ELTE TTK Matematikatanítási és Módszertani Központ

Deák Ervin

Kísérő füzetek a „A matematika-tudomány története" c. kurzushoz

1. füzet

Kézirat, 2., javított és bővített változat

2010

0. Előszó

0.1 Mindenekelőtt a matematika-történet bármiféle bemutatásának két koncepcionális sajátosságát említjük meg, hogy ezek tekintetében karakterizálhassuk a kurzusunkat.

(a) A matematika-történeti irodalom sokféle „műfaj”-ban jelenik meg: A monografikus, kimondottan kutatási eredményeket közlő publikációktól a szakmailag igényes „másodlagos” ismertető műveken át a könnyed népszerűsítő irodalomig sok fokozata, változata és átmenete van ennek.

Az itt választott műfaj az *eszmetörténet*. Ez azt jelenti, hogy egy-egy „eszmét” – alapgondolatot, korszakokon átívelő alapproblémát, nagy fogalom-fejlődési ívet – követünk évezredes változásaiban (beleértve a fejlődési visszaeséseket, zsákutcákat is). Minthogy pedig a következő alapeszménél mindig újra a kezdetektől indulunk el, azért ez azt is magával hozza, hogy az egész anyag nem egyetlen, lineáris kronológiai ívbe rendeződik. Ezért ezeknek az íveknek a fokozatos egymásra rakódásából alakulhat ki egy átfogó történeti kép.

(b) Egy egy-féléves, kétórás kurzus rendkívül szűk keretei között csakis valamilyen erőteljes válogatással lehet egy ennyire gazdag területet akár csak megközelítőleg bemutatni. Kívánatos pesze, hogy a válogatás elvszerűen történjék. Ezen kurzus vezérlő „eszméit” egy olyan speciális princípium alapján választottuk, amely a matematikatanár-képzésnek – tulajdonképpen magának az iskolai matematikának – egy fontos, de elhanyagolt aspektusához igazodik.

Az iskolai matematikában – az egész világon, nagyjából hasonlóan – sok olyan következetlenség, logikai hézag, fogalmi zavar van jelen, amelynek nagyon messzire visszanyúló történeti gyökerei vannak. Itt évszázadok óta megkövesedett, nagyon erős tradíciókról, hallgatólagos konvenciókról van szó. (Az oktatás sok résztvevője nincs is ennek tudatában.[1]) Az említett princípium mármost az, hogy éppen ilyen, nagy történeti folyamatokról szóljon az anyag egy-egy fejezete.[2]

Ez tehát a fő vonal, de ennek csomópontjainak környezetében, egyes személyekkel, egyes témákkal, a korszak egyes jellemzőivel kapcsolatban persze más természetű dolgok is szóba kerülhetnek (a törzsszövegben és a lábjegyzetekben egyaránt).

(c) Az anyagban sok olyan ismeretanyag és értékelés van, amely a kurrens irodalomban vagy egyáltalán nem, vagy nem ennyire pregnánsan, vagy csak nehezen összeszedhető, szétszórt részletekben található meg.

0.2 Matematika-tanároknak és leendő matematika-tanároknak egyaránt van egy természetes igénye: Szeretnének olyan matematika-történeti példákat, régi korok feladatait ill. ma is kurrens feladatok régi megoldásait, érdekességeket, anekdotikus részleteket megismerni, amelyekkel az oktató munkájukat színesíthetik, gazdagíthatják, élvezetesebbé tehetik. Ekkor a kiválasztás fő szempontja természetesen az, hogy a feladatok jól és praktikusan beilleszthetők legyenek az iskolai matematika gyakorlatába.[3]

Ennek a kurzusnak nincs és nem is lehetne ilyen szerepe (különben az ilyen szűkreszabott kurzusban igazi történeti áttekintésekre, a matematika-tudomány egyes fejlődési vonalainak bemutatására egyáltalán nem jutna idő és kellő figyelem); ez egyébként műfajilag sem illik a kurzus koncepciójába. (Azt persze nem zárjuk ki, hogy az anyagunk egyes részletei ilyen közvetlen módon is felhasználhatók legyenek.)

Minthogy azonban szerencsére van ennek a területnek olyan, viszonylag könnyen hozzáférhető, magyar nyelvű irodalma, amelyet az érdeklődő és kezdeményező hajlamú tanárok jól tudnak használ-

---

[1] Téma szerint különösen a valós szám fogalmához kapcsolódó területeken működnek ezek a hagyományok (mint magának a számfogalomnak a problémái, a geometriai mértékfogalmak stb.).

[2] Ez bizonyára újdonság nem csak Magyarország, hanem a világ matematika-történeti irodalmában.

[3] Fogalmilag meg kell különböztetni ezt az igényt attól a kérdéstől, hogy miképpen lehetne a matematika történetét a színesítésen, élénkítésen, hangulat-javításon túl szisztematikusan didaktikailag értékesíteni a matematika oktatásában. Az utóbbi fontos kutatási terület, amelynek kiterjedt irodalma van, és az álláspontok több nagy irányzatba rendeződnek. Ennek megismertetéséhez külön kurzusra lenne szükség.

ni, és minthogy amúgy is útmutatást fogunk nyújtani a különböző szintű és különböző célzatú, könynyen elérhető matematikatörténeti irodalom megtalálásához és használatához (az előadásokban és a „füzetekben" egyaránt), azért ebben a keretben az említett igény kielégítését is segíteni fogjuk.

0.3 Puszta rátekintésre is feltűnhet a *lábjegyzetek* – egyetemi tankönyvekben és jegyzetekben talán szokatlan – sokasága. Ennek kétféle célja és rendeltetése van.

Egyrészt lehetővé teszi a tartalom jelentős gazdagítását, olyan részletekkel, leírásokkal és adatokkal is, amelyek a fő vonalba tartoznak, de olyanokkal is, amelyek az abból való kitekintést szolgálják.

Másrészt lehetővé teszi, hogy a füzetek használója az első olvasáskor átugorja a lábjegyzetekbe rendezett tartalmakat, amelyeket majd később, az ismételt olvasásnál – tetszése szerinti válogatásban és sorrendben – részesíthet a figyelmében.[4] Súlyos félreértés lenne azonban azt gondolni, hogy a lábjegyzetek tartalma jelentéktelen vagy mellékes. Itt csupán a használat módjára kívánunk útmutatást adni.

Nem titkolt háttere ennek az a nevelő szándék is, hogy a kurzus résztvevőit az „iskolás" *tanulás* helyett az igazi *tanulmányozás* felé irányítsuk.

0.4 Minden füzet végén *feladatokat* is közlünk. Ezek különböző szintűek és különböző természetűek is. A megszokott számítási, szerkesztési és bizonyítási feladatokon kívül egy kevésbé megszokott „műfaj" is megjelenik itt: olyan feladatok, amelyek egy történetileg fontos szöveg gondos, aprólékos olvasását és értelmezését, a mai gondolkodásmóddal való egybevetését kívánják. Ezt is a *tanulmányozás* világába való bevezetésnek szánjuk.

0.5 Nem véletlen, hanem tudatos elhatározásból fakad, hogy nem követjük az *idegen szavak* elleni dogmatikus felfogást. Szakmai-tudományos szövegben, a pregnáns kifejezés érdekében szükséges ezeket a megfelelő helyen, de mérsékelten használni.[5]

0.6 A matematika-tanárképzős MSC-s hallgatók matematikatudomány-történeti kurzusa nagyon hosszú idő óta az első ilyen (kötelező) kurzus, és ez a 2009/10 tanév I. félévében indul. Természetes, hogy a füzeteket *folyamatos fejlesztéssel* fogjuk javítani és alakítani, amiben nagy szerepe lesz a most induló „első menet" tapasztalatainak.

0.7 Ezeknek a füzeteknek az anyaga nem azonos az előadásokéval; kevesebb is, de több is annál. Nem nyújthatják ui. a szóbeli előadás szabad, sokszor improvizált és élénk elemeit, de jelentősen gazdagíthatják a felhasználható anyagot igen sok olyan részlettel, amelyeket lehetetlen lenne bezsúfolni az előadásokba, és az nem is lenne kívánatos.[6]

Az utolsó füzetben majd különböző regisztereket is közlünk (névmutató, tárgymutató, felhasznált irodalom, ajánlott irodalom).

Reméljük, hogy a kurzus résztvevői valódi „kísérő"-nek fogják tekinteni a füzeteket tartalmas és izgalmas fölfedező utakon.

0.8 Köszönetet mondok *Pintér Mariannának* a kézirat folyamatos, gondos ellenőrző olvasásáért.

---

[4] Érdekes kísérlet azt elképzelni, hogy mennyire nyomasztóvá tenné az olvasást, mennyire elhomályosítaná a felépítést, lehetetlenné tenné a fő vonalak felismerését, ha nem használnánk a lábjegyzet szerkesztési eszközét, hanem ezek szövegét – mindegyiket a megfelelő helyen – a törzsszövegben helyeznénk el.

[5] Hasznos dolog olvasás közben – ha szüséges – olyan segédeszközöket is használni, mint az idegen szavak szótára (könyv, CD-Rom, internet).

[6] Ebben a tekintetben egy matematika-történeti kurzus szükségképpen erősen különbözik bármely matematika-tudományi tárgyú kurzustól.

A pitagorasz-tétel gondolatköre

A ”pitagorász-tételek”, pitagorászi számhármasok, összemérhetőség, váltakozva kivonás és euklidészi algoritmus, irracionalitás

1.1 (a) Az iskolai matematikában általános, hogy „a Pitagorász-tételt” következetesen *egy bizonyos* tételnek tűntetik föl (különböző bizonyításokkal), holott itt valójában egy sok különböző tételből álló gondolatrendszerről van szó.

Ennek az összemosásnak nagyon mély történeti háttere van. A következőkben úgy tekintjük át a tétel-bizonyítás párokat, hogy három szempont szerint osztályozzuk őket.

(b) *Az első osztályozás*: A tétel és a bizonyítás egyaránt lehet szintetikus-geometriai vagy mérték-geometriai[7]; ezek a kombinációk négy típust adnak. Mértékgeometriainak fogunk nevezni minden olyan kérdést, föltevést, állítást és bizonyítást, amely a tiszta geometriai eszközökön kívül használja a valós számtestet is, továbbá azokat a mértékfogalmakat, amelyek értelmében pl.

– minden szakasz mérhető bármely szakasszal (a mértékszám pozitív valós szám), s ennek következtében egy tetszőlegesen választott szakaszra („egységszakaszra”) vonatkoztatva minden szakasznak van számszerű „hossza”;

– minden négyzet és sokféle más síkidom (pl. az iskolai matematikában „idom”-nak nevezett síkbeli ponthalmazok mind ide tartoznak) mérhető bármely négyzettel (a mértékszám pozitív valós szám), és ennek következtében egy tetszőlegesen választott négyzetre („egységnégyzetre”) vonatkoztatva minden ilyen idomnak – az un. mérhető ponthalmazoknak – van számszerű „területe”;

– minden négyzet területe egyenlő a négyzet oldalának (aritmetikai) négyzetével (ha az egységnégyzetet és az egységszakaszt összehangoltan választottuk, vagyis az előbbi az utóbbi fölé emelt geometriai négyzet);

– stb.

A szintetikus geometria nem használ tetszőleges valós számokat és azokra épített mértékfogalmakat (számszerű hosszúság, számszerű terület stb.).[8]

(c) *A második osztályozás*: A szintetikus geometrián belül is különbséget kell tennünk aszerint, hogy a tétel szövege „az átfogó fölötti négyzet egyenlő a befogók fölötti négyzetek együttesével” részében mit értünk „egyenlőség”-en.[9] Ebben a gondolatkörben az ókortól napjainkig két, sokszögekre vonatkozó geometriai relációnak van kiemelkedő jelentősége.

(c_1) Két sokszöget <u>*egymásba átdarabolható*</u>-nak (<u>*az átdarabolás értelmében egyenlő*</u>-nek, <u>*átdarabolhatóan egyenlő*</u>-nek) mondunk, ha „részenként egybevágók”, vagyis, ha az egyik fölbontható véges sok közös belső pont nélküli sokszögre (egyenértékűen: háromszögre) úgy, hogy azokból (pontosan: azokkal egybevágókból) a másik is összeállítható.[10]

---

[7] A mértékgeometriát metrikus geometriának is nevezik olykor (de ezt fogalmilag meg kell különböztetni a „metrikus” szónak pl. a „metrikus tér” terminusban való használatától).

[8] Nagyon fontos tudatosítanunk, hogy a „szintetikus geometria” nem azt jelenti, hogy egyáltalán nem szerepelhetnek számok. A természetes számoknak fontos szerepük van. Egy szakasz n-szerese és n-edrésze, ahol n természetes szám, szintetikus geometriai fogalmak (hiszen tisztán geometriai eszközökkel értelmezhetők), és itt egy bizonyos „algebra” is működik. Ha például $u \oplus v$ -vel jelöljük az u, v kollineáris szakaszok közös belső pont nélküli összeillesztésével (egy-egy végpont ilyen értelmű azonosításával) keletkező szakaszt, akkor

$$n \cdot u \oplus m \cdot u = (n+m) \cdot u, \quad n \cdot u \oplus n \cdot v = n \cdot (u \oplus v) \quad (n, m = 1, 2, ...).$$

[9] A történetileg és az iskolai matematikában is általánosan elterjedt „az átfogó fölötti négyzet területe egyenlő a befogók fölötti négyzetek területének összegével” szöveg csak a mértékgeometriában értelmezhető (hacsak nincs értelmezve valamilyen szintetikus-geometriai „terület”-fogalom; l. (c_1), (c_2).)

[10] A nagyon érzékletes „átdarabolás”, „átdarabolhatóság” kifejezéseket Kárteszi Ferenc prof. honosította meg a magyar matematikai nyelvben. (Németül: Zerlegungsgleichheit, angolul: equivalence by dissection, franciául: égalité par somme, oroszul: равнопоставленность.) Bolyai Farkas, aki a *Tentamen* … című híres művében egy nagyon fontos tételt bizonyított be a sokszögek átdarabolhatóságáról (egyenlő számszerű területű sok-

Egybevágó sokszögek triviálisan az átdarabolhatóság értelmében is egyenlők.

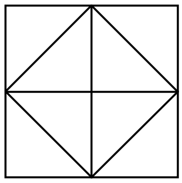
(c_2) Két sokszöget *kiegészítve egymásba átdarabolhatónak* (*kiegészítve-átdarabolhatóan egyenlő*-nek)[11] mondunk, ha átdarabolhatók hozzávételével átdarabolhatókká egészíthetők ki.[12]

Átdarabolhatóan egyenlők triviálisan kiegészítéssel-átdarabolhatóan is egyenlők.

Ezekkel a relációkkal részletesebben is foglalkozunk majd a görög matematikával és a terület-fogalom fejlődésével kapcsolatban.[13]

(d) *A harmadik osztályozás*: Vannak általános ill. korlátozott érvényű – azaz tetszőleges ill. csak bizonyos derékszögű háromszögekre alkalmazható – bizonyítások (amikor is a bizonyított tétel is általános ill. korlátozott érvényű).

1.2 Általánosan jellemző „a Pitagorász-tétel” kezelésére a nagy ókori keleti (indiai egyiptomi, kínai, japán) matematikai kultúrákban, hogy sokszor olyan – nyiltan kimondott, sejtetett vagy hallgatólagosan használt – érvekkel „bizonyították” a tételt, amelyek csak speciális szituációkban működnek, mégis azt sugallják, hogy az így nyert tétel általános érvényű.[14]

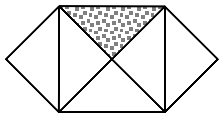


1.2a ábra

A legspeciálisabb eset. Az 1.2a ábra al-Chwarizmi-től való[15]; a speciális tétel szemléletes bizonyítását szolgálja.[16] Ez egyaránt tekinthető átdarabolásos és kiegészítve-átdarabolásos bizonyításnak.

Ugyanez az ábra már egy ős-babiloni forrásban is megjelenik (i. e. 2000 körül).[17] Ez föltehetően az egyenlőszárú derékszögű háromszögre vonatkozó „Pitagorász-tétel”-t mutatja be, bár a hozzáfűzött szöveg kissé rejtélyes, nehezen értelmezhető.

1.3 Feltűnő a Pitagorász-tétel ezen alapesetének a sokszori megjelenése a matematika története folyamán. A geometriai szituáció az egyszerűsége és átláthatósága révén sok laikust is megragadott. Érdekes, hogy egy nagyon neves laikus, a nagy német filozófus Arthur Schopenhauer, akit bosszantott Euklidész pitagorász-tétel-bizonyításának (l. alább 1.8) – amint írta[18] – „gólyalábakon billegő és álnok” volta, az 1.3a ábrát ajánlotta (bizonyára az 1.2a. ábrától ihletve),



1.3a ábra

szögek az átdarabolhatóság értelmében is egyenlők; ennek fordítottja a számszerű terület fogalma szerint triviálisan igaz; l. a 3. füzetben) „végszerű egyenlőség”-nek nevezte az átdarabolhatóság szerinti egyenlőséget.

11 Németül: Ergänzungsgleichheit, angolul: equivalence by completion, franciául: égalité par différence (par adjonction), oroszul: равность по дополнительности.

12 „Hozzávételen” ill. „kiegészítésen” diszjunkt vagy legalább közös belső pont nélküli hozzávétel értendő.

13 A görög matematikában nem adtak külön nevet sem az átdarabolhatóságnak sem a kiegészítve-átdarabolhatóságnak; ennek (negatív) megismerés-fejlődési jelentőségéről a következő füzetben lesz szó.

14 Megjegyzendő, hogy nem is sejthették, *mennyire* nem általános az, amit annak hittek, ha nem ismerték a szakaszok (konkrétan a két befogó) összemérhetetlenségének lehetőségét (amikor is még a „kínai” bizonyítási módszer sem használható; l. alább 1.6, 1.7 és még több helyen).

15 Al-Chwarizmi (780?–850?) az arab matematika korai korszakának kiemelkedő alakja. Úttörő algebrai művének címéből (*aldzsabr almukabala* … = kiegészítés és kiegyenlítés az egyenletátalakításnál) származik az *algebra,* az ő nevéből pedig az *algoritmus* szavunk. Ennek a műnek egy kisebb fejezete geometriai problémákkal is foglalkozik (Euklidész: *Elemek* első két könyvének témáit követve). Itt található a pitagorász-tétel eme legspeciálisabb esetének a fenti szemléletes bizonyítása.

16 Platon a híres *Menon* c. művében (Szokrátész fiktív dialógusa egy képzetlen szolgával Menon meggyőzésére arról, hogy a tanulás – a fölfedezés, megismerés – nem más mint emlékfölidézés az emberi léleknek az emberi élet előtti életéből) ezt a témát („a négyzet megkettőzésének” problémáját) választja a demonstráció konkrét tárgyának. A végkövetkeztetés: a lélek halhatatlansága (amire Platon a későbbi *Phaidon* c. művében is utal).

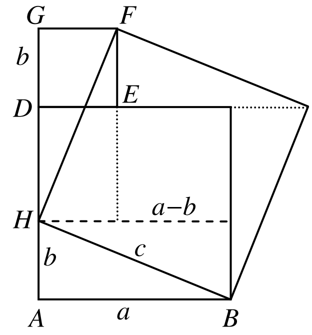
17 A matematika-történetben a „babiloni matematika” szó a szokásos összefoglaló megjelölése Mezopotámia és környéke több évezredes matematikai kultúrájának (beleértve a tulajdonképpeni babiloni kultúrát megelőző sumér-akkád és az azt követő perzsa kultúrát).

18 „A világ mint akarat és képzet” (Die Welt als Wille und Vorstellung) c. híres művében.

amely „az első pillantásra sokkal többet mutat meg ennek a tulajdonságnak a derékszöggel való szükségszerű összefüggéséről”; mindazonáltal tudatában lehetett annak, hogy a két bizonyítás nem egyenértékű, hiszen kifejezte azt a meggyőződését, hogy „bizonyára egyenlőtlen befogók esetére is lehet ilyen szemléletes és meggyőző bizonyítást találni”.

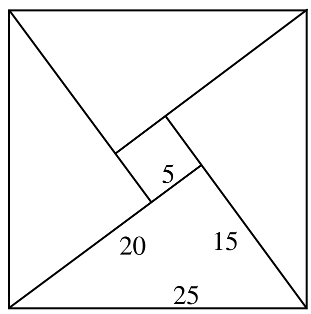
1.4 Az 1.2 alatti legspeciálisabb eset két irányban általánosítható.

Az egyik irányú általánosítással általános érvényű fölismerésekhez jutunk. Itt a vezérlő alapprobléma ez: Van-e olyan négyzet, amely két adott négyzet együttesével „egyenlő”[19], és ha igen, hogyan lehet azt (vagyis az oldalát képviselő szakaszt) megtalálni? (1.2-ben speciálisan két *egybevágó* négyzetnek négyzetben való egyesítéséről volt szó.) Az 1.4a ábra az ókori indiai matematika legfontosabb dokumentumának, a *Sulva-Sûtra*-nak[20] egy szövegrészletét[21] szemlélteti: „Aki két különböző négyzetet kíván egyesíteni, az a két négyzetoldalból létesítsen téglalapot; a téglalapra átlósan kifeszített zsinór lesz az egyesített négyzet oldala.”



1.4a ábra

1.5 „Ha egy derékszögű háromszög befogói 20 és 15, akkor az átfogója 25.” Ennek bizonyítása Bhāskara II[22] Siddhānta-s′iromaṇi c. sokrétű művének Vījaganita című, matematikai tárgyú részében[23] a következőképpen történik. A háromszög területe 150. Ha ennek a háromszögnek négy példányát úgy helyezzük el, ahogyan az 1.5a ábra mutatja, akkor a kialakuló nagy négyzet még egy 5 oldalú, tehát 25 területű négyzetet is tartalmaz, tehát a területe $4 \cdot 150 + 25 = 625$, s ezért az eredeti háromszög átfogója 25.[24]



1.5a ábra

Az ókori matematikai kultúrákban meglehetősen elterjedt volt a Pitagorász-tétel állításának bizonyítása vagy akár csak demonstrálása egyes *pitagoraszi háromszögekre* (vagyis olyanokra, amelyeknek mindhárom oldala összemérhető, azaz pitagoraszi számhármasokkal reprezentálható, mint az előbbi példában a 15, 20, 25 számhármas) külön-külön. (Valójában az ábrából leolvasható, ha *a*-val, *b*-vel és *c*-vel jelöljük nem csak a háromszög oldalait, hanem a hosszukat is, hogy $c^2 = (b-a)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2}$, vagyis $c^2 = a^2 + b^2$, amit ma úgy tekintünk, mint a számszerű – mérték-geometriai – pitagorász-tétel általános érvényű bizonyítását.)

[19] Természetesen a kérdés föltevése akkor lenne korrekt a mai matematika szellemében, ha explicite utalna rá, hogy milyen – mértékgeometriai vagy szintetikus geometriai (s az utóbbi esetben melyik geometriai reláció szerinti) – értelemben kívánjuk az „egyenlőséget”.

[20] A cím, amely „zsinór-szabályok”-at jelent, arra utal, hogy olyan szerkesztési eljárások gyűjteményéről van szó, amelyekben pl. két pontra illeszkedő egyenes helyett a két pont között kifeszített zsinórról beszélnek. Ebben kifejeződik, hogy nem általános elméleti matematikai problémákkal foglalkoztak, hanem nagyon gyakorlati feladatok nagyon gyakorlati megoldásaival. Ezek a feladatok sokszor rituális jellegűek voltak, mint pl. egy négyzet alakú oltár felületének négyzet alakú megkettőzése. (Bizonyára nem független ettől a görög matematika három nagyon híres problémájának egyike, a kocka megkettőzésének feladata.)

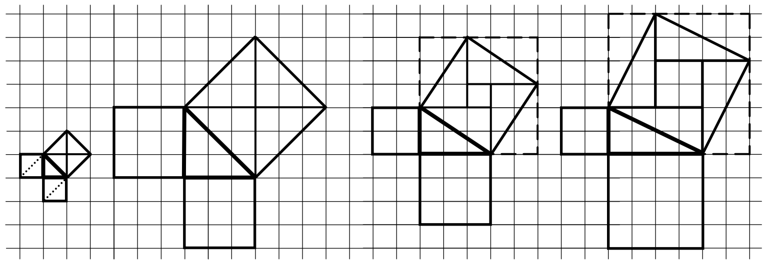
[21] Az archaikus szöveget az érthetőség érdekében kissé korszerűsített fordításban közöljük.

[22] A tudománytörténetben Bhāskara II-ként számontartott szerző 1150 (Bhāskara I 520) körül élt. Ez a mű összefoglalja és rendszerezi az indiai matematikát és annak fő műveit több száz évre visszamenőleg, ezért alkalmas az indiai matematikai gondolkodásmód dokumentálására.

[23] A cím jelentése : a matematika alapjai, de nem a mai értelemben, ui. bīja= mag, sperma.

[24] Ez a szöveg nem szerepel a műben, de bizonyára hűen mutatja a hallgatólagos gondolatmenetet; Bhāskara csupán ennyit fűz az ábrához: ”Lásd!”.

1.6 (a) Az 1.2 alatti alapeset másik irányú általánosítási útja: Olyan derékszögű háromszögek vizsgálata, amelyek *négyzetrácshoz illeszkednek*.[25] Egy négyzetrácshoz illesztett pitagorászi konfigurációkra (az ábrák négy ilyen példát mutatnak) a pitagorász-tétel állítását az átdarabolhatóság értelmében közvetlenül ellenőrízhetjük, vagy akár fölfedezhetjük. (Néhány rácsnégyzetet egészében, a többit földarabolva viszünk át a befogók fölötti négyzetekből az átfogó fölötti négyzetbe.)[26]



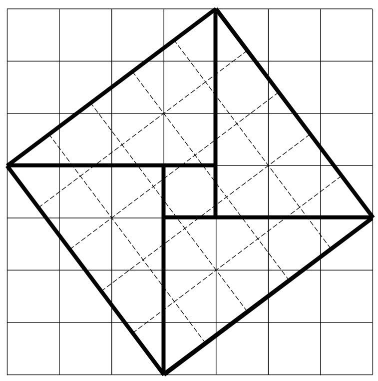
1.6a ábra 1.6b ábra 1.6c ábra 1.6d ábra

(b) Azok a konfiguráció-típusok, amelyeket az 1.6a, 1.6b ill. 1.6c, 1.6d ábrák mutatnak, ismételten fölbukkannak a matematika történetében; meglehetősen régi keletűek.

A legrégebbi előfordulásoknál tk. a három négyzetet kitöltő rácsnégyzetek ill. rácsnégyzet-darabok egyszerű leszámlálásával történik az összefüggés „bizonyítása” – inkább ellenőrzése vagy fölfedezése – konkrét esetekre. Pl. az 1.6d ábránál a befogó-négyzetek összesen $2^2+4^2=20$ rácsnégyzettel vannak kirakva, az átfogó-négyzet pedig $4\cdot\frac{2\cdot 4}{2}+(4-2)^2=20$ rácsnégyzet darabjaival.

Mai szemmel nyilvánvaló, hogy az ilyen konkrét szituációk a közös *algebrai* lényeg fölismerése útján közösen kezelhetők. Történetileg azonban ezt a – nagyon fontos – lépést a matematika korai fejlődésének több száz éves periódusa után tehették csak meg (minden kultúrában).

(c) Például egy kínai dokumentum, amely talán a Han-korszakból (i. e. 206 – i. sz. 221) származik (de biztosan nem későbbi) a Pitagorász-tétel szellemében foglalkozik vele úgy, hogy megmarad a speciális feltevés (a háromszög négyzetrácshoz való illeszkedése) keretei között: A befogók 3 ill. 4, az átfogó pedig 5 rácsszakasznak felelnek meg (1.6e ábra).



1.6e ábra

Az ábrán az átfogó fölötti négyzet „rácsozása” (a rácsnégyzet egybevágó az előző rácséval) csak az eredményt illusztrációja, nem a bizonyítást szolgálja. (A régi kínai matematikai gondolkodás erőteljesen előtérbe állította a számszerűséget, a kiszámíthatóságot.)

Minthogy pedig ez a fajta „speciális Pitagorász-tétel” igen fontos mérföldkő és „vízválasztó” a fogalom-fejlődés követésében – akár a matematika-történeti, akár a matematika-oktatási nézőpontból (l. 1.7, 1.10, 1.11, 1.19) –, külön nevet adunk neki: legyen ez a *kínai Pitagorász-tétel*.

A tétel pontos megfogalmazása (a mai matematika nyelvén) ez: *Ha egy derékszögű háromszög négyzetrácshoz illeszkedik, akkor az átfogó fölötti négyzet átdarabolható annyi rácsnégyzet együttesébe, ahányat a két befogó fölötti négyzetek összesen tartalmaznak.*

[25] Ezen *itt* azt fogjuk érteni, hogy a háromszög csúcsai rácspontok és a befogók rácsvonalakra esnek. (Egyébként másképpen is „illeszkedhet” egy derékszögű háromszög egy négyzetrácshoz.)

[26] Ugyanez átvihető téglalaprácsokra illeszkedő derékszögű – sőt tetszőleges paralelogramma-rácsokra illeszkedő (tehát nem is okvetlenül derékszögű) – háromszögekre (l. az 1F.2 feladatot).

(d) Ezeknek a konfigurációknak a következő algebrai értelmezése lehetséges (és ténylegesen meg is jelenik, amikor valahol a tételt közlik, de most ezt is mai korrekt módon fogalmazzuk meg):

Ha a háromszög *a* befogója ill. *b* befogója α ill. β számú rács-szakaszból áll és $\alpha \le \beta$, akkor az átfogó fölötti négyzet átdarabolható $(\beta-\alpha)^2 + 4\cdot\frac{\alpha\beta}{2}$ számú rácsnégyzet együttesébe, ez pedig annyi rácsnégyzet, amennyit a befogók fölötti négyzetek együttesen tartalmaznak, hiszen $(\beta-\alpha)^2 + 4\cdot\frac{\alpha\beta}{2} = \alpha^2 + \beta^2$.[27]

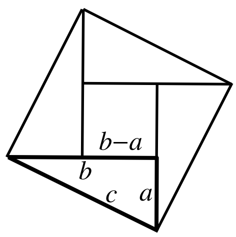
Lényeges, hogy ez az algebrai azonosság itt nincs – a mai értelemben – teljesen kihasználva, hiszen α és β csak pozitív egész értékeket vehet föl. Ez a tétel és a bizonyítása egyaránt a szintetikus geometria keretében marad.

Itt α és β nem-negatív egész számok. Ha $\alpha = \beta$, akkor az ábrából hiányzik az átfogó fölötti négyzet középső, négyzet alakú darabja, vagyis az 1.2 típusú konfigurációról van szó (l. az 1.6b ábrát is), amelynek eszerint általánosítása a kínai pitagorász-tétel.

(e) A „kínai” derékszögű háromszögeken belül tehát nyilvánvalóan el kell különítenünk az egyenlőszáruak osztályát (1.6a és 1.6b ábra). A geometriai konfigurációban itt hiányzik az átfogó fölötti négyzet földarabolásánál a középső kis négyzet. Ebben az esetben is érvényes, hogy a befogók fölötti négyzetekben lévő rácsnégyzetek *darabjaiból* kirakható az átfogó fölötti négyzet, de nem magukból a rács-négyzetekből.

Ilyenkor a befogó és az átfogó törvényszerűen nem összemérhető (l. alább 1.12, 1.24).

1.7 Ha a kínai pitagorász-tétel ábrájából elhagyjuk a négyzetrácsot, az ábra lényegében a 1.7a ábrára redukálódik, amely „a Pitagorász-tétel” egyik – a matematika-történet-ben sokszor visszatérő – „bizonyításának” kísérő ábrája. Például az indiai Vîjaganita című dokumentumban[28] „a Pitagorász-tétel” bizonyítása mindössze ebből az ábrából és a „Lásd!” szóból áll.



1.7a ábra

A háttérben csak ugyanaz az azonosság állhat, amelyet a kínai Pitagorász-tétellel kapcsolatban már említettünk (1.6(d)). Mai mértékgeometriai tudásunk alapján ez korlátozás nélküli, általános bizonyítása a mértékgeometriai tételnek, de az indiai matematika 12. századi szintjén ilyen módon – a mai matematikából visszatekintve – csak a pitagoraszi számhármasoknak megfelelő derékszögű háromszögekre adódik a tétel.[29]

---

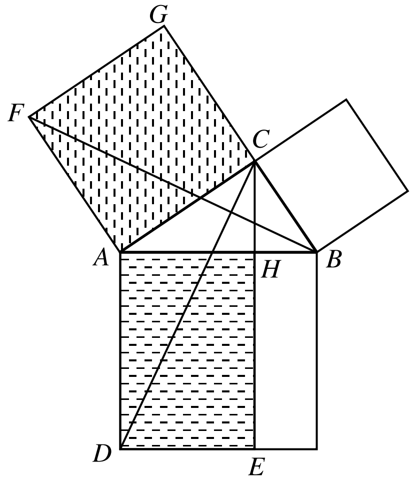
[27] A tulajdonképpen fölösleges $\alpha \le \beta$ föltevésnek itt az a szerepe, hogy a megfogalmazás olyan régi korok matematikusai számára is „elviselhető” legyen, akik az aritmetikában és az algebrában még nem fogadták be a negatív számokat a „számok” közé (és akiket egyáltalán nem nyugtatná meg, hogy itt $\beta-\alpha$ a négyzeten szerepel). Az ókori és az európai középkori matematikai kultúrák mind ilyen jellegűek.

[28] Szerzője Bhāskara II (sz. 1114-ben); l. még 1.5.

[29] Ezt a dolgot bonyolítja az átdarabolhatóság „szigorú monotonitásának” problémája. (Biztos-e, hogy egy olyan négyzetnek, amely 25 egységnégyzet együttesébe átdarabolható, az oldala az 5 szakasz?) Lásd még 1.21(b_2)-t és a 2. füzetet.

1.8 Igen nevezetes (és igazán szép) a Pitagorász-tétel Euklidész-féle bizonyítása a befogótételen át. (Elemek I. 47).

Abban az időben – sőt bizonyára már a pitagoreusok körében – ismeretes volt (akár a mai iskolai matematikában) a pitagorasz-tételnek az a bizonyítása, amely az eredeti derékszögű háromszögnek (az átfogóhoz tartozó magasság által) két vele hasonló derékszögű háromszögre bontásán és az ebből származó oldalarány-egyenlőségeken alapul. Ezek azonban mértékgeometriai eszközök. Euklidész talán érezte, hogy az *Elemek* I. könyvében nem lenne helyénvaló az ilyen bizonyítás.[30] Igaz, hogy az V. könyvben következett az Eudoxosz-féle – tisztán geometriai, az összemérhetőség–összemérhetetlenség súlyos problémáját megkerülő – zseniális arányelmélet kifejtése[31], de a pitagorász-tételre az I. könyvben volt szükség , és ezért itt Euklidész egy „aránymentes” bizonyítást használt (1.8a ábra).



1.8a ábra

A bizonyítás fő eszköze az a tétel (I. 41), hogy ha egy paralelogramma és egy háromszög alapja is és magassága is ugyanaz, akkor a paralelogramma „egyenlő” a háromszög kétszeresével (ui. azonos alapú és ugyanakkor azonos magasságú paralelogrammák „egyenlők”[32]). Így a közös *AD* alapú és közös *DE* magasságú *ADC* háromszög és *ADEH* téglalap kapcsolata: a téglalap „egyenlő” a háromszög „kétszeresével”. Ugyanezen okból ugyanez mondható az *FACG* négyzet és az *ABF* háromszög kapcsolatáról. Minthogy pedig ez a két háromszög egybevágó, a mondott téglalap és négyzet „egyenlő”.

Ez a befogótétel az *ABC* derékszögű háromszög *AC* befogójára vonatkoztatva. Ha ezt összekapcsoljuk a másik befogóra vonatkoztatott befogótétellel, adódik *ABC*-re „a” Pitagorász-tétel.

[30] Az akkori matematikában (és még sok-sok évszázadon át, az iskolai matematikában pedig mind a mai napig) – sem a fogalmi gondolkodásban, sem nyelvileg – nem különböztetik meg világosan és határozottan a szintetikus geometriát és a mértékgeometriát.

[31] Ezzel egy későbbi füzetben részletesen foglalkozunk majd.

[32] I. 35, 36. Lásd ezzel kapcsolatban az 1F.1 feladatot.

1.9 (a) *Pitagorászi számhármasok*nak nevezzük az olyan a, b, c természetes szám-hármasokat, amelyekre $a^2 + b^2 = c^2$, amelyek tehát „*pitagorászi háromszögek*-nek” felelnek meg.[33] Jól ismerjük az összes ilyen számhármas megtalálására szolgáló következő algoritmust: Legyenek $x, y, k \in \mathbb{N}$ és $x > y$. Ekkor

$$a = k(x^2 - y^2),\ b = 2kxy,\ c = k(x^2 + y^2)$$

az összes pitagorászi számhármas. A táblázatban szisztematikusan fölsorolunk néhányat, a származtatásukkal együtt.

k	*x*	*y*	***a***	***b***	***c***
1	2	1	**3**	**4**	**5**
1	3	1	**8**	**6**	**10**
1	3	2	**5**	**12**	**13**
1	4	1	**15**	**8**	**17**
1	4	2	**12**	**16**	**20**
1	4	3	**7**	**24**	**25**
1	5	1	**24**	**10**	**26**
1	5	2	**21**	**20**	**29**
…	…	…	**….**	**….**	**….**

Valójában a k tényezőt el is hagyhatjuk ezekből a formulákból. Az

$$a = x^2 - y^2,\ b = 2xy,\ c = x^2 + y^2$$

formulák ugyanis biztosan szolgáltatják az összes *alaphármast*.[34]

(b) Vannak – és történetileg relevánsak – olyan formula-hármasok is, amelyek nem az összes, hanem *bizonyos* pitagorászi számhármasok előállítására szolgálnak.

Egy nevezetes példa: Brahmagupta[35] a Brâhma-sphuta-siddhânta c. asztronómiai művében (i. sz. 628) egy aritmetikai és egy algebrai fejezet is van. Ebből idézzük föl a következő algoritmust pitagorászi számhármasok megtalálására. Legyen a tetszőleges természetes szám,

$$d < a,\ d \mid a^2,\ b = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^2}{d} - d\right) \text{ és } c = b + d.$$[36]

Könnyen ellenőrizhető, hogy ekkor $a^2 + b^2 = c^2$. Ha itt b és c egész számoknak adódnak, akkor a, b, c egy pitagorászi számhármas; ellenkező esetben b és c egyaránt egész szám fele, ekkor pedig $2a$, $2b$, $2c$ lesz pitagorászi számhármas.

Például, ha $a = 12, d = 2$, akkor $b = 35, c = 37$ adódik.[37]. Minthogy Brahmagupta említett műve „alapműnek” számított, későbbi kommentátorok további példákat számítottak ki ezzel az eljárással.

---

[33] A pitagorász-tétel megfordítása szerint ekkor van olyan derékszögű háromszög, amelynek mindhárom oldala összemérhető, és van olyan közös mértékük, hogy a megfelelő mértékszámok a, b és c. (Ezek a „pitagorászi háromszögek”.) A pitagorász-tétel megfordítását Euklidész az *Elemek*ben bizonyította (I. 48.). Korábban – a különböző matematikai kultúrákban – a tétel és a megfordítása gyakran összefonódva, világos logikai megkülönböztetés nélkül jelent meg. A fordított tételnek a gyakorlati matematikát előtérbe helyező kultúrákban különös jelentősége az, hogy pitagorászi számhármasok felhasználásával lehetővé teszi derékszög kitűzését. A *számelméleti* érdekességen túl talán ez magyarázza a pitagorászi számhármasok (nem okvetlenül mindegyik) megtalálására szolgáló algoritmusok népszerűségét ezekben a korai kultúrákban.

A pitagorászi háromszögek *geometriai* jelentősége nem merül ki a derékszög kitűzésének *gyakorlati* feladatában. *Elméletileg* legalább ilyen fontos a fogalomépítkezési szerepük. Ezek ui. azok a speciális derékszögű háromszögek, amelyeknél az átdarabolásos pitagorász-tétel úgy is realizálható, hogy a „darabok” egyrészt négyzetek, másrészt egybevágók is. A tetszőleges derékszögű háromszögre vonatkozó átdarabolásos pitagorász-tételnél mindkét előnyről le kell mondani. A matematika fejlődésének babiloni–görög vonulatában nem jelent meg ez az éles fogalmi megkülönböztetés, és ez a rossz hagyomány tovább él ma is a matematika-oktatásban.

[34] Ha egy pitagorászi számhármast végigszorzunk egy természetes számmal, újra pitagorászi számhármast kapunk. Ha egy pitagorászi hármasnak van közös valódi osztója, akkor ezzel végigosztva is újra pitagorászi hármast kapunk. *Alaphármasnak* nevezzük az olyan pitagorászi számhármast, amelyet nem lehet „egyszerűbb”-re visszavezetni (vagyis a három számnak nincs közös valódi osztója). Minden pitagorászi számhármas származtatható egy alaphármasból egy természetes számmal való végigosztással.

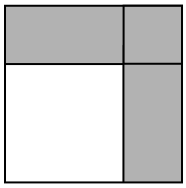
[35] Igen híres indiai csillagász és matematikus (sz. 598).

[36] Brahmagupta nem említi az elengedhetetlen $d < a$, $d \mid a^2$ feltételeket.

[37] Ez – és még több más példa – Bhāskara II Lîlavâtî c. művében (1150) szerepel. Más indiai kommentátorok is közöltek konkrét példákat.

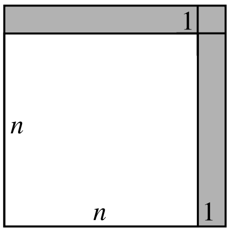
(c) A következőkben olyan párhuzamos tárgyalásban mutatunk be három pitagorászi számhármas-képletrendszert (két részlegest és egy átfogót), amely jól idézi a görög matematika – közelebbről a görög geometriai algebra – szellemét.

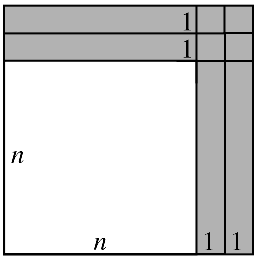
Abban a kultúrában a legtermészetesebb dolog volt, hogy a szóban forgó három négyzetszám közül a legkisebbet és a legnagyobbat egy-egy geometriai négyzet területének tekintjük[38], és e négyzeteket úgy helyezzük el, ahogyan az 1.9a ábra mutatja. Ekkor e két négyzet „különbsége” az ábrán satírozással jelzett idom, amelyet a görög matematikában <u>*gnomón*</u>-nak neveztek. Ez ugyanis – mai fogalmainkkal leírva – két olyan perspektivikusan hasonló sokszög "különbségét” jelentette, amelyeknek egy közös csúcsa a hasonlósági pont.

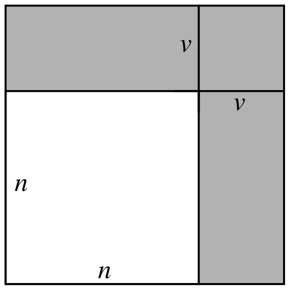

1.9a ábra

(A gnomónok fontos szerepéről és leggyakrabban szereplő fajtáiról lásd a 2. füzetet.)

(d) A következő három változatban[39] a gnomón „szélessége” 1, 2 ill. tetszőleges v természetes szám. Ennek megfelelően az 1. és a 2. változat részleges, a 3. viszont átfogó megoldáshoz vezet.

<table>
<tr><th>1.</th><th>2.</th><th>3.</th></tr>
<tr><td>

1.9b ábra</td><td>

1.9c ábra</td><td>

1.9d ábra</td></tr>
<tr><td>$n^2,\ \underbrace{2n+1}_{gnomón},\ (n+1)^2$</td><td>$n^2,\ \underbrace{4n+4}_{gnomón},\ (n+2)^2$</td><td>$n^2,\ \underbrace{2vn+v^2}_{gnomón},\ (n+v)^2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Ha azt akarjuk, hogy a gnomón is „négyzet” legyen, n-et úgy kell választani, hogy valamely u számra</td></tr>
<tr><td>$n=\frac{u^2-1}{2}$,</td><td>$n=\frac{u^2-4}{4}$,</td><td>$n=\frac{u^2-v^2}{2v}$,</td></tr>
<tr><td colspan="3">Legyen, amikor is ez a pitagorászi számhármas adódik:</td></tr>
<tr><td>$\frac{u^2-1}{2},\ u,\ \frac{u^2+1}{2}$</td><td>$\left(\frac{u}{2}\right)^2-1,\ u,\ \left(\frac{u}{2}\right)^2+1$</td><td>$\frac{u^2-v^2}{2v},\ u,\ \frac{u^2+v^2}{2v}$
ill. (garantáltan egész számokban)
$u^2-v^2,\ 2uv,\ u^2+v^2$,</td></tr>
<tr><td colspan="3">amennyiben</td></tr>
<tr><td>u páratlan term. szám.</td><td>u páros term. szám.</td><td>$u > v$, *u, v term. számok*.</td></tr>
</table>

---

[38] Ez akkor válik teljesen világossá, ha meggondoljuk, hogy egy pitagorászi számhármas bármely két száma különböző. Valóban: $x^2 + y^2 = y^2$ nyilván lehetetlen, de $x^2 + x^2 = z^2$ sem fordulhat elő: geometrialag azért, mert bármely egyenlőszárú derékszögű háromszög befogója és átfogója nem-összemérhető; aritmetikailag azért, mert négyzetszám kétszerese nem lehet négyzetszám (v. ö. alább (e)-vel).

[39] Ezt az egységes vezérfonalú, de hármas tagoltságú áttekintést (amelynek vezető gondolata teljesen a pitagoreus számelmélet szellemében fogant) H. G. Zeuthen klasszikus, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter* (1896) c. műve nyomán (40–43 oldalak) idézzük föl, de a párhuzamosságokat jobban kiemelő táblázatos elrendezésben.

(Lásd az 1F.15(b), (c) feladatokat!)

(e) Proklosz[40] az Elemek I. könyvéhez írt kommentárjaiban (a kommentárok 4. könyvében, az Elemek I. 47 tételéhez – vagyis a Pitagorász-tételhez – fűzött elemzésben) a pitagorászi számhármasokkal kapcsolatban mindenekelőtt azt említi, hogy pitagorászi háromszög nem lehet egyenlőszárú (ui. egy négyzetszám nem lehet egy négyzetszám kétszerese). A nem-egyenlőszárú derékszögű háromszögek között (amelyeknek tehát a két befogója különböző) azonban vannak pitagorászi háromszögek. Ilyen pl. a 3, 4, 5 számhármasnak megfelelő háromszög[41]. A továbbiakban pedig két eljárást ismertet pitagorászi számhármasok előállítására; az egyiket Platonnak, a másikat Pitagorásznak tulajdonítja. Végül Euklidésztől fölidéz egy harmadikat.

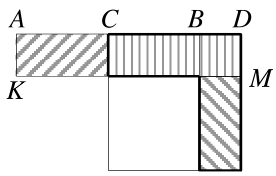
(e_1) *Pitagorász* a páratlan számokból indul ki. Ha a tetszőleges páratlan (természetes) szám (az egyik „befogó”), akkor $b = \frac{1}{2}\cdot(a^2-1)$ (a másik „befogó”) és $c = b+1$ (az „átfogó”) lesz a pitagorászi számhármas másik két tagja. (Például $a = 3$ -ból így származik a 3, 4, 5 számhármas.) *Ez az eredmény megegyezik a (d) alatti 1. változattal.*

(e_2) *Platon* viszont a páros számokból indul ki. Ha a (az egyik „befogó”) tetszőleges páros szám, akkor $b = \frac{a^2}{4} - 1$ (a másik „befogó”), $c = \frac{a^2}{4} + 1$ (az „átfogó”) lesz a pitagorászi számhármas másik két tagja. (Példák: $a = 8$ -ból kiindulva a 15, 8, 17 pitagorászi számhármast nyerjük Platon módszeré-vel, $a = 6$ -ból pedig a 6, 8, 10 hármast; v. ö. az … alatti táblázattal).[42] *Ez megegyezik a (d) alatti 2. változattal.*

(e_3) *Euklidésznél* megtaláljuk a 3. változat eredményét, a következő geometriai köntösbe burkolva (*Elemek* X. 29, 1. lemma).

Ha az 1.9e ábrán C az AB szakasz középpontja, D egy tetszőleges pontja az AB B-ntúli meghosszabbításának, akkor

$$|AD|\cdot|BD| = |CD|^2 - |CB|^2 .^{43}$$



1.9e ábra

Úgy is mondhatjuk ezt, hogy az AM téglalap területegyenlő a vastagabb vonallal határolt gnomónnal, vagy – az

$$|AD| = g,\ |BD| = h,\ |CB| = |AC| = x,\ |CD| = z$$

jelölésekkel –

$$gh = z^2 - x^2 .$$

Ha azt akarjuk, hogy a szakaszok mértékszámai mind egészek legyenek, akkor mindenekelőtt g-nek és h-nak egyező párosságúnak kell lennie (hogy $g - h = 2x$ páros lehessen). Mármost a gnomón mértéke, a gh szorzat pontosan akkor négyzetszám, ha

---

[40] Proklosz Diadokhosz (410-485) görög filozófus és asztronómus. Műveinek – köztük Platonhoz és Arisztotelészhez írt kommentárjainak – egészen a Reneszánszig jelentős befolyása volt. Matematikatörténeti szempontból igen jelentős az Euklidész Elemei I. könyvéhez fűzött (és kb. tízszer akkora terjedelmű) kommentárjait tartalmazó műve (latin címe: In primum Euclidis elementorum librum commentarii), amelyben az Euklidész-könyvet nagyon részletesen, a filozófiai-fogalmi-strukturális-történeti szempontok különös figyelembe vételével elemzi. (Ennek egészen a 20. századig születtek különböző nyelvű kiadásai; a hivatkozásaink egy 1945-ös német nyelvű, a kommentárokat is gazdagon kommentáló és a művet több terjedelmes tanulmánnyal kísérő kiadásra utalnak).

[41] Ezt Proklosz Platon „Az állam” c. művéből (VIII, 546c) idézi (bár az a szövegrész – egy példázat – meglehetősen homályos, nehezen értelmezhető).

[42] Proklosz idézett műve az Elemek I. könyvéről szól. Az Elemek X. könyvének 28a paragrafusa azonban egy olyan lemmát is tartalmaz, amely a pitagorászi számhármasoknak egy általános formuláját tartalmazza, és ennek speciális eseteiként kaphatjuk a pitagorászi és a platoni formulát.

[43] Ez a tétel a görög geometriai algebrának a „területillesztésekkel” kapcsolatos ágának (amellyel a 2. füzetben részletesen foglalkozunk majd) úgyszólván a kiindulópontja.

$$g = ku^2,\ h = kv^2$$

valamely *u*, *v*, *k* természetes számokra[44], vagyis

$$x = |CB| = k \cdot \frac{u^2 - v^2}{2},\ y = k \cdot uv,\ z = |CD| = k \cdot \frac{u^2 + v^2}{2}$$

a pitagorászi számhármasok általános képletrendszere (ahol *k* tetszőleges természetes szám, *u* és *v* egyező párosságúak és $u > v$).

(f) A pitagorászi számhármasok témakörében tehát megjelenik a geometriai algebra mindkét ága; az is, amelynek tárgya a poligonális számok – háromszögszámok, négyzetszámok stb. – világa[45] (l. az 1F.15(d) feladatot), és az is, amely a másodfokú egyenletek típusok szerinti kezelésének megfelelő területillesztési problémákon át a kúpszeletek értelmezéséhez és elméletéhez vezetett (l. a 2. füzetet).

(g) Pitagorászi számhármasokat már a régi babiloni kultúrában – és más antik kultúrákban – is ismertek, és ezeknek az ismereteknek a pitagoreusok is a birtokában voltak. A pitagoreusok korszakfordító teljesítménye ezen a területen azonban az volt, hogy egyrészt

– fölfedeztek akárhány ilyen számhármas előállítására alkalmas algoritmusokat[46],

másrészt

– fölfedezték, hogy nem csak a pitagorászi háromszögekre, sőt nem csak a „kínai” háromszögekre, hanem *minden* derékszögű háromszögre érvényes a pitagorász-tétel valamely – nem is egyféle – *geometriai* értelemben.

A görög matematika – egyebek mellett – ezzel is döntő lépést tett a mai értelemben vett matematikai gondolkodás felé.

1.10 Az alábbi táblázat a „kínai háromszögek”, az „átdarabolás-kirakás” és a „pitagorászi háromszögek” témák összefoglaló, komplex áttekintését nyújtja.

A „kínai” (derékszögű) háromszögek (a befogók összemérhetők); A befogók fölötti négyzetek kirakhatók a rácsnégyzet példányaival; az átfogó fölötti négyzet átdarabolható a befogók fölöttiek együttesébe	
(A_1) Egyenlőszárúak (a befogók egyenlők)	(B_1) Az átfogó fölötti négyzet nem rakható ki a rácsnégyzet példányaival (*)
(A_2) Nem egyenlőszárúak (a befogók nem egyenlők)	(B_2) Az átfogó fölötti négyzet is kirakható a rácsnégyzet példányaival (nem kell azokat földarabolni); Pitagorászi háromszögek ill. számhármasok (**); mindhárom oldal összemérhető
(*) Lásd az 1.6a–1.6d ábrákat; (**) lásd az 1.6e ábrát.	

1.11 (a) A nem-egyenlőszárú „kínai” háromszögekre vonatkozó pitagorász-tétel „kínai” bizonyítása (l. 1.6) voltaképpen szintetikus geometriai (átdarabolásos) bizonyítás, amely négyzetrácshoz van kötve.[47] Az ilyen bizonyítás tehát nem általános érvényű, hiszen csak akkor alkalmazható, ha vagy előre megadott négyzetrácshoz illesztünk derékszögű háromszöget, vagy a kérdéses derékszögű háromszöghöz keresünk alkalmas négyzetrácsot. Mindenképpen pontosan azokról a derékszögű háromszögekről van szó, amelyeknek a befogói összemérhetők. Ebben az esetben a pitagorász-tétel állításának – a befogó-négyzetek együttese és az átfogó-négyzet „egyenlőségének” – számszerű kifejezést

[44] Lásd az 1F.15(e) feladatot!

[45] Itt a „négyzetszám” szónak a „négyzet” komponense a *geometriai* négyzetre utal, bár az ilyen számok az aritmetikai értelemben is „négyzetszámok”; ez az aritmetikai műszó éppen azt mutatja, hogy a fogalom fejlődési útvonala a geometriából indult ki.

[46] A korábbi kultúrákban nem csak ez a fölfedezés hiányzott, de ennek igénye sem merülhetett föl, hiszen ezek a matematikai kultúrák gyakorlat-orientáltak voltak, és a gyakorlat szempontjából nem volt jelentősége, hogy egyáltalán létezik-e végtelen sok ilyen számhármas ill. hogy miként lehet *az összeset* „előállítani”.

[47] Említettük már (l. 1.7), hogy *mértékgeometriai* bizonyítás négyzetrács nélkül is adódik ugyanabból az ábrából (vagyis az átfogó-négyzetnek ugyanabból a fölosztásából).

lehet adni (természetes számokról van szó): A szóban forgó három négyzet mindegyikét egy olyan négyzettel ill. annak darabjaival „mérhetjük", amelynek az oldala közös mértéke a két befogónak.

(b) Szintetikus geometriai – átdarabolásos és kiegészítve-átdarabolásos) bizonyítások viszont tetszőleges derékszögű háromszögekre vannak.

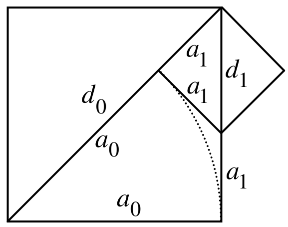
(c) Ha (a)-t és (b)-t egybevetjük, akkor a következő természetes kérdések merülnek föl.

(c_1) Léteznek-e egyáltalán olyan derékszögű háromszögek, amelyekre a kínai bizonyítás nem alkalmazható? Minthogy tetszőleges befogó-szakaszokhoz tartozik derékszögű háromszög, a tulajdonképpeni – és nem a pitagorász-tétel gondolatköréhez kötött, hanem nagyon általános – kérdés az, hogy *léteznek-e nem-összemérhető szakaszpárok?*

(c_2) Amennyiben léteznek összemérhetetlen szakaszok, úgy azt kell kérdeznünk magunktól, hogy *az ilyen befogókból épített derékszögű háromszögekre is lehet-e valamilyen „számszerű" értelmezést adni a pitagorász-tétel állításának?*

1.12 (a) Az 1.11(c_1) kérdés eldőlt – mégpedig „kedvezőtlenül" – az összemérhetetlen szakaszpárok létezésének a pitagoreusok általi fölfedezésével.

Lehetséges, hogy ez a négyzet oldala és átlója (más szóval: az egyenlőszárú derékszögű háromszög befogója és átfogója) összemérhetetlenségének fölismerése útján történt, de az is, hogy a szabályos ötszög oldalának és átlójának összemérhetetlensége volt az első fölismert konkrét formája ennek a megrendítő fölfedezésnek (1.15). Bemutatjuk az előbbinek egy – indirekt – bizonyítását. Ez nem idézet valamely eredeti forrásból, hanem a részleteiben korhű rekonstrukció, amelyet H. Rademacher és O. Toeplitz *Von Zahlen und Figuren* („Számokról és alakzatokról") c. könyvéből veszünk át[48], de némileg átalakítva, bővítve (azért, hogy bizonyítás minden egyes fázisa a görög matematikának olyan integráns fogalmait, eljárásait, gondolkodási mintáit tükrözze, amelyeket amúgy is be akarunk mutatni ebben a füzetben).



1.12a ábra

(b) Az 1. fázis: A kiinduló négyzet a_0 oldalát levonva a d_0 átlóból, az a_1 maradék-szakasz fölé emelt következő – a_1 oldalú és d_1 átlójú – négyzet az 1.12a ábra szerint helyezkedik el. Az a_2 oldalú és d_2 átlójú négyzetet ugyanúgy származtatjuk az 1 indexűből, mint az utóbbit a 0 indexűből stb. Így négyzeteknek egy végtelen sorozatát nyerjük.

$d_0 - a_0 = a_1$ $a_0 - a_1 = d_1$	$a_1 < \frac{a_0}{2}$	$d_1 < \frac{d_0}{2}$
$d_1 - a_1 = a_2$ $a_1 - a_2 = d_2$	$a_2 < \frac{a_1}{2}$	$d_2 < \frac{d_1}{2}$
. . . .	. . .	. . . .
$d_n - a_n = a_{n+1}$ $a_n - a_{n+1} = d_{n+1}$	$a_{n+1} < \frac{a_n}{2}$	$d_{n+1} < \frac{d_n}{2}$
. . . .	. . .	. . . .

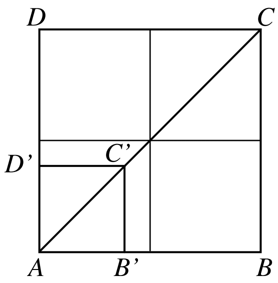
(c) A 2. fázis. Ha a_0-nak és d_0-nak lenne m közös mértéke (ez az indirekt föltevés), akkor az közös mértéke lenne a_1-nek és d_1-nek is (lásd a táblázat első oszlopának első sorát), így a 0 indexű négyzet mellett az 1 indexű négyzet is olyan lenne, hogy az oldalának és az átfogójának közös mértéke ugyanaz az m szakasz. Ezt az eljárást ismételve látszik, hogy a négyzet-sorozat minden eleme ugyanilyen.

(d) A 3. fázis. A sorozatban a négyzet-oldalak és az átlók egyaránt egyre kisebbek; ha kisebbé válnak, mint m, akkor ellentmondáshoz jutunk, s ezzel az indirekt bizonyítás „befejeződött". (A bizonyítás népszerűbb leírásaiban olykor körülbelül itt szokás megállni.)

[48] Magyarul könnyen hozzáférhető leírás található B. L. van der Waerden magyarul *Egy tudomány ébredése* c. megjelent könyvében (206–209). Ez szűkebb, mint akár a Rademacher-Toeplitz-féle, akár az itteni; másrészt kiegészül annak mély és részletes elemzésével, hogy miért lehet föltételezni a (b) alatti kiindulást a görög matematikában. Sain Márton *Nincs királyi út*! c. könyvében (98. o.) szintén ismerteti ezt a bizonyítást, de átugorva az (e)(f) fázist (és nem említi, hogy ez a bizonyítás – Rademacher-Toeplitztől eredő rekonstrukció, amit a pitagoreusoknak *lehet tulajdonítani*).

Valójában azonban, minthogy nem tudjuk, hogy mekkora az m szakasz, azt kell még belátni, hogy ebben a négyzet-sorozatban az átló és oldal különbségéből származó maradék-szakaszok (mint a kezdő lépésben a CE) tetszőlegesen – vagyis *bármely* adott szakasznál, így a föltételezett m szakasznál is – kisebbé válnak.[49]

(e) A görög matematika szellemében – mindenesetre mértékgeometriai eszközök nélkül – ez a következőképpen látható be. Minthogy $d_1 > a_1$, azért $a_1 < \frac{a_0}{2}$, amiből $d_1 < \frac{d_0}{2}$ is következik[50]; ez pedig ugyanígy ismétlődik a négyzet-sorozat minden elemére, vagyis a sorozatban a második négyzettől kezdve mindegyiknek az oldala ill. átlója kisebb, mint az előző négyzet oldalának ill. átlójának a fele (l. a táblázat 2. és 3. oszlopát).[51]



1.12b ábra

(f) Ma azt mondjuk erre, hogy a sorozat k-adik négyzetének oldala ill. átlója kisebb mint $\frac{1}{2^k}\cdot a_0$ ill. $\frac{1}{2^k}\cdot d_0$, és minthogy $\frac{1}{2^k}\to 0 \ (k\to\infty)$, azért a négyzet-oldalak és az átlók egyaránt tetszőlegesen kicsivé válnak.)

(g) A görög gondolkodásmód azonban itt természetesen az Eudoxosz-féle axiómára vált át, amely – eredeti formájában – így szól: *Ha adva van két nem egyenlő mennyiség, és a nagyobból levonunk a felénél többet, és így tovább, akkor egy olyan mennyiség fog megmaradni, mely kisebb az adott mennyiségek kisebbikénél.* Így hát a_0-ra és m-re ill. d_0-ra és m-re alkalmazva ezt az axiómát (d) értelmében elérkeztünk a várt ellentmondáshoz.

1.13 Az 1.12 alatti bizonyítás két fázisáról, (g)-ről és (c)-ről, külön is szólnunk kell.

Ami (g)-t illeti. A dőlt betűs szöveget az Elemek-ből idéztük, ahol *tételként* szerepel (X. könyv 1. tétel), mégpedig a ma (de csak a 19. század óta) „*arkhimédészi axiómának*” nevezett állításból levezetve, amelyet ma így fogalmazunk: *Két mennyiség (két szakasz vagy két pozitív szám) közül bármelyiknek van olyan – pozitív-egész-szeres – többszöröse, amely nagyobb a másiknál.* (Valójában a két állítás ekvivalens.)[52]

Az eudoxoszi axióma mai – pontosabb – fogalmazásban így szól: *Ha egy mennyiségnek legalább a felét levonjuk, a maradékkal ugyanezt tesszük, és ezt eléggé sokszor ismételjük, akkor tetszőlegesen kicsiny – vagyis bármely adott mennyiségnél kisebb – mennyiséghez jutunk.*

Ez az euklidészi geometriának az Euklidész utáni logikai kitisztulási folyamatában[53] az axiómarendszer integráns részévé vált (igaz, hogy inkább az „arkhimédészi axióma” formájában), de már a görög matematika egész korszakában a mai szóval konvergencia- ill. folytonossági problémák kezelésének fő eszköze volt.[54]

---

[49] Ezzel analóg szerkezetű a szabályos ötszög oldala és átlója összemérhetetlenségének bizonyítása.

[50] Lásd az 1.12b ábrát: Ha $AB' < \frac{AB}{2}$, akkor $AC' < \frac{AC}{2}$.

[51] Az említett Rademacher–Toeplitz-könyvbeli leírásban a bizonyításnak ez a fázisa elnagyolt; nem használják fel az Eudoxosz-axiómát (pedig, ha a görög matematikusok így bizonyították *volna* a négyzetátló és -oldal összemérhetetlenségét – ami nincs kizárva! – akkor csakis azt használhatták).

[52] Mindkét axióma természetével,szerepével és jelentőségével még többször fogunk foglalkozni a következő füzetekben is.

[53] Ez a folyamat a 19. század végén Hilbert már említett művében az „euklidészi geometria” modern logikai követelményeknek eleget tevő axiómarendszerének megalkotásában kulminált.

[54] Eudoxosz (i. e. 400–347?) asztronómus, matematikus, geográfus, filozófus, politikus. Csillagászként az első ismert geocentrikus világmodellt alkotta meg (köralakú bolygópályákkal a Föld körül); ez igen hosszú ideig (a reneszánsz koráig) mintául szolgált a hasonló modellekhez, amelyekben több tekintetben finomították és korrigálták az eudoxoszi elképzelést. Eredeti művei nem maradtak fenn, de matematikai eredményei mások beszámolóiból, hivatkozásaiból (főleg Arkhimédész műveiben és Euklidész Elemeihez fűzött kommentárokban) rész-

1.14 (a) Az 1.12(c) alatti eljárásról is külön szólunk, mert ez matematikailag és matematika-történetileg is nagy jelentőségű. A matematikai tradícióban (és a mai iskolai matematikában is) *euklidészi algoritmus*nak nevezett eljárásoknak – az aritmetikában két természetes szám legnagyobb közös osztójának a megkeresésére ill. a geometriában két szakasz legnagyobb közös mértékének az előállítására, ha ezek a szakaszok összemérhetők[55] – az irodalmi forrása az *Elemek* VII. könyvének eleje és a X. könyv eleje (lásd 1.16). Euklidész – és a görög matematika általában – azonban gyakran a *váltakozva kivonás*[56] algoritmusát használja ezekre a célokra. (1.12(c)-ben is ezzel írtuk le a négyzetátló és -oldal összemérhetetlenségének bizonyítását, és alább 1.15-ben egy másik összemérhetetlenségi bizonyításban mutatjuk be az alkalmazását.) A váltakozva-kivonás bizonyosan több száz évvel is megelőzi Euklidész korát.

Ha $a_0 > a_1$ természetes számok ill. szakaszok[57], legyen $a_0 - a_1 = a_2$, utána az $a_1 - a_2 = a_3$ ill. $a_2 - a_1 = a_3$ különbséget képezzük aszerint, hogy a_1 és a_2 közül melyik a nagyobb[58], és a továbbiakban minden lépésben ezen a módon származik két szám különbségéből egy újabb szám ill. újabb szakasz.

A módszer azután ezekre a princípiumokra épül:

(VK1) Ha $x, y, z \in \mathbb{N}$ és $x + y = z$ vagy $x - y = z$, akkor a három szám közül kettőnek minden közös osztója a harmadiknak is osztója.

(VK2) Ha x, y, z szakaszok és $x + y = z$ vagy $x - y = z$, akkor a három szakasz közül kettőnek minden közös mértéke a harmadiknak is mértéke.

(VK1)-et és VK2)-t együtt *a (VK)-princípium*-nak fogjuk nevezni.

(a_1) Legyenek a_0 és a_1 természetes számok. Könnyen látható, hogy ekkor az eljárás mindig véges. Ha mármost úgy végződik, hogy $a_{n+1} = 0$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re, akkor a_n az a_0, a_1 számok legnagyobb közös osztója; ha úgy végződik, hogy $a_n = 1$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re, akkor a_1 és a_2 relatív prim; más eset nem lehetséges.

(a_2) Ha viszont a_0 és a_1 szakaszok, az eljárás aszerint véges ill. végtelen, hogy a_0 és a_1 összemérhető ill. nem összemérhető; az előbbi esetben az utolsó adódó szakasz az a_0 és a_1 szakaszok legnagyobb közös mértéke.

---

ben rekonstruálhatók. Az „eudoxoszi axióma", az arányelméleti fölfedezései és a kimerités (exhaustio) módszerének megalapozása (ezt az elnevezést a módszer csak a 17. században nyerte el) – egyebek mellett – mélyen és struktúrálisan beleívodtak a görög matematikába. Az Elemek XII. könyve, amely mély tételeket tartalmaz a terület- és a köbtartalomszámítás területén a kimerités módszerének alkalmazásával (köztük azt a – valószínüleg már korábban is ismert vagy sejtett – tételt, hogy egy kúp köbtartalma egyharmada azon henger köbtartalmának, amelynek az alapja és a magassága megegyezik a kúpéval), Eudoxosznak és részben az ő tanítványainak és követőinek tulajdonítható; ezekben többnyire indirekt bizonyítások szerepelnek az eudoxoszi axióma fölhasználásával. Az Elemek V. könyve Eudoxosz igen nagy jelentőségű arányelméletének szisztematikus kifejtése. (Ezzel a következő füzetekben részletesen foglalkozunk majd.)

[55] Két természetes szám mindig „összemérhető".

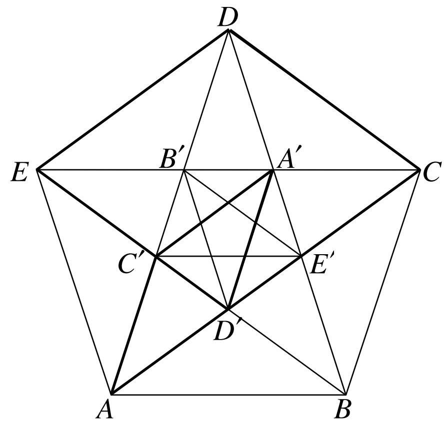
[56] Erre a fogalomra a német szakirodalomban általánosan ismert és használatos a *Wechselwegnahme* („váltakozva elvétel") kifejezés. Angolul nincs sztenderd elnevezés; magyarul az utóbbi évtizedelben kezd meghonosodni a *váltakozó kivonás* szó.

[57] Euklidész az Elemek VII. könyvének elején foglalkozik a számokra, a X. könyv elején pedig a szakaszokra vonatkoztatott váltakozva kivonással.

Igaz, hogy Euklidész – nem csak ebben a témakörben, hanem az Elemek VII.–XI. könyveiben következetesen (a tételekben és a bizonyításokban egyaránt) – szakaszokkal jeleníti meg a (természetes) számokat is. Ez a mai olvasó számára meglehetősen zavaró, hiszen például éppen a váltakozva kivonás témakörében – és azután az euklidészi algoritmusnál is – lényegesen másképpen alakul az algoritmus e két területen.

[58] Innen ered a *váltakozó kivonás* megjelölés (görögül *antanairészisz*).

1.15 A négyzetátló és -oldal összemérhetetlensége mellett a szabályos ötszög átlójának és oldalának összemérhetetlensége lehetett az az első fölfedezés, amely megrendítette és egyben új utakra vezette a matematikát a pitagoreusok korában.[59] Nincs rá adat, de lehetséges, hogy ezt is a váltakozó kivonás módszerével ismerték fel, mint a négyzetátló és -oldal összemérhetetlenségét. A módszert ui. – amely a szabályos ötszögnél nagyon természetesen és egyszerűen használható fel – jól ismerték a pitagoreusok.



1.15a ábra

Az *ABCDE* szabályos ötszög (1.15a ábra) minden átlója (az s_0 szakasz egy példánya) párhuzamos valamelyik oldallal (az a_0 szakasz egy példányával); így hát pl. az $ED'CD$ négyszög: rombusz (és az ábrában még két ezzel egybevágó rombusz van). Az átlók egy újabb, kisebb szabályos ötszöget képeznek, az $A'B'C'D'E'$-t, és pl. $A'C'AD'$ is rombusz stb.

Ebből következik, hogy egy átló nagyobbik szelete egybevágó az oldallal (pl. CD' és DE), míg a kisebbik szelet a belső ötszög átlójával (pl. $D'A$ és $A'C'$); nyilvánvaló továbbá, hogy a belső ötszög átlója kisebb s_k -val ill. d_k -val jelölve az itt keletkező végtelen szabályos-ötszög-sorozat *k*-adik elemének oldalát és átlóját ($k = 0, 1, 2, ...$), a következő egyenlőtlenségek adódnak:

$d_1 = d_0 - s_0 < s_0$		$s_1 = s_0 - d_1 < d_1$	$d_1 < \frac{d_0}{2}$
$d_2 = d_1 - s_1 < s_1$	$s_1 < \frac{s_0}{2}$	$s_2 = s_1 - d_2 < d_2$	$d_2 < \frac{d_1}{2}$
. . . .	. . . .	. . . .	
$d_{n+1} = d_n - s_n < s_n$	$s_n < \frac{s_{n-1}}{2}$	$s_{n+1} = s_n - d_{n+1} < d_{n+1}$	$d_{n+1} < \frac{d_n}{2}$
. . . .	. . . .	. . . .	. . . .

Mármost – hasonlóan, mint 1.12-ben a négyzetre vonatkozóan – az 1. és a 3. oszlopból az látszik a váltakozó kivonás elve alapján, hogy ha s_0 -nak és d_0 -nak lenne közös mértéke, az mértéke lenne az s_n és d_n szakaszok mindegyikének; ez viszont lehetetlen, mert a 2. és a 4. oszlop egyenlőtlenségei és az eudoxoszi axióma szerint mindkét szakasz-sorozat elemei tetszőlegesen kicsivé válnak.

1.16 (a) Az euklidészi algoritmus aritmetikai és geometriai formája egyaránt a váltakozó kivonás általánosítása.[60] Ez a módszer a (VK) princípium egy kiterjesztésének a maradékos osztásokra való megszorítására épül:

A maradékos osztás formulája:

$$a = q \cdot b + r \ \ (r < b) ;$$

a az osztandó, b az osztó, q a hányados, r a maradék.

---

[59] Ezt a fölfedezést Hippaszosznak tulajdonítják, aki a pitagoreusok régebbi nemzedékéhez tartozott (i. e. 450 jörül élt) és akit a legenda szerint árulással vádoltak, mert a pitagoreus titkos tanításnak ezt „kényes” részét közismertté tette. (A szabályos ötszög átlói által alkotott csillag a pitagoreusok szent jelképe volt.)

[60] Az algoritmus leírása az *Elemek*-ben (VII. 1.–3. és X. 2, 3.) nem olyan akkurátus, ahogyan azt a mai „algebraizált” stílusban megszoktuk: Teljesen hiányzik az algebrai szimbolika, a számokat is szakaszok reprezentálják, és a szöveges leírás zavaróan keveri az „euklidészi” algoritmust a váltakozva-kivonással.

(EA1) A természetes számok körében: Ha $ux + vy = wz$ vagy $ux - vy = wz$ – tehát speciálisan a maradékos osztás $a = q \cdot b + r$ $(r < b)$ formulájánál is –, akkor x, y, z (ill. a, b, r) közül bármely kettőnek minden közös osztója a harmadiknak is osztója.

(EA2) A szakaszok körében: Ha a, b és r szakaszok, q nem-negatív egész szám, és $a = q \cdot b + r$ $(r < b)$ az a maradékos osztása b-vel, akkor a, b és r közül bármely kettőnek minden közös mértéke a harmadiknak is mértéke.

$$a = q_1 \cdot b + r_2$$
$$b = q_2 \cdot r_2 + r_3$$
$$r_0 = q_3 \cdot r_3 + r_4$$
$$r_1 = q_4 \cdot r_4 + r_5$$
....

(b) Konkrétan az euklidészi algoritmus – mind az aritmetikai mind a geometriai formájában – maradékos osztások sorozata (lásd a jobb oldali keretben). Az általános formula ez:

$$r_{n-1} = q_n \cdot r_n + r_{n+1},\ r_{n+1} < r_n \quad (n = 1, 2, \ldots),$$
$$r_0 = a,\ r_1 = b.$$

$a = 233,\ b = 72$	
VÁLTAKOZVA KIVONÁS	EUKLIDÉSZI ALGORITMUS
$233 - 72 = 161$ $161 - 72 = 89$ $89 - 72 = 17$	$233 = 3 \cdot 72 + 17$
$72 - 17 = 55$ $55 - 17 = 38$ $38 - 17 = 21$ $21 - 17 = 4$	$72 = 4 \cdot 17 + 4$
$17 - 4 = 9$ $9 - 4 = 5$ $5 - 4 = 1$	$17 = 4 \cdot 4 + 1$

Ennek az algoritmusnak a funkciója ugyanaz, mint a váltakozva kivonásé (v. ö. (a_1) és (a_2)):

(b_1) Ha a és b természetes számok, akkor az eljárás mindig véges. Ha mármost úgy végződik, hogy $r_{n+1} = 0$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re, akkor r_n az a, b számok legnagyobb közös osztója; ha úgy végződik, hogy $r_n = 1$ valamely $n \in \mathbb{N}$-re, akkor a és b relatív prim; más eset nem lehetséges.

(b_2) Ha viszont a és b szakaszok, az eljárás aszerint véges ill. végtelen, hogy a és b összemérhető ill. nem összemérhető; az előbbi esetben az utolsó adódó maradékszakasz az a, b szakaszok legnagyobb közös mértéke.

(c) Az euklidészi algoritmus a „hatásfokában" különbözik a váltakozva kivonástól: Ugyanazokat az eredményeket kevesebb lépésben szolgáltatja.[61] A jobb oldali példában a végkövetkeztetés ugyanaz: 233 és 72 relatív prím számok. Az euklidészi algoritmusnál azonban olykor több olyan kivonást végzünk el összevonva, amelyek a váltakozva kivonásnál egymásután külön-külön szerepelnek. Például 72-ből annyiszor vonjuk le 17-et, másszóval 72-t maradékosan osztjuk 17-tel.

(d) 1.12(b) alatt egy olyan speciális váltakozva-kivonás valósul meg, amely egyúttal euklidészi algoritmus (amelynek még az a specialitása is van, hogy mindegyik maradékos osztás hányadosa 1): A négyzet-sorozat minden elemének átfogójában az oldal egyszer van meg (és mindig van maradékszakasz is).

1.17 Visszatérünk az 1.12 alatti témához. (a) Az „Elemek"-ben (X. 27, Függelék) annak az indirekt föltevésnek, hogy a négyzet átlója és oldala összemérhető, az az ellentmondás a következménye – a Pitagorász-tétel (I. 47) felhasználásával –, hogy egy bizonyos számnak egyszerre kellene párosnak és páratlannak lennie. A bizonyítás leírása egyébként – mai szemmel – túl bonyolult.[62]

(b) Ez az euklidészi hagyomány – a négyzet oldala és átlója összemérhetetlenségének a Pitagorász-tételen és azon a számelméleti tényen alapuló bizonyítása, hogy egy négyzetszám kétszerese nem lehet négyzetszám – máig fennmaradt az iskolai matematikában. Ez azonban fogalmilag nem tiszta eljárás, hacsak nem vagyunk a mértékgeometria birtokában, hiszen itt a Pitagorász-tételt mértékgeometriai tételként kell alkalmazni (holott azt az iskolai matematikából csak szintetikus geometriai tételként ismerjük meg). Mindez összekapcsolódik annak bizonyításával, hogy „a Pitagorász-tételből leve-

[61] A „kevesebb lépés" természetesen nem vonatkozik a geometriai változat nem-összemérhetőségi esetére.

[62] Az 1983-as kiadás 513-514 oldalain, a II.9-hez fűzött kommentárban, a négyzetoldal és –átló összemérhetetlenségének egy másik olyan – szintén eléggé bonyolult – bizonyítását olvashatjuk, amely a II. 9 tételből indul ki.

zethetően az egységoldalú négyzet átlójának hossza $\sqrt{2}$ ” ill. hogy „ $\sqrt{2}$ (irracionális) szám”. A következőkben bővebben és mélyebben foglalkozunk a számfogalom olyan zavarosságaival az oktatásban és a népszerű irodalomban, amelyek szorosan összefonódnak a görög matematikára való – nyílt vagy hallgatólagos – rossz hivatkozásokkal.

1.18 Az 1.11(c_2) kérdés és az 1.17(b)-ben leírt anomália is aktuálissá teszi, hogy legalább rövid összefoglalásban áttekintsük a szám fogalmának természetét a görög matematikában.

Mindenekelőtt fontos figyelembe venni, hogy a számolás gyakorlatát megkülönböztették a tudományos számtantól. Az előbbit, amely főleg konkrét (csillagászati, kereskedelmi stb.) feladatok kezelésére szolgált, és amelyben jelentősen érvényesült a korábbi nagy matematikai kultúrák hatása, *logisztikának* nevezték. Az utóbbinak, amely elméleti jellegű volt és – legfőképpen a számfogalom tekintetében – erősen összefonódott filozófiai-ismeretelméleti meggondolásokkal, *aritmetika* volt a megnevezése. Ebben viszont a görögök meghaladták az egyébként szívósan tovább élő ősi hagyományokat és gondolkodási paradigmákat.

A számfogalom a logisztikában (a gyakorlati felhasználás követelményeinek megfelelően) a természetes számok mellett a törteket is magába foglalta. Az aritmetikai fölfogás azonban már a legkorábbi időszakokban (Thalész, pitagoreusok) eltért ettől és ez az új hagyomány hosszú ideig uralkodó maradt.

Euklidész Elemeinek VII. könyvében így szól az első két definíció. 1. Az egység az, ami szerint minden létezőt egynek mondunk. 2. Szám az egységekből összetevődő sokaság.

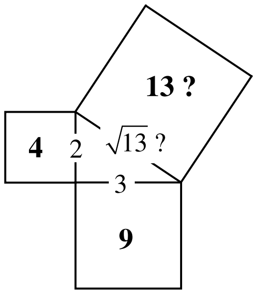
Az „egy” ebben a felfogásban nem szám.[63] Nem számok a törtek sem, ezeket számok közötti viszonyoknak tekintették; pl. Euklidésznél a törtek számtana a természetes számokra vonatkozó arányelméletként jelenik meg.

1.19 (a) Az 1.11(c_2) kérdés „történelmietlen”, ugyanis a görög matematika szemszögéből és a mai matematika szemszögéből más-más a válasz. Minthogy pedig a mai iskolai matematika a görög matematikáéval analóg helyzetben van (azáltal, hogy a pitagorász-tétellel való foglalkozás fázisában – sőt valójában az egész iskolai matematika folyamán – nincsenek meg a mértékgeometria feltételei), indokolt, hogy a kérdést a görög matematika és annak elterjedt matematika-történeti bemutatása szemszögéből elemezzük.

(b) Az olyan speciális „kínai” háromszögeknél, amelyeknek mindhárom oldala összemérhető (ezek az ún. pitagorászi háromszögek), a három oldal fölé emelt négyzetek is (triviálisan) összemérhetők (vagyis egyazon négyzet példányaival kirakhatók); ezekben az esetekben a pitagorász-tétel számszerűen (egész számokkal) kifejezhető a szintetikus geometrián belül is. Ez a három négyzet mármost akkor is „összemérhetőnek” *tűnik* (igaz, nem a kirakhatóság, csak az átdarabolhatóság vagy akár csak a kiegészítve-átdarabolhatóság értelmében), ha csak a befogók összemérhetők, a három oldal nem az. Ez azonban egy bizonyos fogalmi felületességgel mondható csak, amely a matematika-történeti – többé-kevésbé népszerű – irodalomban és az iskolai matematikában egyaránt gyakori.

[63] Lásd az 1F.8 feladatot!

(c) Szokás pl. ilyesfélét mondani (a görög matematika ismertetése keretében): „Bár végtelen sok pitagoraszi háromszög van, a pitagorász-tétel mégsem csak ezekre az esetekre vonatkozik. Például az 1.19a ábra esetében az átfogó fölötti négyzet 13 egységnyi, de magát az átfogót nem adhatjuk meg egész vagy tört számmal[64].” A kérdőjelekkel mi bővitettük az egyébként szokványos ábrát (éppen az említett fogalmi zavarra akarunk ezzel utalni); azt jelezzük, hogy nem csak az átfogóhoz rendelt $\sqrt{13}$ problematikus, hanem az átfogó geometriai négyzetéhez rendelt 13 is.



1.19a ábra

(d) *Mit is jelenthet az, hogy „az átfogó fölötti négyzet 13 egységnyi” ?*

Áttekintünk néhány lehetőséget:

A konkrét példában: a c átmérő fölötti geometriai négyzetet $c^{\square}$-tel, a mindenkori egységnégyzetet $1^{\square}$-tel fogjuk jelölni[65]; ebben az összefüggésben az 1 szimbólum az egységszakaszt is jelöli.	*Általánosan* (nem okvetlenül derékszögű háromszögre vonatkoztatva): C és E négyzetek, E kisebb, mint C, C oldala a c szakasz, E oldala az e szakasz, $n \in \mathbb{N}$.
A. Szintetikus geometriai lehetőségek.	
(a_0) $c^{\square}$ kirakható $1^{\square}$ 13 példányával. (Ez csak elvi lehetőség; a konkrét példa nem engedi meg[66], mert 13 nem négyzetszám).	(A_0) C kirakható az E négyzet n példányával.
(a_1) $c^{\square}$ átdarabolható $1^{\square}$ 13 példányának együttesébe.[67]	(A_1) C átdarabolható E n példányának együttesébe.
(a_2) $c^{\square}$ kiegészítve-átdarabolható $1^{\square}$ 13 példányának együttesébe.[68]	(A_2) C kiegészítve-átdarabolható E n példányának együttesébe.
B. Mértékgeometriai lehetőségek.	
(b_1) Egy definiált számszerű-terület-függvény értelmében $c^{\square}$ területe $1^{\square}$-vel mérve 13 .	(B_1) Egy definiált számszerű-terület-függvény értelmében C területe E-vel mérve n .
(b_2) Egy definiált számszerű-szakaszhossz-függvény értelmében c hossza az 1 szakasszal mérve $\sqrt{13}$.	(B_2) Egy definiált számszerű-szakaszhossz-függvény értelmében c hossza az e szakasszal mérve $\sqrt{n}$.

(A szokásos mértékfüggvények esetében (B_1) ekvivalens (B_2)-vel.)

(e) Implikációs kapcsolatok e változatok között.

Triviálisan $(A_0) \Rightarrow (A_1) \Rightarrow (A_2)$.

---

[64] Mai mértékgeometriai észjárással azért, mert az átfogó mértékszáma $\sqrt{13}$ (ha ugyanazzal a szakasszal mérjük, amelyre nézve a befogók mértékszámai 2 és 3), és ez irracionális szám. A görög matematika észjárásával – amikor is nem léteztek „irracionális számok”, a „szám” fogalma a természetes számokra (olykor az 1 kivételével) vagy legfeljebb a pozitív törtszámokra terjedt ki – azért, mert nincs olyan „szám”, amelynek aritmetikai négyzete 13.

[60] Ez nem sztenderd jelölés. Az olvasásban nem okvetlenül kell megkülönböztetni a^2-től (de ha logikailag következetesek akarunk lenni, megkülönböztetésül esetleg „az a szakasz fölötti négyzet”-nek mondhatjuk). Az iskolai matematikában azonban nagy fogalmi zavar megjelenési formája, sőt jelentős mértékben okozója is, hogy egy fontos geometriai objektumnak nincs olyan jele, amely világosan elhatárolja őt a mértékgeometriai értelmezéstől.

[61] Ezt „szívesen elhiszi mindenki”, mégis ajánlatos (bár nem nehéz) geometriailag belátni.

[62] Ez akkor következik „a Pitagorász-tételből”, ha azon az átdarabolásos tételt értjük.

[63] Ez akkor következik „a Pitagorász-tételből”, ha azon a kiegészítve-átdarabolásos tételt értjük.

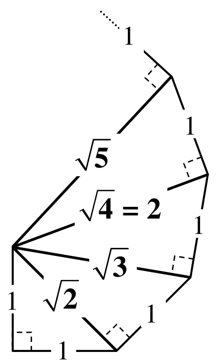
$(A_1) \not\Rightarrow (A_0)$, hacsak nem négyzetszám az *n*.

$(A_2) \Rightarrow (A_1)$. Ez könnyen belátható, ha a mértékgeometrián át bizonyítjuk, ami a görög matematikában nem – vagy csak megalapozatlanul, tehát logikailag nem helyesen – volt lehetséges; igaz, hogy a szintetikus geometrián belül is bizonyítható, de sokkal nehezebben, és ilyen bizonyítások csak a 20. század elejétől születtek[69] (a bizonyítás *igénye* sem sokkal régebbi). A görög matematikában föl sem merült, hogy ez egyáltalán kérdéses lehet – vagyis, hogy a kiegészítve-átdarabolhatóság nem vonja maga után *közvetlenül láthatóan* az átdarabolhatóságot, hanem ezt matematikai problémaként kell kezelni –, és a mai iskolai matematika fenntartja ezt a – ma már, sőt már régóta – rossznak mondható örökséget: A pitagorász-tétellel kapcsolatban biztosan fölmerül ez a két geometriai ekvivalencia-fogalom (hiszen a tételt hol így, hol úgy, hol meg mindkét értelemben bizonyítják), de még csak meg sem említik e fogalmak egyenértékűségének a *problémáját* (nem a bizonyítását hiányoljuk).[70]

1.20 *Mit is jelenthet – újra az 1.19a ábrára utalva – az, hogy „a háromszög átfogója* $\sqrt{13}$ *” ?*

A görög matematika talaján – szigorúan aritmetikailag tekintve – *semmit*! (V. ö. 1.19(c)-vel.)

Lehetne azonban a $\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ szimbolumot a következő módon használni: Minthogy van olyan négyzet, amelyhez az *n* számot rendelhetjük (mint „területet”, de nem a mértékgeometria, hanem a szintetikus geometria keretében, pl. az átdarabolásos pitagorász-tétel alapján, v. ö. 1.19(d)), *legyen* $\sqrt{n}$ *ezen négyzet oldalának, tehát egy szakasznak, mint geometriai objektumnak, a jele*. Az 1.20a ábra egy módszert mutat a $\sqrt{n}$ szakasz megszerkesztésére tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re, közvetlenül a pitagorász-tétel fölhasználásával.[71] Bizonyos esetekben azután ezek a szakaszok számszerűen is viszonyíthatók a kiindulásul választott „1” alapszakaszhoz; pl. a $\sqrt{4}$ szakasz az alapszakasz két példányának az összeillesztésével is nyerhető.[72]



1.20a ábra

1.21 (a) Itt közbe kell iktatnunk bizonyos meggondolásokat a négyzetnek egybevágó négyzetekkel való kirakhatóságáról és a $\sqrt{n}$ szakasz előbbi értelmezéséről. Ezek a meggondolások egy összefüggő problémamezőt alkotnak.

(b) A $\sqrt{n}$ szakasz a fenti módon akkor értelmezhető egyértelműen, ha *egyértelműen* létezik olyan *N* négyzet, amelyhez az *n* számot rendelhetjük. Ezzel kapcsolatban pedig két olyan (rejtett) probléma van, amelyeket tudatosítanunk kellene. (A következő meggondolásokban mindvégig egy egyér-

---

[69] Az első ilyen bizonyítás talán Hilberté (az 1901-ben megjelent korszakfordító „Grundlagen der Geometrie” c. művében, amellyel még többször és bővebben fogunk foglalkozni). Azóta több, a Hilberténél elemibb bizonyítás is született.

[70] Ez még akkor is súlyos gondolkodási hiba lenne, ha a valós számtest és a jól megalapozott mértékgeometria birtokában lennénk az oktatás ama fázisában (l. a következő füzetet); mégis *hallgatólagosan* mértékelméleti érvet használnak, ami már abban is megnyilvánul, hogy a „terület”, „területegyenlőség” szavak eleve a számszerű terület-elképzelést sugallják, nem pedig egy tisztán geometriai viszonyt. Érdekes, hogy ez az „áthallás” a pitagoreusoknál és általában a görög matematikában sem volt ritka. Talán a pitagorászi háromszögek „varázslatos hatásának” is tulajdonítható ez (ami azonban nagyon félrevezető, hiszen ezek az *egyedüli* derékszögű háromszögek, amelyeknél a pitagorász-tétel eredetileg geometriai tartalma közvetlenül racionális-szám-szerű formában jeleníthető meg).

[71] Nincs egyértelműen tisztázva, de lehetséges, hogy éppen ezt a szerkesztési folyamatot képzelték el annak idején az egymás utáni $\sqrt{n}$ szakaszok megjelenítésére.

[72] Tanulságos tapasztalat (minthogy ebben a szerkesztésben a $\sqrt{4}$ értelmezése nem $2 \cdot 1$ volt) és tanulóknak – de talán a tanároknak is – örömteli élményt nyújt, ha valóban „megmérik” a $\sqrt{4}$ szakaszt az „1” alapszakasszal.

telműen rögzített *M* alapnégyzetet – „egységnégyzetet” – ill. *m* alapszakaszt – „egységszakaszt” – képzelünk el.)

(b_1) Több különböző módon is rendelhetjük bizonyos *N* négyzethez az *n* számot. Pl. ha

(0) az *N* kirakható az *M* *n* példányával;

(1) az *N* átdarabolható az *M n* példányának együttesébe;

(2) az *N* kiegészítve-átdarabolható az *M n* példányának együttesébe.

Mármost van-e erre garancia, hogy ezek a feltételek egyenértékűek (vagyis hogy ha egy négyzet eleget tesz e feltételek egyikének, akkor a többinek is) ? (L. fent 1.19(e)).

(b_2) De még ha megállapodnánk abban, hogy *egy* bizonyos módot használunk az *n* „területű” négyzet definiálására, pl. az (1)-et, fönnmarad ez a kérdés: nem lehetséges-e, hogy két különböző (nem egybevágó) négyzet is van, amelyek átdarabolhatók az *M n* példányának együttesébe? [73]

Ha figyelembe vesszük az átdarabolhatóság tranzitivitását[74], ez azt is jelentené, hogy *valamely négyzet átdarabolható lenne egy vele nem egybevágó négyzetbe* (tehát nem is definiálhatnánk a $\sqrt{n}$ szakaszt” az 1.20(a) alatti módon). *Egyáltalán nem magától értődő, hogy ez nem lehetséges*, de a görög matematikában a kérdés fölvetése is abszurd lett volna.[75]

(c) Az iskolai matematikába suttyomban szűrődik be ez a probléma (nem szokás észrevenni). Mindnyájan ismerjük az ilyen mondatokat: „A Pitagorász-tételből következik, hogy egy olyan derékszögű háromszögnek, amelynek a befogói 3 és 4 egységnyiek, az átfogója 5 egységnyi.”[76]

Mármost a Pitagorász-tétel – akár a görög matematika vonatkozásában, akár általánosan a szintetikus geometria szemszögéből, akár az iskolai megismerési folyamat aktuális szintjén (amikor az ilyen mondat elhangzik vagy tankönyvekben szerepel) – nem is szól ilyesmiről. Csupán azt mondja ki, hogy a kérdéses háromszög átfogójára emelt négyzet átdarabolható[77] $3\times3+4\times4=25$ egységnégyzet együttesébe. Persze, ismerünk ilyen négyzetet: ez éppen az 5 egységnyi oldalú négyzet (amely egyébként „annyira nyilvánvalóan” átdarabolható 25 egységnégyzetbe, hogy még ki is rakható ezekkel, vagyis nem kell őket feldarabolni). Ez azonban még nem zárja ki evidens módon, hogy más – az 5×5-ös négyzetnél kisebb vagy nagyobb – négyzet is átdarabolható legyen (netán valamilyen sokkal bonyolultabb módon).

(d) Általánosabb formájában a kérdés – a derékszögű háromszögektől függetlenül – így szól: Igaz-e, hogy két különböző négyzet nem lehet átdarabolhatóan egyenlő? A legáltalánosabban pedig a probléma ez: *Igaz-e, hogy egy sokszög nem lehet átdarabolhatóan egyenlő egy valódi rész-sokszöggel?*

Azt az állítást, hogy ez valóban így van, fogjuk *az átdarabolhatóság szigorú monotonitási tételének* nevezni.[78]

---

[73] Ez azt jelentené, hogy Euklidész Elemeinek szóhasználatával élve „egyenlő”-nek kellene mondanunk két nem egybevágó négyzetet. A következő füzetben részletesebben foglalkozunk majd ezzel.

[74] A görög matematikában általános volt, hogy az átdarabolás tranzitivitását és a kiegészítve-átdarabolás tranzitivitását is hallgatólagosan föltételezték és a bizonyításokban hallgatólagosan fölhasználták. A bizonyításnak a szükségessége egyáltalán nem merült föl.

[75] Azt, hogy ez nem lehetséges, a megalapozottan csak sokkal később kiépített mértékgeometrián át könnyen bizonyíthatjuk, bár a tény maga a szintetikus geometria keretébe tartozik. Szintetikus geometriai bizonyítás azonban csak Hilbert már említett 1901-es könyvében jelent meg először, mégpedig ebben a formában: *Ha egy triangulált – háromszögekre bontott – sokszögből elvesszük legalább az egyik háromszöget, akkor a maradék háromszögekkel nem lehet az eredeti sokszöget kitölteni.* (Valójában Hilbert nem sokszögekre, hanem téglalapokra mondta ki a tételt, de a bizonyítás nyilvánvalóan ugyanúgy működik tetszőleges sokszögekre is. Lásd az 1F.18 feladatot!)

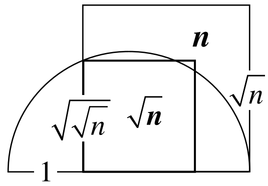
[76] Mindaz, amit erről mondunk, úgyanúgy elmondható bármely pitagorászi számhármasra.

[77] Vagy kiegészítve-átdarabolható, ha a tételt így bizonyítottuk; a probléma lényege ugyanaz.

[78] Lásd még az 1.7, 1F.13(b_2)(c_2), 1F.18 részeket és a csatlakozó lábjegyzeteket!

1.22 (a) A görög matematikában ténylegesen volt helye az 1.20 alatti értelmezésnek (persze nem a – sokkal későbbi – $\sqrt{\ }$ jelet[79] használva).

Euklidész az Elemek nagy terjedelmű 10. könyvében ilyen – részben hallgatólagos vagy nehezen kiolvasható – értelmezések alapján építi föl „az irracionálisok” elméletét; ennek bonyolult tartalmát (eltekintve egyes „epizódoktól”[80]) tömören így lehetne leírni: a „skatulyázott négyzet-gyökös” kifejezések – mint pl. $\sqrt{\sqrt{n}+\sqrt{m}}$ – közötti összemérhetőségi viszonyok vizsgálata.



1.22a ábra

(b) Ehhez persze $\sqrt{n}$ -nek a szakaszként való értelmezése mellett szükség van a „négyzet-terület”-ként való – szintetikus geometriai – értelmezésére is. Az 1.22a ábra egy – konstruktív – lehetőséget mutat erre. Ez azonban „utánaérzés” a görög geometriai algebra szellemében. Az Elemek 10. könyvét a megfogalmazást illetően az teszi igen nehezen olvashatóvá, hogy csak szöveggel – képletek nélkül és nagyon kevés igazán értelmező ábrával – írja le a nagyon komplex viszonyokat, tartalmilag pedig az, hogy az „irracionalitások” *tizenkét* különböző – a mai matematika nyelvén ilyesféle gyökös kifejezésekkel reprezentálható – osztálya közötti kapcsolatokat vizsgálja.

1.23 (a) Magát az összemérhetőséget is meglehetősen bonyolultan értelmezi Euklidész. Szó van ui. összemérhetetlenségről mind a szakaszok, mind a négyzetek körében. Az előbbi világos (a következő füzetben tovább foglalkozunk vele), az utóbbi azonban nem, mert az egybevágó négyzetekkel való kirakhatóság és a nem-négyzetekké darabolás szerinti egyenlőség nincsenek fogalmilag elkülönítve (V. ö. 1.21.)

(b) Még a szakaszok körében is nehézséget okoz, hogy meg kell különböztetni a következő öt állítást: az a, b szakaszok

– *lineárisan összemérhetők* (vagyis összemérhetők és ennek következtében $a^{\square}$ és $b^{\square}$ is összemérhető);

– *lineárisan nem-összemérhetők* (vagyis nem összemérhetők, amikor is $a^{\square}$ és $b^{\square}$ lehet összemérhető és nem összemérhető);

– *négyzetesen összemérhetők* (vagyis $a^{\square}$ és $b^{\square}$ összemérhető, ekkor a és b lehet összemérhető és nem összemérhető);

– *négyzetesen nem összemérhetők* (vagyis $a^{\square}$ és $b^{\square}$ nem összemérhető, amikor is a és b sem összemérhető);

– *csak négyzetesen összemérhetők* (vagyis $a^{\square}$ és $b^{\square}$ összemérhető, a és b nem összemérhető).

(L. az Elemek X. könyvében a 2. definíciót és a 9. tételt.) [81]

---

[79] A ma használatos négyzetgyök-jelet – a négyzetgyök különböző más jelölései után – az európai matematikában főleg Michael Stifel és Adam Ries honosította meg a 16. században (igaz, hogy a felső, összefoglaló-kijelölő vízszintes vonal nélkül; ezt még Gauss is zárójellel oldotta meg, a 19. században, pl. $\surd(b^2-4ac)$.

Ries algebrista és nagyon híres „számolómester” volt; pedagógiailag is kitűnő számtan-könyveket írt. (A neve mind a mai napig fennmaradt egy a német nyelvterületen közismert szólás-mondásban.)

Stifel a korának egyik vezető matematikusa volt; a logaritmusról szóló füzetben részletesebben fogunk róla szólni. Itt csak azt említjük meg (ami e füzet témájához kapcsolódik), hogy talán ő volt az első matematikus a görög matematika korszaka után, aki az *Elemek* – nagyon bonyolult, még ma is igen nehezen olvasható – 10. könyvének alapgondolatait igazán megértette és jelentősen hozzájárult az irracionalitás problémáinak tudatosításához.

[80] Ezek többnyire valószínüleg későbbi betoldások, s bár önmagukban nem érdektelenek, későbbi kiadások, különböző fordítások mai szemmel nézve rendszertelenül válogatnak belőlük.

[81] Az $a^{\square}$ szimbólumot „házi használatra” vezettük be; sem Euklidész, sem más görög matematikusok, sem a rengeteg különböző nyelvű Elemek-kiadás nem jelöli egyedi módon az a oldalú négyzetet mind a mai

(c) Az „összemérhető" szót szakaszpárra vagy idom-párra lehet alkalmazni. Ha egy-egy a szakaszt *mérhetőnek* mondtak, akkor ez egy kimonva vagy hallgatólagosan rögzített e „egységszakasz"-ra vonatkoztatva azt jelentette, hogy az a, e pár összemérhető. Hasonlóan lehetett egy területet mérhetőnek nevezni egy rögzített területtel való összemérhetőség kifejezésére. Euklidész a mérhető idomokat *kimondható*-nak vagy *racionálisok*-nak is nevezte, és ezt az elnevezést kiterjesztette azokra a szaka-szokra, amelyekre épített négyzetek mérhetők. A többi szakaszok *kimondhatatlanok* vagy *irracionálisok*.

<table>
<tr><th>SZAKASZOK FOGALMI OSZTÁLYOZÁSA egy (tetszőlegesen rögzített) e „egység"- szakaszra vonatkoztatva</th><th>A GÖRÖG MATEMATIKÁBAN</th><th>A MAI MATEMATIKÁBAN</th></tr>
<tr><td>e-vel összemérhető</td><td rowspan="2">racionális</td><td>racionális</td></tr>
<tr><td>e-vel csak négyzetesen összemérhető</td><td rowspan="2">irracionális</td></tr>
<tr><td>e-vel nem összemérhető</td><td>irracionális [82]</td></tr>
</table>

Ezzel a táblázattal két dolgot kívánunk világossá tenni.

1. A „racionális"–"irracionális" osztályozás a görög matematikában nem aritmetikai, hanem geometriai tartalmú: Nem számokról van szó[83], hanem szakaszokról, mégpedig a valós számok nélküli, szintetikus geometriában.

2. A görög osztályozás még a mai mértékgeometriát visszavetítve a görög geometriára (vagyis a szakaszokhoz az ő – valamely egységszakaszra vonatkoztatott – mértékszámait rendelve) sem felel meg a valós számok halmaza „racionális"–"irracionális" fölosztásának.

1.24 (a) Láttuk tehát, hogy Euklidész – és vele az egész görög matematika – a „racionális", „irracionális" szavakat (itt természetesen az ezen latin szavaknak görög megfelelőiről van szó), amelyek a mai matematikai nyelvben a valós szám fogalmához kötődnek, kétszeresen is más értelemben használja. Ez az iskolai matematikában és a népszerűsítő irodalom különböző rétegeiben a mai napig ható félreértelmezések forrása. A félreértés lehetőségét növeli, hogy a mai matematikában a „görög" és a „mai" értelmezés kapcsolatba hozható (ami azért nem szünteti meg a különböző voltukat).

Súlyos hiba elhallgatni az ilyen fontos terminusoknak a történeti jelentésváltozását.

(b) *Igaz-e hogy „A pitagoreusok fölfedezték, hogy a* $\sqrt{2}$ *irracionális szám*" ? Ez a mondat ui. – különböző változatokban – gyakori a különböző mértékben népszerűsítő matematika-történeti irodalomban, és az iskolai matematikában kimondva-kimondatlanul jelen van. Fontosnak tartjuk ráirányítani a figyelmet ennek a mondatnak az anakronisztikus és abszurd voltára, hiszen matematikai és matematika-történeti szempontból egyaránt súlyosan félrevezető.

(b_1) A szám fogalma a pitagoreus aritmetika fölfogásában nem terjed túl azon, amit ma természetes számnak nevezünk (l. 1.18). A $\sqrt{2}$ -ről tehát a pitagoreusok nem mondhatták, hogy ilyen-olyan szám, mert egyáltalán nem szám.

(b_2) A mondatnak azonban az a – felületesen fogalmazott, de szintén gyakori – változata, hogy „A pitagoreusok fölfedezték, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális", is abszurd, mert akkor csak a $\sqrt{2}$ szimbólummal reprezentált *szakaszra* gondolhatunk (ez tényleg létezik, l. 1.20), de ez a görög matematikában éppen hogy „racionális" (ui. négyzetesen összemérhető az 1 szakasszal, l. az 1.23(c) alatti táblázatot).

(b_3) Nem csak arról van tehát szó, hogy az állítás nem igaz[84], hanem arról, hogy nem is lehetne igaz, mert értelmetlen!

---

napig; a legnevesebb kommentátorok is az a^2 szimbólumot használják, ami a nem eléggé értő vagy figyelmes olvasónál súlyos, az iskolai matematikában pedig végzetes félreértelmezések forrása.

[82] Ezt az osztályt az irracionalis szakaszoknak az 1.20(c)-ben említett további osztályozása finomitja.

[83] Ott ez az osztályozás értelmetlen is lenne, hiszen a „szám" azt jelentette, amit ma „természetes szám"-nak nevezünk, és ennek a szám-tartománynak bármely két eleme „összemérhető".

[84] Ez ui. még nem zárná ki azt, hogy ez a fölfedezés megtörténhetett volna, csak éppen nem történt meg.

(c) Mindez az egyik megnyilvánulása annak az általános és általánosan elterjedt tendenciának, hogy a valós szám fogalmi problémáit nemlétezőnek állítsák be. Az iskolai matematika ugyanis ebben a tekintetben hasonló helyzetben van, mint a görög matematika, azzal az eltéréssel, hogy amikor az ilyen témák egyáltalán előkerülnek, akkor a számfogalom már átfogja a racionális számokat (a szót a mai értelemben véve), de csakis azokat. Ebben a fázisban nem igaz tehát az, amit az iskolai matematika a kezdetektől sugall, hogy ti. minden szakasznak van számszerű hossza, és értelmetlen azt mondani, hogy ha még sincs (mint pl. az egyenlő és egységnyi szárú derékszögű háromszög átfogója esetében), akkor mégis van, csak éppen „irracionális szám”. Ennek a szónak ebben a helyzetben semmiféle jelentése sincs.[85]

Ennek a rossz tendenciának évezredes, igen erős hagyományai vannak, amelyek egyértelműen visszavezethetők az említett történeti szituációkra.

(d) Az inkriminált mondat rendszerint a következő tételek tematikájába beágyazva jelenik meg az oktatásban.

Az eredeti – pitagoreus (szintetikus geometriai) – ill. „racionális” aritmetikai tételek	*A mai mértékgeometriai ill. „valós” aritmetikai megfelelőik*
(1) A négyzet átlója és oldala nem összemérhető.	(1*) A négyzet átlóját az oldalával mérve a mérték-szám irracionális.
(2) Négyzetszám nem lehet négyzetszám 2-szerese.[86]	(2*) $\sqrt{2}$ valós számként létezik és irracionális.
(3) Az egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogója fölötti négyzet „egyenlő” a befogó fölötti négyzet kétszeresével. (Itt pl. átdarabolhatóságról lehet szó.)	(3*) Ha egy egyenlőszárú derékszögű háromszög oldalának mértékszáma 1, akkor az átfogóra emelt négyzet számszerű területe 2.
$(3) \wedge (2) \Rightarrow (1)$.[87]	$(3^*) \wedge (2^*) \Rightarrow (1^*)$.

A táblázat utolsó sorában jeleztünk egy – a témánk szempontjából releváns – implikációs kapcsolatot e tételek között.

Mindhárom bal oldali tétel pitagoreus örökség a mi kultúránkban. Az oktatásban azonban ezek a tételek sokszor (megalapozatlanul) mértékgeometriai köntösben tűnnek föl, és végső soron a hat tétel és ezek kapcsolatai logikailag és történetileg nehezen kibogozható szövevényt alkotnak (aminek sem a tanulók, sem a tanítók nincsenek tudatában).

1.25 Végül meg kell említeni azokat a zavarokat is, amely a szavak különböző nyelvsíkokbeli – filozófiai vagy köznyelvi ill. matematikai szaknyelvi – jelentéseinek összekeveréséből fakadnak (amire még rárakódik a szavak történeti jelentésváltozása is mindegyik kategóriában).

---

[85] Az érzékletesség érdekében érdemes ezt karikírozva is megfogalmazni: Akinek „szám” az, amit a matematika-tudomány „racionális szám”-nak nevez, annak egyrészt zavaró, ha teljesen fölöslegesen az utóbbi szót kell használnia, másrészt nyilvánvaló, hogy bár pl. a sündisznó nem „racionális szám”, abból nem következik, hogy „irracionális szám” (ami egyébként abban a helyzetben nem is jelent semmit).

[86] Itt persze természetes számokról van szó. (A tétel a mai matematikában egyenértékű azzal, hogy nincs olyan racionális szám, amelynek a négyzete 2, de a megismerési folyamatok „valós szám előtti” fázisaiban ma sem jelenti azt, hogy „a $\sqrt{2}$ irracionális szám”, hiszen ennek nincs is értelme.)

[87] Ennek bizonyításához azonban (mai fölfogás szerint) még további – nem is egyszerűen bizonyítható – összefüggéseket kell tisztázni, amelyekkel a görög matematika nem foglalkozott, sőt a szükségességüket sem ismerte föl (pl. a Bolyai Farkas–Gerwien-tételt, amellyel egy későbbi füzetben foglalkozunk, és amely a valós szám fogalmát feltételezi).

	„racionális”, „racionalitás”	„irracionális”, „irracionalitás”
Köznyelvi és filozófiai értelemben	(r_1) Ésszerű(ség), értelemmel felfogható(ság)	(i_1) képtelen(ség), ésszerűtlen(ség), megközelíthetetlen(ség) a gondolkodás számára), felfoghatatlan(ság)
Modern matematikai műszóként	(r_2) egy valós szám $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ alakban való reprezentálhatósága	(i_2) egy valós szám $\frac{p}{q}$ $(p, q \in \mathbb{N})$ alakban való nem-reprezentálhatósága
Matematikai műszóként a görög matematikában	Lásd az 1.23 alatti táblázatot	

Amikor ti. matematika-történeti szerzők azt írják, hogy „a pitagoreusok fölfedezték az első irracionalitást”, akkor ez ellen semmi kifogásunk nem lehet, ha *föltételezzük*, hogy itt az „irracionalitás” szót nem az (i_2), hanem az (i_1) értelemben használták:

Nem azt akarták mondani, hogy fölfedezték egy számukra *nem létező* objektumnak – a $\sqrt{2}$ -nek – *egy tulajdonságát* (azt, amelynek a valós számok mai elméletében, ahol ez az objektum létezik[88], tehát lehetnek tulajdonságai is, irracionalitás a neve),

hanem azt, hogy „irracionális”, vagyis abszurd *az a helyzet* (körülmény, tény), hogy nincs olyan egész szám, amelynek önmagával való szorzata 2 [89].

1F *Feladatok.*

1F.1 (a) Tanulmányozza az *Elemek* I. könyvének 35.–41. tételeit!

(b) Írja le, hogy milyen értelemben használja itt Euklidész az „egyenlő”, „kétszeres”, „fele, felezi” szavakat (konkrétan, minden egyes előfordulásnál)!

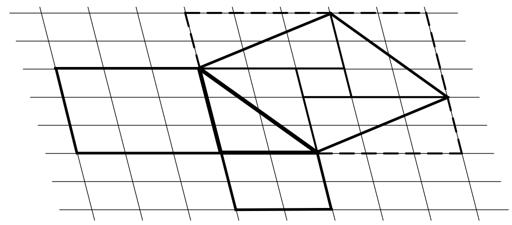
(c) Lehet-e az egyes *bizonyításokból* rekonstruálni, hogy a megfelelő *tételek* szövegében mit jelentenek ezek a szavak?

(V. ö. 1.8.)

F.2 Mit lehet leolvasni a 1.6d ábrával analóg 1F.2 ábrából

(a) a paralelogramma-rácshoz illeszkedő vastagon rajzolt háromszög oldalai fölé állított paralelogrammákról ill.

(b) a háromszög oldalairól?



1F.2 ábra

1F.3 A „kínai bizonyításhoz” tartozó 1.6e ábrán az egyik négyzetrács bizonyos rácspontjai egybeesnek a másik – vele azonos léptékű – négyzetrács egy-egy rácspontjával. Bizonyítsa be, hogy ez nem csak az ábrán tűnik így (vagyis nem csak arról van szó, hogy két pont „nagyon közel” esik egymáshoz), hanem törvényszerűen, pontosan így van.

Útmutatások két különböző bizonyításhoz. 1. Használja föl a tangens-függvény $\frac{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}{1-\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta}$ addíciós képletét. 2. Használja föl az origó körüli forgatás transzformációs egyenletrendszerét:

$$x' = \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y\ ,\ \ y' = \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y\ .$$

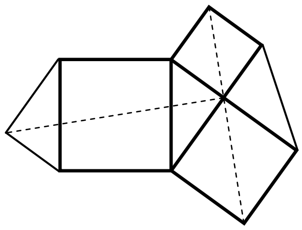
---

[88] Erre visszatérünk majd a következő füzetben, a valós számtest fogalmának Dedekind-féle fölépítésével kapcsolatban

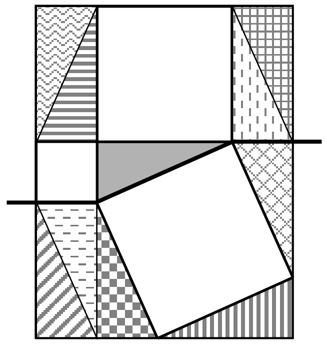
[89] Amiből az is következik (amint azt a mai iskolai tanulóknak is tudniuk lehet és kell, „egy pitagoreus” azonban nem mondhatja), hogy olyan tört-szám – vagyis végső soron olyan racionális szám, az (r_2) értelemben – sincs.

1F.4 Az Elemek I. könyvében hol szerepel bizonyítási eszközként az „egyenlőség” tranzitivitása? (Keressen meg és elemezzen két-három előfordulást.) Részletezze, hogy milyen konkrét geometriai relációk tranzitivitását takarja ez az egyes esetekben!

1F.5 Az 1F.5a ábra és az 1F.5b ábra a pitagorász-tétel egy-egy kiegészítve-átdarabolásos bizonyításához tartozik.[90] Rekonstruálja ezeket a bizonyításokat!

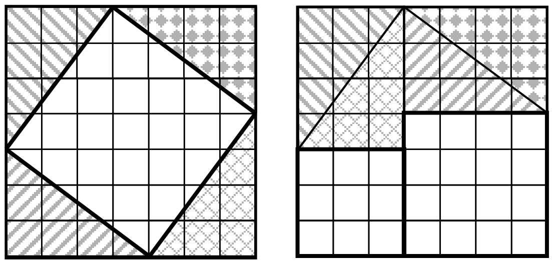


1F.5a ábra



1F.5b ábra

1F.6 Az 1F.6a ábra ugyanabból a – Choú-pei Suan-king nevű – régi kínai dokumentumból való, mint az 1.6(c) alatt fölidézett „kínai” pitagorász-tétel-bizonyítás. Ez is a 3, 4, 5-ös derékszögű háromszögre demonstrálja a pitagorász-tételt, de másképpen: Míg amaz átdarabolásos bizonyítás, emez a kiegészítve-átdaraboláson alapul.[91]



1F.6a. ábra

(a) Rekonstruálja ennek a bizonyításnak a szövegét (amelyet eredetileg le sem írtak)!

(b) Mutassa meg, hogy ez a bizonyítás átvihető bármely olyan derékszögű háromszögre, amelynek a befogói összemérhetők!

(c) Hogyan alakul a konfiguráció, ha egyenlőszárú derékszögű háromszögről van szó? (V. ö. 1.6(e).)

(d) Mutassa meg, hogy a (b) alatti feltétel fölösleges! [92]

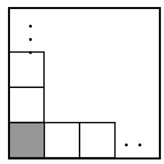
1F.7 Értelmezze geometriailag $\sqrt{a^{\square} - b^{\square}}$ -t, ahol a és b szakaszok, $a > b$, és adjon meg hozzá egy euklidészi szerkesztést.

1F.8 Tanulmányozza az Elemek VII. 1., VII. 2 szakaszait, és fogalmazza meg: Hogyan jelenik meg itt az a tény, hogy a görög matematika az egységet nem tekintette „szám”-nak (holott a számokat – értsd a természetes számokat – az egységből fölépülőnek gondolták)! (V. ö. 1.18.)

1F.9 (a) Olvassa át újból az 1.21 szakaszt!

(b) Bizonyítsa be, hogy ha egy négyzet egyáltalán kirakható egy másik négyzettel, akkor csak egyféleképpen, az 1F.9a ábrán jelzett „természetes” módon!

(Az 1.21(b_1) alatti (0) módon eszerint egyértelműen rendelhető hozzá egy bizonyos négyzethez az n szám. (Igaz persze, hogy n-nek négyzetszámnak kell lennie.)



1F.9a ábra

[90] A második példa forrása Bayreuther, P.: Demonstration des Satzes von Pythagoras. In: Math. Unt. Praxis 1982, Heft 2, p. 41 f.

[91] Valójában tehát – az akkori kínai matematika szintjén – nem ugyanarról a tételről van szó!

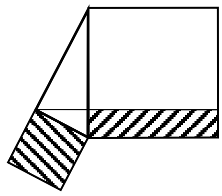
[92] A (b), (c), (d) alatti kérdések olyanok, amelyek a mai matematikai gondolkodásnak obligát elemei, de amelyek a fölidézett régi kultúrákban föl sem merültek.

1F.10 (a) Olvassa át újból az 1.13 szakaszt!

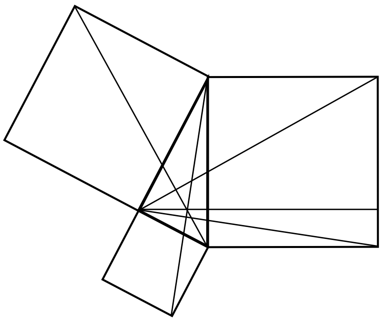
(b) Bizonyítsa be, hogy az ott „eudoxoszi axiómának” és „arkhimédészi axiómának” nevezett állítások – szakaszokra és pozitív valós számokra egyaránt – ekvivalensek.

1F.11 Az 1F.11b,c,d ábrák az euklidészi befogó-tételnek (amelyből a Pitagorász-tétel közvetlenül levezethető, l. 1F.11a ábra) három bizonyítását illusztrálják; az első az Euklidész-féle bizonyítás (Elemek I.47)[93], a második annak egyszerűbb fölépítése (de szintén teljesen Euklidész szellemében), a harmadik pedig a másodiknak csak formailag különböző változata.

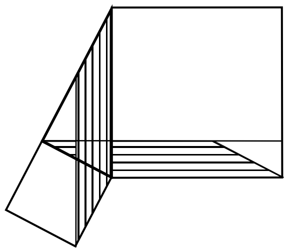
Írja le ezeket a bizonyításokat és elemezze őket a felhasznált bizonyítási eszközök tekintetében!



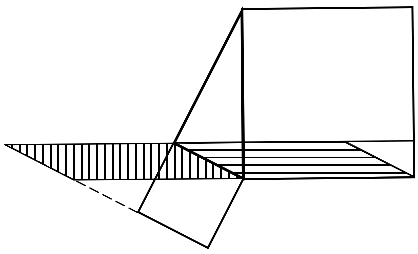
1F.11a ábra



1F.11b



1F.11c



1F.11d ábra

(Például a másodikban és a harmadikban az *Elemek* I.35 tételére kell hivatkozni, ugyanolyan logikai szerepben, ahogyan az elsőben az I.41 tételre. Mi ez a logikai szerep?)

1F.12 1.16-ban említettük, hogy az *Elemek* VII.1–3, X.2,3 tételeinek a *szövegében* nem világos, hogy a váltakozva-kivonásról vagy az „euklidészi algoritmus”-ról van szó. (A cél – számoknál a legnagyobb közös osztó ill. összemérhető szakaszoknál a legnagyobb közös mérték előállítása – szempontjából egyaránt lehet ezekre gondolni.)

Tanulmányozza gondosan e tételek *bizonyításait* is; vajon azokból kiderül-e egyértelműen, hogy mire gondolt Euklidész?

1F.13 (a) „Ellenőrizze” zsebszámológépen:

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}=\sqrt{8},\quad \sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=4\,,\quad \sqrt{2}+\sqrt{8}=\sqrt{18}\,.$$

(b_1) Bizonyítsa be ezeket (aritmetikailag)!

(b_2) Mi ebben a szerepe az $x \mapsto x^2$ függvény $(x>0)$ szigorú monotonitásának?

(c_1) Legyen $\sqrt{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ annak a négyzetnek az oldal-szakasza, amely átdarabolható n db egységnégyzetbe[94], továbbá a, b szakaszokra $a \oplus b$ az a és b összeillesztésével keletkező szakasz, $a \otimes b$ az a és b téglalapja, végül $a^{\square}$ az a oldalú négyzet (vagyis $a^{\square}=a\otimes a$).

Bizonyítsa geometriailag:

$$\sqrt{2}\oplus\sqrt{2}\doteq\sqrt{8},\quad \sqrt{2}\otimes\sqrt{8}\doteq 4\,,\quad \sqrt{2}\oplus\sqrt{8}\doteq\sqrt{18}\ !$$

(c_2) Mi ebben a szerepe *az átdarabolhatóság szigorú monotonitási tételének*?[95]

(d) Bizonyítsa be (geometriailag), hogy $\sqrt{n^2}\doteq n$!

---

[93] Az 1F.11b ábra az *Elemek*-beli bizonyítás eredeti ábrája; lásd 1.8.

[94] Ilyen négyzet létezik 1.20 szerint.

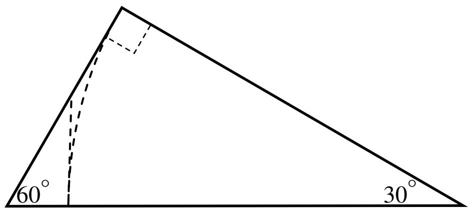
[95] A tétel megfogalmazását lásd 1F.18(M) alatt. A tételnek nincs sztenderd elnevezése (pedig alapvetően fontos tételről van szó; a „szigorú monotonitás” kifejezést azért választottuk, mert az érzékletesen utal a dolog lényegére.

(e) Bizonyítsa be (geometriailag), hogy $n\cdot\sqrt{m} \doteq \sqrt{n^2\cdot m}$ $(m,n\in\mathbb{N})$. (Ha a egy szakasz és $k\in\mathbb{N}$, akkor $k\cdot a$ az a szakasz k példányának összeillesztésével nyert szakasz.)

1F.14 Az 1F.14a ábra annak egy bizonyítását kíséri, hogy egy olyan derékszögű háromszög befogói, amelynek hegyesszögei 60 és 30 fokosak, nem összemérhetők.

(a) Rekonstruálja ezt a bizonyítást! (Olvassa át újból az 1.12, 1.15 szakaszokat, és használjon fel azokból bizonyítási elemeket!)

(b) Mutassa meg az (a) eredményének felhasználásával, hogy $\sqrt{3}$ irracionális!



1F.14a ábra

1F.15 (a) Tanulmányozza az 1.9 szakaszt!

(b) Könnyű látni, hogy az 1.9(d)-beli mindhárom változatban adódó számhármasok valóban pitagorászi számhármasok.

(c) Mutassa meg, hogy a 3. változatban ennek a fordítottja is igaz, legalább is abban az értelemben, hogy a formulák az *alaphármasok* mindegyikét szolgáltatják!

(d) Bizonyítsa be az 1.9b ábrából kiindulva, hogy

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2 \quad (n=1,2,...).$$

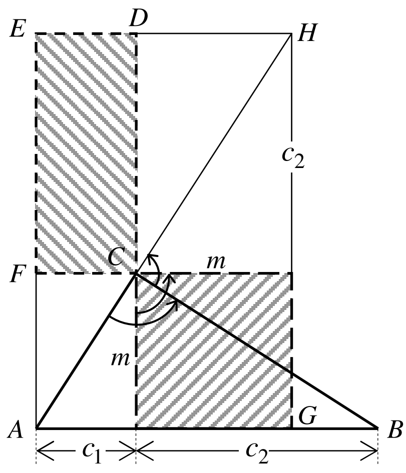
(e) Bizonyítsa be, hogy a természetes számok körében egy gh szorzat pontosan akkor négyzetszám, ha

$$g=ku^2,\ h=kv^2$$

valamely u, v, k természetes számokra. (V. ö. 1.9(e).)

1F.16 Az 1F.16a ábra úgy épül föl az ABC derékszögű háromszögből, hogy 90°-kal elforgatjuk azt; ezzel kijelölhetjük a nagy téglalap még hiányzó G, H, E csúcsait, (úgy, hogy pl. az EF szakasz valóban egybevágó a c_2 szakasszal).

(a) Bizonyítsa be a szintetikus geometria keretében, hogy a sraffozott idomok „egyenlők"! (Tekintsük úgy, hogy „tudjuk": a sokszögek körében a kiegészítve-átdarabolhatóság ekvivalens az átdarabolhatósággal.[96]) A bizonyítandó tétel tehát valójában ez:



1F.16a ábra

Bármely derékszögű háromszög átfogójához tartozó magasság-szakaszra emelt négyzet „egyenlő" az átfogó két szakasza alkotta téglalappal.

(b) Tanulmányozza az 1.20–1.22 szakaszokat és az 1F.13 alatti feladatokat!

(c) Értelmezze: Ha (a)-ban c_2 tetszőleges természetes szám és $c_1=1$, akkor az m szakaszt $\sqrt{c_1}$ -el jelölhetjük.

---

[96] (a) Ezt valóban tudhatjuk, mégpedig több különböző forrásból:

1. A mértékgeometriából visszatekintve könnyű látni, hogy a kiegészítve-átdarabolhatóság implikálja az átdarabolhatóságot.

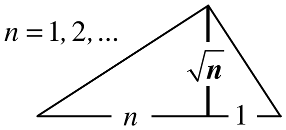
2. A 20. században ennek tiszta szintetikus geometriai bizonyításait dolgozták ki.

(b) A görög matematikában ezt az implikációt triviálisan igaznak tartották, a bizonyítás igénye nem merült föl, sőt: ezt a két különböző relációt fogalmilag nem is különböztették meg, még elnevezésben sem (mindkettőt „egyenlőség"-nek nevezték).

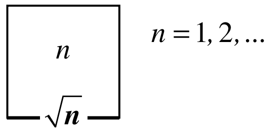
(c) Ez a feladat azt kívánja, hogy a görög matematika szellemében dolgozzunk.

1F.17 Ennek a feladatnak az a tárgya, hogy bebizonyítsuk (a szintetikus geometria keretein belül): Annak három különböző értelmezése, hogy az egységszakasz megválasztása után bizonyos szakaszokhoz a $\sqrt{n}$ szimbólumot rendelhetjük $(n = 1, 2, ...)$, páronként ekvivalens.

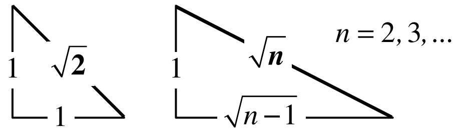
Ezek az értelmezések a következők (az 1F.17a,b,c ábrákon a háromszögek mind derékszögűek):



1F.17a ábra



1F.17b ábra



1F.17c ábra

Egy *s* szakaszhoz a $\sqrt{n}$ szimbólumot rendeljük $(n = 1, 2, ...)$, ha

(A) *s* annak a derékszögű háromszögnek az átfogóhoz tartozó magassága, ahol az átfogó szeletei az 1, *n* szakaszok (1F.17a ábra);

(B) *s* annak a négyzetnek az oldala, amely átdarabolható *n* db egységnégyzetbe (1F.17b ábra)[97];

(C) *s* annak a derékszögű háromszögnek az átfogója, amelynek a befogói az 1, $\sqrt{n-1}$ szakaszok (1F.17b ábra).

A (C) esetben a definíció *n* értéke szerinti rekurzióval történik, amelynek kiindulópontja a $\sqrt{2}$ szakasz meghatározása azon egyenlőszárú derékszögű háromszög átfogójaként, amelynek a befogói az egységszakasz példányai. A $\sqrt{1}$ itt is az egységszakasz másik jele legyen.

(A), (B) és (C) egyenértékűsége több különböző logikai séma szerint bizonyítható; a következőkben egy bizonyos implikációs diagram lépéseit tűzzük ki feladatul.

(a) Bizonyítsa be, hogy $(A) \Rightarrow (B)$!

(Útmutatás: Használja föl az 1F.16 tételnek azt a speciális változatát, amelyben $c_1 = 1$!)

(b) Bizonyítsa be, hogy $(B) \Rightarrow (A)$!

(Útmutatás: Lásd az előzőt.)

(c) Bizonyítsa be, hogy $(B) \Rightarrow (C)$!

(Útmutatás: Használja föl a pitagorász-tétel megfordítását!)

(d) Bizonyítsa be, hogy $(C) \Rightarrow (B)$!

(Útmutatás: A $\sqrt{2}$ esetében használja föl a pitagorász-tételt, a továbbiakban pedig teljes indukcióval járjon el!)

(e) Az (a), (b), (c) és (d) feladatok közül az egyikben önkéntelenül – hallgatólagosan –, de kikerülhetetlenül fölhasználjuk azt is, hogy egyetlen sokszög sem lehet átdarabolhatóan egyenlő egy valódi részével. („*Az átdarabolhatóság szigorú monotonitása*”; l. pl. az 1F.18 feladatot!)

Melyik az a feladat? Miért és hogyan szükséges ott ezt a tételt használni?

(f) Gondolja át és fogalmazza meg pontosan, hogy milyen viszonyban van a (B) ill. a (C) értelmezés a $\sqrt{n}$ 1.20 alatti szintetikus geometriai értelmezésével!

1F.18 Bizonyítsa be, hogy az átdarabolhatóság „szigorú monotonitása” ekvivalens Hilbertnek a 75. lábjegyzetben (1,21(b_2)) idézett tételének általános változatával. Részletesen:

(M) állítás. *Ha egy $\mathcal{A}$ sokszög valódi részként tartalmaz egy $\mathcal{B}$ sokszöget, akkor $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ nem lehet átdarabolhatóan egyenlő.*[98]

---

[97] Ilyen négyzet egyrészt *létezik* (lásd 1.20), másrészt *egyértelműen* létezik (lásd az 1F.18 feladatot!).

[98] Ez is azon elengedhetetlenül fontos tételek közé tartozik, amelyeknek bizonyítása a görög matematikában szóba sem jöhetett, hiszen Euklidész az Elemek I. könyvében axiómaként mondja ki, hogy „az egész nagyobb a résznél”. Igaz, hogy nehéz lett volna (Euklidész azonban elmulasztotta ellenőrizni, hogy a használt relációk – köztük az átdarabolhatóság – teljesítik-e az axiómákat; lásd bővebben a 2. füzetben). A mértékgeometriá-

(H) állítás. *Ha egy triangulált – azaz háromszögekre bontott – sokszögből elveszünk egy vagy több részháromszöget, akkor a maradék háromszögekkel nem tölthető ki az eredeti sokszög.*[99]

A bizonyítandó állítás tehát: (M) $\Leftrightarrow$ (H).

---

ban a szóban forgó tétel „nyílvánvalóan” igaz: Jelöljük $\mathcal{C}$-vel az $\mathcal{A}$ és a $\mathcal{B}$ idomok „különbség-idomát”; ekkor mindhárom idomnak *van* számszerű területe – egy-egy pozitív szám–, és $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}| + |\mathcal{C}| > |\mathcal{B}|$.

[99] Hilbert téglalapra mondta ki ezt a tételt (*Grundlagen der Geometrie* §21, 52. tétel, 79. o. az 1999-es, 14. kiadásban, §21, 32. tétel, 66. o. az 1909-es, 3. kiadásban), de a bizonyítás tetszőleges sokszögre érvényes.