<\frac{p}{q}\cdot b\,.$$

Megjegyzések. 1. Természetesen a-t is választhatjuk tetszőlegesen; akkor $b=\frac{q}{p}\cdot a$ legyen.

2. Vegyük észre, hogy itt $(a;b)$ összemérhető szakaszpár.

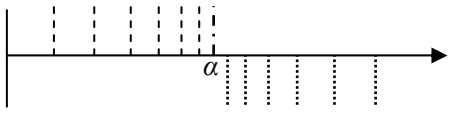
(c) Az igazi kérdés tehát az, hogy az olyan $\mathbb{Q}^+$ -szeletet, amelynek alsó osztályában nincs maximális elem (vagyis egyik osztályában sincs szélső elem) – ezeket fogjuk *2. típusúak*nak nevezni –, szintén generálják-e $(a;b)$ szakaszpárok? (Ha igen, azok bizonyára nem-összemérhető szakaszpárok lesznek.) Legyen ismét b tetszőleges szakasz; az a feladat, hogy keressünk hozzá alkalmas a szakaszt. Azért, hogy majd az összes szakaszok összehasonlíthatók legyenek, képzeljük mindegyiket egy félegyenesre fölmérve úgy, hogy a kezdőpontok mind egybeesnek a félegyenes kezdőpontjával.

---

[77] Valójában Dedekind nem a $\mathbb{Q}^+$, hanem a $\mathbb{Q}$ alaphalmazon definiálta azt, amit azóta Dedekind-(féle) szeletnek nevezünk (lásd alább 2.34). A fogalomkör $\mathbb{Q}^+$ -ra alapozott előzetes bemutatását a 2.30-ban említett genetikus bevezetés jegyében választottuk.

(Ezzel nem sértjük a Dedekind-féle gondolkodásmódot; Dedekind után a szelet fogalmát amúgyis kiterjesztették tetszőleges rendezett halmazokra.)

A 2.33a ábrán a félegyenes fölött ill. alatt jeleztük azoknak a $\frac{p}{q}\cdot b$ szakaszoknak a jobb oldali végpontjait, amiknél $\frac{p}{q}\in\mathcal{A}$ ill. $\frac{p}{q}\in\mathcal{B}$. Minthogy az előbbiek halmaza felülről korlátos, azért van legkisebb felső korlátja (felső határa, szuprémuma); jelöljük ezt α-val, az általa (mint jobb oldali végpont által) kijelölt szakaszt pedig a-val. Ekkor az $(a;b)$ szakaszpár valóban a megadott szeletet generálja:



2.33a ábra

$$a\geq\frac{p}{q}\cdot b\ \left(\frac{p}{q}\in\mathcal{A}\right)\quad\text{és}\quad a<\frac{p}{q}\cdot b\ \left(\frac{p}{q}\in\mathcal{B}\right).$$

Megjegyzések. 1. Itt is igaz, hogy a-t is választhatjuk tetszőlegesen; akkor $b=\frac{q}{p}\cdot a$ legyen.

2. Vegyük észre, hogy itt $(a;b)$ nem-összemérhető szakaszpár.

(d) Dedekind nem a szuprémum létezésére támaszkodott az egyenesre vonatkozólag[78], hanem ennek egy másik – ekvivalens – megfogalmazására, amit <u>*Dedekind-féle folytonossági axiómának*</u> nevezünk: *Ha egy egyenes pontjait két* (nem üres[79]) *osztályba soroljuk úgy, hogy az első osztály minden eleme balra van a második osztály minden pontjától, akkor létezik egy és csakis egy pont, amely ezt a kettéosztást* <u>*generálja*</u> (azáltal, hogy ez a pont vagy az első osztály szélső jobb, vagy a második osztály szélső bal pontja).[80]

Ez az axióma lényegében a rendezett ponthalmazként tekintett egyenesnek a *hézagmentességét* mondja ki (vagyis azt, hogy ennek a halmaznak nincs olyan két részhalmazzá való particiója, hogy egyik részhalmaznak sincs szélső pontja). Ez fontos eleme az „egyenes”-ről alkotott elképzelésünknek, s ennek megfelelően ez vagy valamely ezzel egyenértékű axióma integráns része az euklidészi geometria minden mai, korszerű axiómarendszerének. (Ekvivalens pl. a Cantor-axiómával.)

A mai szóhasználatban ez nem „folytonossági”, hanem „teljességi” axióma.

Euklidésznél és az egész görög matematikában azonban – ahol a geometria fölépítésében még keveredtek a szigorúan axiomatikus és a naívan a szemléletre támaszkodó eszközök – nem merült fel annak szükségessége, hogy ezt *axiómaként* rögzítsék. Mégis történtek kísérletek ennek az elképzelésnek legalább a *megfogalmazására*. Arisztotelész például a *Fizika* című művében (227a, 11–12) így ír: „Azt mondom azonban, hogy valami összefüggő, ha két egymással érintkező részének a határa mindenkor egybeesik […]”.[81]

---

[78] Vagyis pontosan: arra, hogy az egyenes – mint rendezett halmaz – bármely nem-üres, felülről korlátos részhalmazának van legkisebb felső korlátja.

[79] Ez a megszorítás nem szerepelt Dedekind eredeti szövegében, de ő nyilvánvalóan így értette.

[80] Az *Elemek*-ben két vonal metszéspontjának létezése konkrét szituációkban (pl. *Elemek* I.1, I.21) nincs axiomatikusan megalapozva, általában a topológiai viszonyok (pl. idom belső része, határa, komplementuma és annak belső része és határa) nincsenek kidolgozva. A Dedekind-féle folytonossági axióma indítéka az ilyen hiányok megszűntetése volt. Lásd a 2F.14 feladatot!

[81] Érdekes és karakterisztikus, hogy itt föl sem merül az a lehetőség, hogy a részek valamelyikének nincs is határa (mint például egy nyílt intervallumnak a geometriában, vagy az aritmetikában azon (potizív) törtszámok halmazának, amelyeknek a négyzete kisebb 2-nél). A topológiai nézőpont hiánya az egyik jellegzetessége nemcsak a görög matematikának, hanemkésőbbi nagy korszakok matematikájának is egészen a 19. századig.

Egyébként nagyjából hasonló értelmű megfogalmazási próbálkozásokat későbbi korokból is ismerünk; ezek a 19. század előtt inkább filozófiai jellegűek, még ha matematikai művekben szerepelnek is. Például Leib-

2.34 Most már az „igazi”, a $\mathbb{Q}$ alaphalmazra vonatkozó Dedekind-szelet-fogalommal folytatjuk.[82] A fogalomépítés mintáját 2.32-ben találjuk.

(a) *Definíció*. A rendezett $\mathbb{Q}$ halmaz egy <u>*szelete*</u> (<u>*Dedekind-szelete*</u>) $\mathbb{Q}$-nak egy két részhalmazból álló partíciója hozza létre,

$$\mathbb{Q} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B},\ \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \varnothing,\ \mathcal{A} \neq \varnothing,\quad \mathcal{B} \neq \varnothing, \text{ vagyis}$$

$\mathcal{A}$ ill. <u>*a partíció alsó*</u> ill. <u>*felső osztálya*</u>, mégpedig úgy, hogy

(D_1) Minden racionális szám eleme az egyik és csakis az egyik osztálynak,
(D_2) egyik osztály sem üres,
(D_3) $\mathcal{A}$ minden eleme kisebb $\mathcal{B}$ minden eleménél,
(D_4) $\mathcal{B}$-nek nincs minimuma (legkisebb eleme).[83]

(b) *Megjegyzés*. A „pozitív” szeletek[84] egy-egyértelműen megfelelnek a szakaszpároknak, a 2.32-2.33 alatt leírt értelemben.

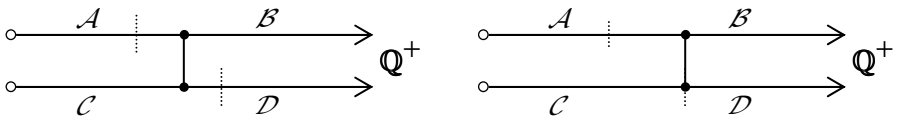
(c) Az <u>*1. ill. 2. típusú szelet*</u> értelmezését kiterjeszthetjük $\mathbb{R}$-re: Így nevezzük azokat a szeleteket, amelyeknek az alsó osztályában van ill. nincs maximális elem.

(d) *Megjegyzés*. Az $\mathbb{R}$-et, amely itt még csak puszta (nem struktúrált) halmaz, az elmélet azután a valós számtest alaphalmazává teszi azáltal, hogy az ehhez szükséges struktúrákkal látja el. Ennek a hosszú útnak csak két kezdő lépését, a rendezés és az összeadás bevezetését mutatjuk most be.

2.35 (a) Az $\mathbb{R}$ halmaznak van egy természetes <u>*rendezése*</u>:

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \prec (\mathcal{C}, \mathcal{D}),\ \text{ha } \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \varnothing,$$

ahol $\mathcal{B}$ és $\mathcal{C}$ közös eleme akár (de persze csak akkor, ha $(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 1. típusú szelet) $\mathcal{C}$ maximális eleme is lehet (l. a 2.35a szimbolikus ábrát).



2.35a ábra

Ez a reláció valóban aszimmetrikus és tranzitív.

(b) A $\mathbb{Q}$ <u>*0-szelete*</u> az, amelynek a felső ill. alsó osztálya a pozitív ill. nem-pozitív racionális számok halmaza. (Ez a szelet 1. típusú; az alsó osztály maximális eleme a 0.)

(c) Pozitív ill. negatív szeleteknek nevezhetjük azokat, amelyek (a) szerint nagyobbak ill. kisebbek a 0-szeletnél.

---

niz általánosabban föltételezte, hogy egy olyan „folytonos vonal”, amely „egy felület valamely részén és azon kívül is” halad, metszi ennek a résznek a határát. (A mai topológiai felfogás szerint – azon túl, hogy a „felület”, „felület része”, „határ”, „vonal”, „folytonos vonal” fogalmakat föl kell építeni – azt is föl kell tételezni, hogy a „felület” valamilyen jóldefiniált értelemben összefüggő.)

[82] Dedekind azáltal, hogy nem a pozitív, hanem az összes racionális számok halmazából indult ki, valójában eltávolodott az elmélet geometriai hátterétől (annak érdekében, hogy ne csak a pozitív, hanem az összes valós számok rendszerét építhesse föl). Ez azonban nem csorbítja azt a tényt, hogy az elmélet valódi indítéka és inspirálója az Eudoxosz-féle arányelmélet – és annak elégtelensége – volt.

[83] Ehelyett azt is mondhatnánk, hogy $\mathcal{A}$-nak nincs maximuma (akkor azt kellene végigvezetni az elméleten); ez csak konvenció kérdése. A lényeg az, hogy nem lehet *mindkét* osztálynak szélső eleme.

[84] Így nevezhetjük azokat a szeleteket, amelyeknek az alsó osztályában van *pozitív* racionális szám.

(d) Az (a) alatti rendezés azért „természetes”, mert az $\mathbb{R}$ alaphalmaznak azt a részhalmazát, amely az 1. típusú szeleteket tartalmazza, rendezésizomorf módon megfelelteti $\mathbb{Q}$-nak:

1. típusú $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ és $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ szeletekre $(\mathcal{A},\mathcal{B})\prec(\mathcal{C},\mathcal{D})$ akkor és csak akkor, ha $\mathcal{A}$ maximális eleme kisebb, mint $\mathcal{C}$ maximális eleme a $\mathbb{Q}$ természetes rendezésében.

Az $\mathbb{R}$ rendezett halmaz tehát a $\mathbb{Q}$ rendezett halmaz kiterjesztése.

2.36 Innen az a felismerés vezet tovább a valós számtesthez, hogy $\mathbb{Q}$ többi struktúrája is kiterjeszthető $\mathbb{R}$-re. Itt azokról az *algebrai* struktúrákról van szó, amelyek lehetővé teszik a *műveleteket*. Ezt egyetlen – a legegyszerűbb – példán, az összeadás példáján érzékeltetjük.

Definíció. Legyen $(\mathcal{A},\mathcal{B}),(\mathcal{C},\mathcal{D})\in\mathbb{R}$. Ekkor $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ és $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ <u>*összegén*</u> azt az $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ szeletet értjük, amelyre

$$\mathcal{F}=\{\beta+\delta\colon \beta\in\mathcal{B},\delta\in\mathcal{D}\},\ \mathcal{E}=\mathbb{Q}\setminus\mathcal{F}\ .$$

L. a 2F.13(b) feladatot. (Könnyű igazolni, hogy valóban $(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathbb{R}$ és hogy ez az „összeadás”-művelet kommutatív, asszociatív és kompatibilis a rendezéssel.)

2.37 (a) Lerövidítve és tömörítve megfogalmazzuk, hogy miként írta le maga Dedekind az irracionális számokról szóló művében[85] a valós számtest megteremtésének elvi vezérfonalát.

1. A racionális számok rendezett testet alkotnak.[86] Ez a mondat azt emeli ki, hogy a racionális számtest összetett *struktúra*: rendezés és algebrai struktúra együttese, amelyet kompatibilitási feltételek kapcsolnak össze.[87]

2. A racionális számtest kibővítése a valós számtestté az első lépésben csak a rendezés kiterjesztésével történik; a második lépés: az algebrai struktúrák (röviden: a műveletek) kiterjesztése.

3. Két különböző racionális szám között, továbbá bármely racionális szám fölött és alatt is végtelen sok különböző racionális szám van.

4. Minden *r* racionális szám két – közös elem nélküli – részre bontja a racionális számok rendezett halmazát: az *r* alatti számok $\mathcal{A}$ és az *r* fölöttiek $\mathcal{B}$ osztályára; magát az *r*-et akár $\mathcal{A}$-hoz, akár $\mathcal{B}$-hez csatolhatjuk, s akkor *r* az $\mathcal{A}$ legnagyobb ill. a $\mathcal{B}$ legkisebb eleme. Mindenképpen a racionális számok rendezett halmazának olyan kettébontását nyerjük, hogy egyik rész sem üres, és $\mathcal{A}$ minden eleme kisebb $\mathcal{B}$ minden eleménél.

Egy ilyen $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ párt a racionális számok rendezett halmaza egy szeletének nevezzük.[88] A szelet fogalmát tetszőleges rendezett halmazra – mint alaphalmazra – is átvihetjük.[89]

---

[85] *Stetigkeit und irrationale Zahlen* („Folytonosság és irracionális számok”), 1872. (A „folytonosság” itt nem függvény-folytonosságot jelent, hanem – a mai szóhasználattal – egy rendezett halmaz teljességét.)

[86] A *számtest* fogalmának megalkotását maga Dedekind kezdeményezte, és tőle származik az elnevezés is (németül: Zahlkörper). (A *test* szóval azt a „teljességet és zártságot” akarta kifejezni, amely abban nyilvánul meg, hogy az aritmetikai műveletek korlátlanul értelmezhetők – a nullával való osztás kivételével – és nem vezetnek ki ebből a körből.)

[87] Általában a struktúrákban való gondolkodást, amely az 1870-es évektől kezdve fokozatosan tért hódított és az egész matematika egyik legfontosabb alapelvévé vált (nem csak az absztrakt algebrában), jelentős részben Dedekind kezdeményezései indították el.

[88] A *szelet* fogalma és elnevezése (németül: Schnitt, ami magyarul: metszet, szétvágás) szintén Dedekind alkotása.

[89] Ez azért lehetséges, mert a racionális számok szeleteinek a definíciója is csak a rendezési struktúrát használja (az algebrai struktúrát egyáltalán nem).

5. Az egyenes (mint rendezett ponthalmaz) szokásos – és hagyományos – elképzelése és a racionális számhalmaz közötti nem-megfelelésnek két – egymással összefüggő – aspektusa van:

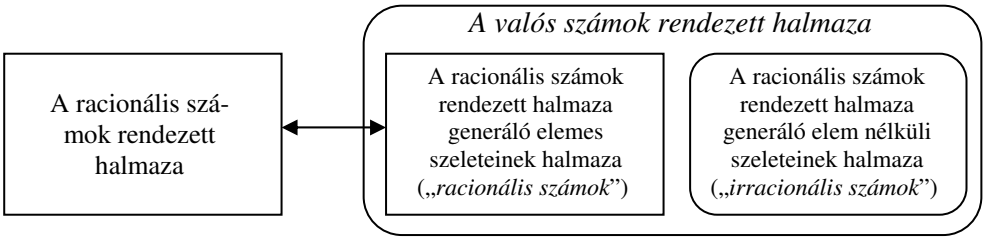
• A racionális számok rendezett halmaza – egy 0-pont és egy 1-pont kijelölése után – egy-egyértelműen és rendezéshűen megfeleltethető az egyenes pontjai valamely részhalmazának, de semmiképpen sem a teljes egyenesnek.

• Az egyenesnek, mint rendezett halmaznak minden pontja ennek a halmaznak egy szeletét generálja[90], ugyanez érvényes a racionális számok rendezett halmazának minden elemére.

Ennek a fordítottja azonban – vagyis az, hogy minden szeletet az alaphalmaz valamely pontja generál – bár igaz az egyenesre, nem igaz a racionális számok rendezett halmazára. (Az egyenes, mint rendezett ponthalmaz „folytonos”, „hézagmentes”, „összefüggő”, míg a racionálisok rendezett halmaza nem az.)

6. Ez az aszimmetria arra késztet bennünket, hogy a racionális számok rendezett halmazát kibővítsük azokkal a szeletekkel, amelyeknek nincs generáló eleme, és erre a bővebb halmazra így terjesztjük ki a racionálisok rendezését: Ha $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ a racionális számok rendezett halmazának egy generáló elem nélküli szelete, továbbá $r \in \mathcal{A}$ és $s \in \mathcal{B}$, akkor $r \prec (\mathcal{A}, \mathcal{B}) \prec s$.

7. Azt a „stílushibát”, hogy a kibővített rendezett halmaznak „kétféle” eleme van (számok és szeletek) úgy szüntethetjük meg, hogy a racionális *számokat* is az általuk generált *szeletekkel* reprezentáljuk.[91] Ílymódon egységesen a racionális számok rendezett halmaza szeleteinek rendezett halmazaként nyerjük a valós számok halmazát, amelybe a racionálisok rendezett halmaza rendezéshűen be van



2.37a ábra

ágyazva. (A 2.37a szimbolikus ábrán a kétirányú nyíl egy-egy értelmű, rendezéstartó megfeleltetést jelent.)[92]

2.38 (a) Nem célunk itt a valós számtest teljes fölépítése, de ennyit el kellet mondanunk, hogy megfogalmazhassuk azt a történetileg releváns kérdést, amely a Dedekind-elmélet és az Eudoxosz-elmélet szoros összefüggése alapján a legtermészetesebben merül fel.

Az Eudoxosz-elmélet annak a megrázó válságnak, amely a Pitagoreusok idején az összemérhetetlenség fölfedezése nyomán támadt, tulajdonképpen nem a *megoldását*, hanem a *megkerülésének* a korlátozott – de a korlátai között nagyon termékeny – lehetőségét nyújtotta. A Dedekind-elmélet vi-

[90] Persze az egyértelműség érdekében célszerű megállapodni abban, hogy a generáló elemet mindig az alsó vagy mindig a felső osztályhoz csatoljuk-e.

[91] Ezt a rendezésizomorfia alapján tehetjük meg.

[92] Dedekind eleinte nem magukat a 2. típusú szeleteket tekintette az új objektumoknak; *Stetigkeit und irrationale Zahlen* c. könyvének (l. 2.37(a)) 13. oldalán csupán azt írja, hogy ezek a szeletek új (irracionális) számokat *definiálnak* (?). (Érdekes, hogy még a 19. század utolsó harmadában is visszariadt egy ilyen nagy formátumú matematikus ettől az absztrakciós lépéstől; ez tehát nem lehet „kis lépés”.) Heinrich Weber (1842–1913), a sokoldalú, termékeny matematikus, egy Dedekindhez intézett levelében viszont azon a véleményen volt, hogy „az irracionális szám semmi egyéb, mint maga a szelet”! Ez felel meg a modern, ma is érvényes felfogásnak.

szont a valós számtest megteremtésével a 2600 év előtti válság *tényleges feloldását* hozta el. Ha mármost az utóbbit az előbbitől csak néhány kisebb lépés választja el (ezt is próbáltuk az előbbi szakaszokban a szoros kapcsolat bemutatásával érzékeltetni), akkor miért váratott magára 2300 évig?

(b) A magyarázatot abban találhatjuk meg, hogy valójában mégsem kis lépésekről van szó, hanem olyanokról, amelyek az egész matematika-tudománynak mélyreható metamorfózisát jelzik. Itt csak néhány szempontból igyekszünk erre rávilágítani.

• A Dedekind-elmélet nem csak egyes objektumokkal (például törtszámokkal) operál, hanem ilyenek halmazaival és ezek részhalmazaival (mint például a $\mathbb{Q}$ és a $\mathbb{Q}^+$ és ezeknek sokféleképpen két részhalmazra bontása).

• A tekintett halmazok: struktúrált halmazok, vagyis alaphalmazok, amelyeket struktúrákkal (rendezéssel, algebrai struktúrákkal stb.) ruházunk fel.

• A halmazok és struktúrált halmazok önálló objektumokká válnak, amelyekből ismét (struktúrált) halmazok származnak: A Dedekind-elméletben például a szeleteknek nevezett rendezett halmazpárok[93], majd később valós számokból, vagyis ilyen szeletekből alkotott halmazok stb.

A Dedekind-elmélet tehát abba a nagy áramlatba tartozik, amely a 19. század 70-es éveiben bontakozott ki, vezéralakja G. Cantor volt, és amelyet ma röviden halmazelméleti irányzatnak mondunk. Ez gyökeresen változtatta meg a matematika egész tudományának a jellegét. Nem „néhány kis lépés" az, ami az Eudoxosz-Dedekind-átmenetet jelenti (bár a közvetlen eszmei kapcsolat a kettő között nyilvánvaló)!

(c) A valós számtest felépítésének, problémáját egyébként nagyjából ugyanezekben az években több módon is megoldották, ennek a korszakfordító áramlatnak a sodrában. (Az egyik változat magától Cantortól származik.) Ezekre vissza fogunk térni későbbi füzetekben. Bár ezek a konkrét eljárásokban lényegesen különböznek egymástól, a (b) alatt említett általános sajátosságokban lényegében megegyeznek. Nyilvánvaló, hogy a valós szám problémája olyan természetű, hogy a görög tradíción épülő – és ezen az alapon 2000 éven át akármilyen hatalmasan fejlődő – matematika nem oldhatta meg. *Itt tehát nem egyszerűen egy új, nagy jelentőségű fölfedezés történt egy meglévő tudományban; magának a tudománynak kellett gyökeresen átalakulnia ahhoz, hogy ez az eredmény létrejöhessen.*

2.39 (a) A Dedekind-elmélettel kapcsolatos áttekintés lezárásaként még arról kell szólnunk, hogy miképpen teljesedik ki ebben az elméletben annak a mértékgeometriai problémának a *megoldása* (mégpedig az eudoxoszi gondolkodást következetesen folytatva és továbbfejlesztve), amely az eudoxoszi arányegyenlőség-elméletet indukálta, de amelyet az az elmélet még nem megoldani, csak – bár zseniálisan – *megkerülni* tudott.

(b) Egy pozitív szelethez, vagyis egy x pozitív valós számhoz, *végtelen sok* $(a;b)$ szakaszpár tartozik a 2.32-2.33-beli értelemben úgy, hogy

[93] Rendezett párok (ti. szakaszpárok és természetes-szám-párok) tulajdonképpen már az Eudoxosz-elméletben is szerepet játszanak (nem az eredeti terminológiában, hanem a mai felfogást visszavetítve). Itt azonban magasabb szintű objektumokból, ti. az eredeti objektumokból (pl. számokból) alkotott halmazokról és az azokból alkotott párokról van szó, amelyek azután ismét magasabb rendű objektumokként magasabbrendű halmazokat alkotnak stb.

1. mindezek a párok összemérhetők; $x = \frac{m}{n}$ valamely $(m, n) \in \mathbb{N}$ párra; mindegyik párra $a = \frac{m}{n} \cdot b$; ez a szám az a mértékszáma (az elemi értelemben) mindegyik párból az a-nak a megfelelő b-re nézve, ha a szelet 1. típusú;	1. egyik pár sem összemérhető; az x pozitív valós szám irracionális; ez a szám az a mértékszámaként értelmezhető a mindenkori b-re nézve (mindegyik párban), ha a szelet 2. típusú;

2. az a és a b szerepében egyaránt minden szakasz előfordul.

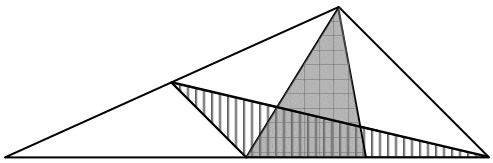
(c) Ha az ebben az értelemben ekvivalens – vagyis ugyanahhoz a szelethez tartozó – $(a; b)$ szakaszpárok második tagját rögzítjük, akkor abban a kontextusban az egyszerűsített – hallgatólagosan „közmegegyezéses” – beszédben nem kell a b-t újra meg újra említenünk, hanem röviden „az a szakasz hosszáról” szólunk, ami egy puszta (pozitív valós) szám.

2.40 Az iskolai matematika azt a hamis, leegyszerűsítő és torzító képet sugallja speciálisan a szakaszmérés és általánosan a valós szám problematikájáról, hogy minden szakasznak *eleve* „kell, hogy legyen” számszerű hossza, minden idomnak számszerű területe stb. Ebben ősi, a görög matematikát is megelőző, matematikailag naív elképzelések (vagy inkább kívánságok?) élnek tovább. (Ez a nagyon tradícionális kép még az egyetemi tanulmányok után is erőteljesen tovább él a tanárokban, akik azután nemzedékről-nemzedékre tovább örökítik.) Talán ellensúlyozhatja ezt a tudatunkban, ha valamennyire megismerjük a fentiekben érzékeltetett hatalmas történelmi ívet, tartalmi fejlődést, absztrakciós szintemelkedést és 2000 éves aprólékos, szerteágazó, küzdelmes és rengeteg tévedéssel és zsákutcával terhelt kutató munkát a technikai részletekben (amiről a 4. füzetben bővebben lesz szó).

2F Feladatok

2F.1 Bizonyítsa be: Egy háromszög nem lehet egybevágó egy valódi-rész-háromszöggel![94]
(*Útmutatás*. Egy háromszög maximális oldalával egybevágó szakasz nem helyezhető el a háromszögben úgy, hogy minden belső pontja a háromszögnek is belső pontja legyen. Ennek bizonyításához pedig először azt lássa be, hogy egy ABC háromszög bármely AD transzverzálisa – vagyis az A-t a BC szakasz valamely D belső pontjával összekötő szakasz – kisebb az AB, AC szakaszok maximumánál.)

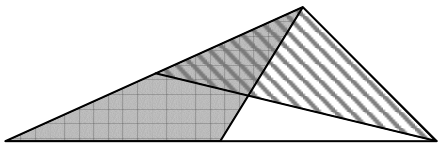
2F.2 A 2F.2a ábra a 6. axiómát illusztrálja egy konkrét szituációban, az „egyenlőség” és a „felezés” valamely konkrét értelmezése mellett. Fogalmazza meg szavakban és indokolja is, hogy mi ez a szituáció, mik ezek az értelmezések, és mi a kapcsolat a 6. axiómával!



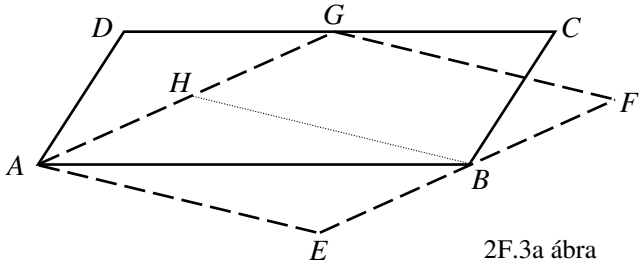
2F.2a ábra

[94] A feladat egy indítékát a 2.3, 2.5 szakaszokban találhatjuk meg. Természetesen szintetikus geometriai bizonyítást kívánunk, hiszen a mértékgeometriában nyilvánvalóan igaz az állítás. (Miért is?) A feladat alkalmas rá, hogy átérezzük, mennyivel bonyolultabb lehet pl. annak a bizonyítása, hogy egy háromszög nem is lehet átdarabolható egy valódi-rész-háromszögbe. Valójában annak a tételnek egy nagyon speciális esetéről van szó, hogy egy sokszög nem lehet átdarabolhatóan egyenlő egy valódi-rész-sokszöggel. Egy másik speciális esettel a 3. füzet feladat-részében foglalkozunk részletesen: Különböző nlgyzetek nem lehetnek átdarabolhatóan egyenlők (3F.15).

2F.3 (a) Bizonyítsa be, hogy az *ABCD*, *AEFG* paralelogrammák (2F.3a ábra) átdarabolhatóan egyenlők! (*G* a *DC* szakasz felezőpontja, *H* pedig az *AG* szakasz felezőpontja; $AE \parallel HB$.)



2F.3b ábra



2F.3a ábra

Útmutatás. Ne törekedjen egy közvetlen átdarabolás megadására, hanem mutassa ki, hogy a két paralelogramma közvetve átdarabolhatóan egyenlő!

(b) 2.3 alatt bizonyítás nélkül említettük, hogy a 2F.3b ábrán megjelölt – a nagy háromszög két különböző súlyvonala által létrehozott – rész-háromszögek átdarabolhatóan egyenlők.

Bizonyítsa be ezt az állítást!

Útmutatás. Használja föl (a) eredményét! (Hogyan illeszthető be a 2F.3b ábra a 2F.3a ábrába?)

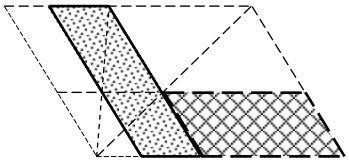
2F.4 Hogyan – milyen jelentés-változatokban ill. kombinációkban – alkalmazza Euklidész az *Elemek* I. 36 és I. 37 tételeinek bizonyításainál a paralelogrammák „egyenlőségét”?

2F.5 (a) Bizonyítsa be: *Két sokszög kiegészítéssel-átdarabolható, ha átdarabolhatók hozzávétele útján kiegészítéssel-átdarabolhatókká tehetők*.[95] (Ezzel 2.7(a) alatt találkoztunk, az *Elemek* egy tétele bizonyításának elemzésénél.)

(c) Igaz-e ez is: *Két sokszög kiegészítéssel-átdarabolható, ha átdarabolhatók elvétele útján kiegészítéssel-átdarabolhatókká tehetők* ?

2F.6 (a) Vizsgálja meg a 2F.6a ábrát. Hogyan lehet ezt a konfigurációt „fölépíteni”, vagyis milyen sorrendben lehet az egyes egyenes szakaszokat megszerkeszteni?

(b) Bizonyítsa be: Ezen az ábrán a vastag – folytonos ill. szaggatott – vonalakkal jelzett paralelogrammák „területegyenlők” (milyen értelemben?)!



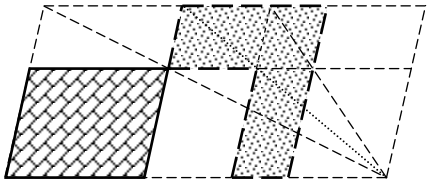
2F.6a ábra

2F.7 (a) Hogyan építhető föl a 2F.7a ábra?

(b) Bizonyítsa be, hogy a két satírozott idom „területegyenlő” (milyen értelemben?)!

(c) Van-e ebben jelentősége a pontozva rajzolt átlónak?

(Ha nincs, mi az „igazi” ábra, és hogyan szól az általános felismerés?)



2F.7a ábra

2F.8 Bizonyítsa be 2.17 mintájára: *Az ugyanazon magasságú paralelogrammák úgy aránylanak egymáshoz, mint az alapjaik.*

2F.9 A mértékgeometriában egy *ABC* háromszög számszerű területe az

[95] V. ö. a kieg. átdarabolhatóság definíciójával (2.1 (2)).

$$\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|m_C|,\ \frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|m_B|,\ \frac{1}{2}\cdot|BC|\cdot|m_A|$$

képletek bármelyikével számítható. Bizonyítsa be – a 2.7(a) alatti tétel fölhasználásával –, hogy

$$\frac{1}{2}\cdot|AB|\cdot|m_C|=\frac{1}{2}\cdot|AC|\cdot|m_B|.$$

(Hivatkozni kell arra, hogy kiegészítve-átdarabolással egyenlő sokszögek számszerűen is egyenlők.)

2F.10 Bizonyítsa be: *Ha a és b összemérhető szakaszok, a' és b' összemérhető szakaszok, és* $p\cdot a\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}q\cdot b \Rightarrow p\cdot a'\begin{pmatrix}<\\=\\>\end{pmatrix}q\cdot b'$ $(p,q\in\mathbb{N})$, *akkor létezik* $(m,n\in\mathbb{N})$ *úgy, hogy* $m\cdot a=n\cdot b,\ m\cdot a'=n\cdot b'$.

(Szavakban: Ha a mondott összemérhetőségi feltételek mellett a két szakaszpár egyenlő arányú az eudoxoszi értelemben, akkor az elemi értelemben is az. V. ö. 2.15.)

2F.11 „Köztudott dolog”, hogy a szabályos ötszögeknél megvalósul az aranymetszés: Bármely átló bármely őt belső pontban metsző másik átlót olyan arányban osztja, hogy az átló úgy aránylik a nagyobbik részhez, mint a nagyobbik rész a kisebbikhez.

Tanulmányozza a szabályos ötszögről szóló 1.15 és az aranymetszésről szóló 2.26 szakaszokat; azután dolgozza ki és írja le a következő összefüggéseket.

(a) A szabályos ötszögnél megvalósul az aranymetszés $a(a-x)=x^2$ összefüggése a következő szereposztásban: $a=d_0,\ x=s_0$ (d_0 a szabályos ötszög átlója, s_0 pedig az oldala).

(b) Az (a) alatti másodfokú egyenletnek az iskolai matematika apparátusával való vizsgálata azt mutatja, hogy a $\frac{d_0}{s_0}$ viszony irracionális.

(c) Ezen apparátus nélkül is megkaphatjuk ezt az eredményt, pl. ha megteremtjük a kapcsolatot azzal a ténnyel (amelyet elemi eszközökkel bizonyítsunk is be), hogy egy pozitív racionális r számra nem lehet $r^2-r=1$.

2F.12 Alkossa meg az $y^2=2px$ egyenletű parabola ($p>0$ a paraméter fele) pontonkénti szerkesztését a gnomón-módszerrel, analógiában a 2.28-ban leírt eljárással!

2F.13 (a) Bizonyítsa be, hogy tetszőleges *a*, *b* szakaszokra *a* mértékszáma *b*-re nézve és *b* mértékszáma *a*-re nézve egymás reciprokai!

(b) Igazolja, hogy a két Dedekind-szelet összegének 2.36 alatti definíciója „értelmes”, vagyis hogy az ott definiált $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ pár valóban Dedekind-szelet a $\mathbb{Q}$-n!

2F.14 (a) Olvassa át újból a 2.33 szakaszt, és értelmezze a Dedekind-féle folytonossági axióma állítását az $\mathbb{R}$-re vonatkoztatva:

Ha a $\mathbb{Q}$ *Dedekind-szeleteit két* (nem-üres) *osztályba soroljuk úgy, hogy az első osztály minden eleme balra van a második osztály minden elemétől (lásd 2.35), akkor létezik egy és csakis egy szelet, amely ezt a kettéosztást* <u>*generálja*</u> (azáltal, hogy ez a pont vagy az alsó szeletek legnagyobbja vagy a felső szeletek legkisebbje)!

(b) Bizonyítsa be ezt az állítást![96]

2F.15 (a) Bizonyítsa be, hogy egy kör valamely belső és valamely külső pontjához illeszkedő egyenesnek vagy körívnek van közös pontja a körvonallal!

(b) Bizonyítsa be, hogy egy háromszög valamely belső és valamely külső pontjához illeszkedő egyenesnek vagy körívnek van közös pontja a körvonallal!

(c) Tanulmányozza az *Elemek* I. 1, I. 21 tételeinek bizonyítását! Hol használja fel Euklidész – hallgatólagosan – az (a) és (b) alatti állításokat?

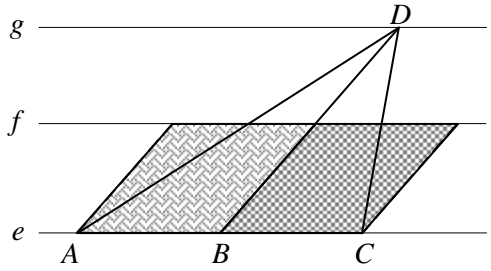
2F.16 (a) Bizonyítsa be az eudoxoszi arányelmélet keretében (de a mai szimbolikával):

Ha egy a, b pár és egy c, d pár egyaránt arányegyenlő ugyanazzal az e, f párral, akkor egymással is arányegyenlők.

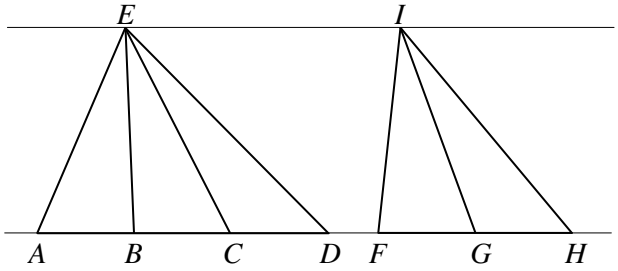
(b) Szükséges-e itt, hogy a három pár egyazon értéktartományból való legyen (vagyis hogy csak szakaszpárokról, vagy csak idompárokról, vagy csak természetes szám-párokról stb. legyen szó)?

(c) Ez a bizonyítás három képletsorban, szöveg nélkül leírható. Az *Elemek*-ben (V. 11) azonban egy teljes könyvoldalra terjed ki a bizonyítás (ábrával). Tanulmányozza Euklidész bizonyítását. Mi okozza ezt a feltűnő terjedelem-különbséget?

2F.17 (a) Legyen $AB = BC$ (2F.17a ábra; *f* az *e*, *g* párhuzamosok felezővonala). Bizonyítsa be, hogy az *ABD*, *BCD* háromszögek átdarabolhatóan egyenlők! (Használja fel az átdarabolhatóság tranzitivitását.)



2F.17a ábra



2F.17b ábra

(b) Tanulmányozza újból a 2.8, 2.17 szakaszokat!

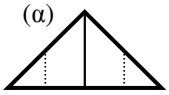
(c) Bizonyítsa be, hogy a 2F.17b ábrán – ahol

$$AB = BC = CD = FG = GH \; -$$

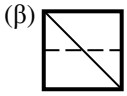
az *ADE*, *FHI* háromszögek „aránya” abban az értelemben $3:2$ (a szintetikus geometriai fogalomkörben), hogy létezik véges sok háromszög, amelyekből mindkettő kirakható úgy, hogy ezek mindegyikéből *ADE*-ben három, *FHI*-ben pedig két példány van.

(d) Mi a lényeges fogalom-szerkezeti eltérés két idomnak a (c)-ben kifejezett kapcsolata és két szakasz azon kapcsolata között, hogy az arányuk $3:2$?

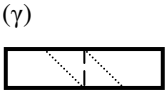
2F.18 (a) Értelmezze a 2F.18 ábrát, amely azt mutatja be, hogy az (α), (γ) idomok *azért*, mert ugyanazzal a (β) idommal átdarabolhatóan egyenlők, egymással is átdarabolhatóan egyenlők!



2F.18a ábra



2F.18a ábra



2F.18a ábra

(b) Mi lehet az alapgondolata *az átdarabolhatóság tranzitivitása* általános bizonyításának?

---

[96] Ezzel – a mai elfogadott kifejezéssel – az $\mathbb{R}$ teljességét bizonyítjuk be.