Elemi matematika
Msc levelező matematika tanárszak
A tantárgy célja:

- A magyarországi feladatorientált matematikatanítási tradíciónak megfelelően az általános és középiskolai matematika tananyag jelentősebb témaköreiből válogatott tipikus feladatok jellegzetes megoldásainak áttekintése és a különböző megoldási módok összehasonlítása;
- a feladatmegoldó rutin fejlesztése;
- a problémaérzékenység fejlesztése;
- feladatmegoldások tanítási szempontokat figyelembe vevő leírásának gyakorlása.

Módszer:

Feladatok megoldása és a megoldások elemzése.

Követelmények:

- a foglalkozásokon való részvétel,
- a kitűzött feladatok megoldása és beküldése a megadott határidőig az msclevelemi@gmail.com címre,
- egy KöMaL feladat elemzésének beküldése december 17-ig az msclevelemi@gmail.com címre.

A kurzus zárthelyi dolgozattal zárul.

A gyakorlati jegy:

A gyakorlati jegy alapja a félév végén írt zárthelyi eredménye. A legalább elégséges gyakorlati jegy feltétele a követelmények teljesítése és a zárthelyi dolgozat legalább elégséges szinten való megírása.

A dolgozat hat feladatból fog állni, melyekkel a középiskolai legfeljebb érettségi szintű feladatok és az általános iskolai egyszerűbb versenyfeladatok megoldásának és a megoldások tanári szempontokat figyelembe vevő leírásának képességét kérjük számon.

A hat feladat közül legalább három az alábbiakban található gyakorló feladatok közül fog kikerülni.

A zárthelyi dolgozat eredményét – legalább elégséges dolgozat megírása esetén – a beküldött feladatok és az órai munka legfeljebb egy jeggyel módosíthatja, felfelé vagy lefelé egyaránt.

Az alábbiakban az egyes témakörökhöz a gyakorlásra szánt és a beküldendő feladatokat követően a feladatelemzés szempontjai találhatók.

1. témakör: aritmetika, elemi számelmélet, algebra
1.a Gyakorló feladatok
Aritmetika, elemi számelmélet

1. Béla egy papírlapot tetszőleges módon felosztott 7 részre. Az így kapott részek közül az egyik részt felosztotta 13 részre, majd a kapott részek egyikét ismét 7 részre, és így folytatta, arra sem ügyelve, hogy a 7, illetve a 13 részre osztást váltogatva végezze. Bizonyos számú osztás után megszámolta a kapott részeket, és azt állította, hogy 2007 részt kapott. Lehet-e, hogy jól számolt?
2. Helyezz a számok közé (ahol szükséges) műveleti jeleket, zárójeleket úgy, hogy az

eredmény 2009 legyen.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 2007

3. Előáll-e a 2007 szomszédos természetes számok összegeként?
   Hányféleképpen?
   Előáll-e szomszédos páros számok összegeként?
   Előáll-e szomszédos páratlan számok összegeként?
4. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, … , 2006, 2007 számokat (az első 2007 darab pozitív egészet). Ezek közül két tetszőleges számot letöröltünk, és helyettük a különbségüket írtuk fel. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg egyetlen szám marad. Páros ez, vagy páratlan?
5. Állapítsd meg, hogy az alábbi következtetések közül melyik helyes!
   a) $6 \mid x$ és $5 \mid x$ és $11 \mid x \Rightarrow 330 \mid x$
   b) $6 \mid x$ és $20 \mid x \Rightarrow 120 \mid x$
   c) $13 \mid 120x \Rightarrow 13 \mid x$
   d) $7 \mid x^2 \Rightarrow 7 \mid x \Rightarrow 49 \mid x^2$
   e) $15 \mid x^2 \Rightarrow 15 \mid x \Rightarrow 225 \mid x^2$
   f) $12 \mid x^2 \Rightarrow 12 \mid x \Rightarrow 144 \mid x^2$
   g) $11 \mid xyz \Rightarrow 11 \mid x$ vagy $11 \mid y$ vagy $11 \mid z$
   h) $15 \mid xy \Rightarrow 15 \mid x$ vagy $15 \mid y$
6. Keress olyan négyzetszámot, amelyben a számjegyek összege 150.
7. Tartalmaz-e a mindig eggyel több kettes számjegyet tartalmazó számok 2, 22, 222, 2222, … sorozata végtelen sok
   a) hárommal
   b) héttel
   c) kilenccel
   d) 111-gyel osztható számot?

   Figyeld meg ugyanezt, más számmal való oszthatóságokra is!
8. Hány 0-ra végződik a 100!?
9. Add meg prímtényezős alakban azt a legkisebb számot, melyre igaz az állítás:
   a) 5-tel osztható négyzetszám
   b) 10-zel osztható négyzetszám
   c) 21-gyel osztható négyzetszám
   d) 3-mal osztható páros négyzetszám
   e) 5-tel osztható 0-ra végződő négyzetszám
   f) 12-vel osztható köbszám
   g) 27-tel és 24-gyel osztható négyzetszám
   h) páros, 3-mal osztható, de 18-cal nem osztható négyzetszám
   i) 20-szal osztható és a duplája négyzetszám
10. Keress megfelelő m, n, k számokat, amelyekre az alábbi valamelyik feltétel teljesül!
   a) $(m\,;n) = 12$, $(m\,;k) = 80$ és $(n\,;k) = 77$
   b) $(m\,;n) = 21$ és $[m\,;n] = 3689$
   c) $(m\,;n) = 120$ és $5mn$ négyzetszám.
11. Bizonyítsd be, hogy ha egy ötjegyű szám osztható 271-gyel, akkor, ha néhány számjegyet levágunk a végéről és a szám elejére tesszük, az így kapott szám is osztható lesz 271-gyel.
12. Keressük meg 59-nek azt a legkisebb többszörösét, amely 4 darab 1-es számjegyre végződik!

13. Hat kosárban tojások voltak. Némelyikben tyúktojások, másokban kacsatojások. Az egyes kosarakban sorra 5, 6, 12, 13, 23 és 29 tojás volt. "Ha eladom ezt a kosár tojást, akkor kétszer annyi tyúktojásom marad, mint kacsatojásom." Melyik kosárra gondolt?

14. Milyen p prímszámokra igaz az, hogy akármilyen egész szám a,

$$(a + 1)^2 + (a + 2)^2 + \ldots + (a + p)^2$$ osztható p-vel?

15. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy szám páros osztóinak összege kisebb legyen a páratlan osztók összegénél?

16. Hány olyan különböző számpár van, amelyeknek legnagyobb közös osztója 7 és legkisebb közös többese 186 340?

17. a) Igaz-e az az egyiptomi észrevétel, hogy minden 0 és 1 közötti törtszám kifejezhető különböző véges sok törzstört összegeként, ahol a törzstört alatt 1 számlálójú törtet értünk? Legfeljebb hány tagú összeget kapunk, amikor ez sikerül?

b) Mutassa meg, hogy a k/n tört bármely $k < n$ esetén előállítható *pontosan n darab* különböző törzstört összegeként.

Az egységes érettségi feladatgyűjtemény

433, 437, 450, 460, 490, 495 sorszámú feladatai.

Algebra

Az egységes érettségi feladatgyűjtemény

566, 570, 641, 646, 650, 686, 707, 717, 724, 739, 744, 844, 850, 864, 875, 878, 908, 909, 582, 586b, 609, 611, 613, 699, 736, 745, 786, 787, 788, 819 sorszámú feladatai.

Szöveges feladatok:

1. Minden délben és éjfélkor egy-egy hajó indul el New Yorkból Lisszabonba s egy másik, ugyanazon az útvonalon, Lisszabonból New Yorkba. A hajóút pontosan nyolc napig tart. Múltkoriban ezzel a hajójárattal mentem New Yorkból Lisszabonba. Hány szembejövő hajót számolhattam meg? (Az induláskor érkező és az érkezéskor induló hajót is szembejövőnek tekintettem.)

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

2. Budapesttől Debrecen közelítőleg 200 km-re fekszik. Budapestről Debrecenbe és vissza-utazunk repülővel. A repülőgép sebessége 150 km/ó. Azt észleltük, hogy az utazás egész időtartama alatt egyenletesen erős, 30 km/ó gyorsaságú szél fújt Budapest- Debrecen irányban. Amíg Budapestről repültünk Debrecenbe, addig a szél elősegítette a repülést, sebességünket növelte. Visszafelé természetesen ugyanennyivel csökkentette a szél a sebességünket. Végeredményben tehát az utazás időtartamát nem változtatta meg a szél sebessége. Helyes a végkövetkeztetésünk?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

3. Egy felderítő repülőgép szélcsendes időben óránként 220 mérföldet repül. Üzemanyaga 4 órányi repüléshez elegendő. Milyen messze repülhet, hogy kockázat nélkül vissza is térhessen,

a) ha óránként 20 mérföld sebességű ellenszélben indul?

(Pólya György: A problémamegoldás iskolája)

b) ha óránként 20 mérföld sebességű hátszélben indul?

c)** ha óránként 20 mérföld sebességű, tetszőleges irányú, szélben indul? Melyik esetben jut legmesszebb?

4. Egy állásra három fiatalember pályázott. A felvételt intéző tesztviselő csak egy kérdést tett fel nekik. - Mint tudják, a kezdő fizetés havi 1000 forint, amit félhavi részletekben fizetünk ki; ha azonban munkájuk megfelel, fizetésüket minden hónapban emeljük. Mit kívánnak

Önök inkább? Azt, hogy fizetésüket havi 15 forinttal, vagy azt, hogy félhavonkénti 5 forinttal emeljük? Két pályázó rögtön az első lehetőséget választotta, míg a harmadik kis gondolkodás után a második lehetőség mellett döntött. Őt vették fel. Miért?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

5. Megérkezvén a szállodába, három amerikai kényelmes szállást kér a tulajdonostól; egy háromszobás lakosztályt rendeltek. 30 dollárért felkínáltak nekik egy gyönyörű lakosztályt, s a turisták felmentek, hogy megnézzék. Megfelelőnek találtak mindent, s így fejenként 10-10 dollárt összeadtak, s átnyújtották az őket felkísérő háziszolgának. Mikor a háziszolga átadta a tulajdonosnak a 30 dollárt, az akkor jött rá, hogy tévedett; a háromszobás lakosztály ára csak 25 dollár. Így a háziszolgával visszaküldött 5 db egydollárost. A háziszolga felfelé menet arra gondolt, hogy nehéz volna az 5 egydollárost három ember között szétosztani, s ezért kettőt zsebre vágott s a három turistának 1-1 dollárt adott vissza. Így mindenki 9 dollárt fizetett. Mivel $3 \cdot 9 = 27$ dollár; két dollár a háziszolga zsebében maradt, s ez összesen $27 + 2 = 29$ dollár, pedig eredetileg hárman 30 dollárt adtak össze. Hová tűnt a harmincadik dollár?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

6. a) Az asztalon áll két egyforma pohár. Az egyikben tiszta víz, a másikban pontosan ugyanolyan mennyiségű bor van. Egy kiskanál bort átteszünk a másikba, jól összekeverjük, majd ugyanazzal a kiskanállal egy kiskanálnyi keveréket visszateszünk a borospohárba. Az a kérdés, hogy a vizespohárban lesz több bor, vagy a borospohárban lesz több víz?
   b) Az asztalon áll egy pohár, színültig tele narancslével. A folyadék tetején jégkockák úsznak, mint tudjuk, körülbelül egy tized részük a víz felett van. Ebből természetesen következik, hogy ha hagyjuk elolvadni a jégkockákat, akkor az ital már nem fog beleférni a pohárba, kicsordul belőle. Vagy mégsem?
   c) Egy csónakban nagy kő van. A halász beevez a tóba, majd a tó közepén kidobja a követ a csónakból a tavacskába. Vajon változik-e ettől – akár csak kicsi mértékben is – a tó szintjének magassága?

7. Amikor Mr. és Mrs. Smith repülőre szálltak, csomagjaik összsúlya 94 font volt. A férj 1,50 \$-t, a feleség 2 \$-t fizetett a túlsúlyért. Ha Mr. Smith egyedül repült volna kettőjük csomagjával, akkor 13,50 \$-t kellett volna fizetnie. Hány font súlyú csomagot vihetett ezen a járaton egy személy magával ráfizetés nélkül?

(Pólya György: A problémamegoldás iskolája)

8. Egy apa vagyona négy fiára maradt. Fiai a következőképp osztották el egymás közt a vagyont: Az elsőé legyen 3000 livres-rel kevesebb, mint a vagyon fele. A másodiké legyen 1000 livres-rel kevesebb, mint a vagyon harmada. A harmadiké legyen épp a vagyon negyede. A negyediké legyen 600 livres-rel több a vagyon ötödénél. Mekkora volt a vagyon, és mennyi jutott egy fiúra?

(Pólya György: A problémamegoldás iskolája)

   ** Észreveheted, hogy a végén mindenki éppen ugyanannyi pénzt kapott. Általánosítsd a feladatot!

9. Egy apa számos gyermeket hagyott hátra, és így végrendelkezett a vagyonáról: Az elsőé legyen 100 korona és a maradék tizede, a másodiké legyen 200 korona és a maradék tizede, a harmadiké legyen 300 korona és a maradék tizede, a negyediké legyen 400 korona és a maradék tizede, és így tovább. A végén kiderült, hogy mindegyik gyermekének ugyanannyi jutott. Mekkora volt a vagyon, hány gyermeke volt, és mindegyiknek mennyi jutott?

(Pólya György: A problémamegoldás iskolája)

   **Általánosítsd a feladatot!

10. A sakktáblám mellett voltam, oldalamnál fiam és lányom ültek. A kislány számtan házi feladatán dolgozott, írásbeli osztásokat kellett gyakorlásul elvégeznie. Míg pár pillanatra kiment a szobából, kis öccse nagy szolgalommal kezdte az osztás szemjegyeit sakkfigurákkal lefedni. Mire odanéztem, már csak két számjegy maradt szabadon. A következő ábrát láttam:

$$
\begin{array}{l}
p_v\,p_v\,p_v\,p_v\,p_v\,p_v\,p_v : h_v h_v = b_v\,f_v\,8\,f_v\,b_v \\
\underline{k_v\,p_s\,n_s} \\
f_s\,f_s \\
\underline{b_s\,b_s} \\
p_s\,p_s\,p_s \\
\underline{p_s\,p_s\,p_s} \\
1
\end{array}
$$

(A p_v h_v b_v f_v k_v n_s f_s b_s jelek a világos, illetve sötét paraszt, huszár, bástya, futár, király, királynő helyét jelzik. Semmi jelentőségük nincs, azon kívül, hogy eltakarják az alattuk álló számot.) Ha lesöpröm az asztalról a figurákat, a fiam kezd el bömbölni, ha rajtahagyom, leányom méltatlankodik majd a megzavart házi feladat miatt. Mit tehettem mást, nekifogtam, hogy a figurák elmozdítása nélkül kitaláljam, mi volt az osztás. Mire leányom visszajött, egy másik papírra leírtam neki, meddig jutott el az osztásban. Mint látják, Sanyi, ha nem is biztos, hogy jó pedagógus, de jó rejtvényfejtő s ez hozzásegítette egy családi vihar elkerüléséhez. Vajon mi is meg tudtuk volna ezt tenni helyében?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

11. – Nos – mondta a szállítmányvezető a helyettesének –, mint tudja, a szállítmányt 1000 mérföldre kell elvinnünk. Mibe fog ez kerülni?

– Ez sokban függ a szállítási sebességtől – szólt a válasz. – Az alapdíj mérföldenként 1 font s a pótdíj, 10 mérföld/óra felett a sebesség minden mérföld/órája után, természetesen szintén mérföldenként, egy shilling. Így pl. ha 20 mérföld/ órával megyünk, akkor 1 font 10 shillinget kell fizetnünk egy-egy mérföld útért. (20 shilling 1 font).

– Tehát akkor legjobb, ha 10 mérföld/órával megyünk?

– Nem egészen, elfelejti, hogy minden 20 órán felüli óráért, ameddig a szállítás tart, 25 font bánatpénzt kell fizetnünk. Mi a szállítmány optimális sebessége?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

12. Cambridge-ből Northyba két mérföldes szerpentin autóút vezet; az út első mérföldje nehéz hegyi úton a Northy feletti magas hegy tetejére vezet s a második mérföldön ereszkedik alá Northyba. Egy neves autóversenyző vállalkozott arra, hogy a rendkívül nehéz terep ellenére 30 mérföld/óra átlagsebességgel jut el Cambridbe-ből Northyba. A felfelé vezető úton, mint ahogy azt a hegy tetején elhelyezkedő megfigyelők konstatálták, csak 15 mérföld/óra sebességgel tudott haladni, mégis csak alig néhány másodperces késéssel ért Northy városába. Harmadnap temették. Ugyan miért halt meg?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

13. Caius és Sempronius közös lakomát rendeztek. Erre Caius 7, Sempronius pedig 8 tál ételt hozott. Váratlan vendégként megérkezett Titus is, s egyenlően megosztották az ételt egymás közt. A Titus által elfogyasztott étel 30 dénárius értékű volt, s így Titus ezt mondta: – A hozott ételmennyiség aránya 7 : 8, ebben az arányban osztom el a pénzem. S fizetett Caiusnak 14 és Semproniusnak 16 dénáriust. Sempronius azonban tiltakozott a pénz ilyen felállása ellen, s mivel társai nem hallgattak rá, a bírósághoz fordult. Mi volt a bíróság helyes ítélete?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

14. Tomi – ismervén gyöngémet a kevés számot megadó szorzás-rejtvények iránt – születésnapomon az ábrán látható rejtvénnyel lepett meg.
– Az o betű mindenütt ugyanazt a számjegyet jelöli, s egyetlen x sem lehet o betű. Nem nehéz a rejtvény, ha igyekszel, talán a következő születésnapodra kész is leszel.
Hát azért olyan sokáig nem tartott. Remélem, önök is hamarabb elkészülnek vele!

```
xxoxxxo·xxxxox
xxxoxxxx
 xxoooxox
  ooxxoxxo
    xxoxxxo
     xxxxxxxx
      xoxxxxxx
 oxxoxxxxoxxxx
```

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

15. Edison híres volt elmés technikai megoldásairól. Egyszer egy vendége azonban így panaszkodott neki.
– Nehezen nyílik a kapud. Te, aki egy technikai zseni vagy, miért nem javítod meg?
Edison így válaszolt:
– A kapum nem véletlenül nyílik nehezen. Ugyanis minden ember, aki kinyitja, 15 liter vizet pumpál fel a ciszternámba. Éppen ellenkezőleg, azt tervezem, hogy a jelenlegi pumpát kicserélem, úgy, hogy minden ajtónyitáskor 20 liter víz jusson a ciszternába. Ha ezt megtenném, akkor hattal kevesebb vendég elég lenne a ciszterna feltöltéséhez.
a) Hány literes Edison ciszternája?
b) A feladat számadatai: 15, 20 és 6. Diszkutáld a feladatot, állapítsd meg, hogyan lehet ezeket az adatokat megválasztani, hogy a feladatnak legyen megoldása.
c) A rendszerbe természetesen egy túlfolyó is bele volt építve, tehát ha már tele volt, akkor a pumpa kikapcsolódott. Tegyük fel, hogy a ciszterna 500 literes volt, hogyan lehet a feladatban szereplő adatokat megadni úgy, hogy legyen megoldás.

16. Ha kilenc kályhában öt és fél nap alatt tizenkét köbméter bükkfa ég el, mennyi nap alatt ég el tizenkét kályhában kilenc köbméter bükkfa?

(Karinthy Frigyes: Tanítom a kisfiamat)

17. Egy asszony a piacon az első vevőnek eladta a tojásai felét meg egy fél tojást, a másodiknak a megmaradt tojások felét meg egy fél tojást, a harmadiknak az ezután megmaradt tojások felét meg egy fél tojást. Ezek után a megmaradt egy tojással hazaballagott. Hány tojást vitt a piacra, ha tudjuk, hogy ehhez egyetlen tojást sem kellett feltörnie?

18. Egy asszony a piacon az első vevőnek eladta a tojásai felét meg egy fél tojást, a másodiknak a megmaradt tojások harmadát meg egy harmad tojást, a harmadiknak az ezután megmaradt tojások negyedét meg egy negyed tojást. Ezek után a megmaradt … tojással hazaballagott. Mi állhat a három pont helyén, ha mindeközben egyetlen tojást sem kellett feltörnie?

19. Hét ember elmegy kókuszdiót gyűjteni. Találnak is jó sokat, de rájuk esteledik, így az osztozkodást reggelre hagyva lefekszenek aludni. Éjszaka egyikük felébred, s nem bízván a társaiban, egymaga kívánja 7 részre osztani a dió-kupacot. Ezt 1 maradékkal meg is tudja tenni. Az "egy heted" részt eldugja, a maradékot a fa tetején figyelő majomnak dobja, s visszafekszik aludni. Az éjszaka során mind a 6 társa egymás után ugyanígy jár el (mindig 1 dió marad), s reggel – mintha éjszaka mi sem történt volna – közösen is elosztják a kupacot (s az 1 maradékot a majomnak adják). Legalább hány diót gyűjtöttek összesen?

20. Egy vándor szállást kér egy fogadóban. Nincs pénze, csak egy aranylánca, amely 100 láncszemből áll. A fogadós minden ott töltött éjszakáért egy láncszemet kér. A vándor beleegyezik azzal, hogy minden éjszakát másnap reggel fizet ki, és nem fizet előre. Legkevesebb hány láncszemet és melyeket kell elvágni ahhoz, hogy a vándor mind a 100 napot pontosan ki tudja fizetni. (A fogadós visszaadhat láncszemeket, és az elvágott láncszemek is teljes értékűek.)

21. Helyezd el az 1, 2, 3, 4, 5 feliratú kártyákat a kijelölt □□□:□□ helyekre úgy, hogy a hányados – a lehető legkisebb legyen
– a lehető legnagyobb legyen
– a lehető legközelebb legyen a 30-hoz
– a lehető legkisebb kétjegyű szám legyen
– az osztásnak ne legyen maradéka

(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 5. osztály)

22. Ezekben a műveletsorokban valaki kiradírozta a zárójeleket, ezért majdnem mindegyiknek rossz az eredménye. Írd vissza a zárójeleket – ahol szükséges – úgy, hogy igazak legyenek az egyenlőségek!

$5 + 6 \cdot 3 : 11 + 7 = 10$ $\qquad$ $5 + 6 \cdot 3 : 11 + 7 = 6$

$27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 77$ $\qquad$ $27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 101$

$27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 2$ $\qquad$ $27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 130$

$27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 62$ $\qquad$ $39 - 27 : 3 : 3 + 1 = 1$

(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 5. osztály)

23. Melyek azok a háromjegyű számok, melyekben a jegyek összege 18, százasokra kerekített értékük 900 és a jegyeik között vannak egyformák?

(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 5. osztály)

24. Színezd be a koordinátasík azon pontjait, melyek koordinátáira:

$x = |y|$ $\quad$ $x : |x| = y : |y|$ $\quad$ $x + |x| = y + |y|$ $\quad$ $y = [x]$ $\quad$ $x = [y]$ $\quad$ $[x] = [y]$

$x - [x] = y - [y]$ $\quad$ $x - [x] > y - [y]$ $\quad$ $(x - y)(x - 2y) = 0$

(Gelfand et al.: Koordinátamódszer)

25. Egy egységnyi oldalú négyzet oldalait 2, 3, 4 illetve öt egyenlő részre osztottuk fel és a csúcsokhoz legközelebbi osztópontokat összekötve, levágtuk a négyzet sarkait. Mekkora a maradék területe?

(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 7. osztály)

** Általánosítsd a feladatot!

26. Egy kétjegyű számból kivontuk a jegyek felcserélésével kapott számot, és így 27-et kaptunk. Azt is eláruljuk, hogy a szám jegyeinek különbsége 3. Melyik ez a szám?
**Milyen más számok állhatnak 27 és 3 helyén, hogy a feladatnak legyen megoldása?

27. A $26 \cdot 93$ szorzat különleges. Ha a szorzótényezőkön belül a számjegyeket felcseréljük, akkor a $62 \cdot 39$ szorzatot kapjuk, amelynek értéke meglepő módon megegyezik az eredetiével, $26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$. Mi a „titka” ezeknek a számoknak? Keress más ilyen szorzatokat!

(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 8. osztály)

28. Görögországi nyaraláskor egy 86 fős turistacsoport két részre oszlott aszerint, hogy ki melyik programot választotta. Az egyik csoport meglátogatta a híres Meteora kolostorokat, a másik csoport a tengerparti fürdőzést választotta. A Meteorákhoz ment a társaság nagyobbik fele. A következő állítások mindegyike igaz, de nem áruljuk el, hogy a fürdőzőkről, vagy a kirándulókról szól-e. Írj melléjük F vagy K betűt aszerint, hogy melyik szól a fürdőzős csoportról, és melyik a kirándulós társaságról!

□ Ehhez a társasághoz tartozó emberek számának a negyedrésze is több mint a másik társaság létszáma.

□ Ebben a társaságban 6-szor annyi nő van, mint férfi.

□ Ebben a társaságban csak házaspárok vannak.

- Ennek a társaságnak a létszáma osztható 4-gyel.
- Ennek a csoportnak a létszáma 9-cel osztható szám.
- Ebben a társaságban az emberek száma 7 többszöröse.
- Ebben a társaságban 8-szor annyian vannak az 50 év alattiak, mint az 50 évnél idősebbek. Tudod-e, hogy melyik csoportban hányan vannak?

(Korgyemszkij: Matematikai fejtörők)

29. Két motorkerékpár egy időben indult el kirándulni. Egyenlő távolságot tettek meg, és egy időben is érkeztek haza. Az úton mindketten megpihentek. Annyit tudunk, hogy az egyik kétszer annyi ideig volt úton, mint amennyit a másik pihent, a másik pedig háromszor annyit volt úton, mint amennyit az első pihent. Melyik haladt gyorsabban?

(Korgyemszkij: Matematikai fejtörők)

30. Egy tartályba egy kék, egy piros és egy zöld csapon át engedhetünk vizet. A piros csap egyedül 3 ára alatt tölti meg a tartályt. A piros és a kék csap együtt 2 óra alatt, a három csap együttesen 1 óra alatt tölti meg a tartályt. Hány óra alatt töltik meg ezek a csapok külön-külön a tartályt?

(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 8. osztály)

31. Valaki 5 órán keresztül gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, aztán megfordult és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 km-t tett meg óránként. Mekkora utat járt be? Elegendők az adatok a megoldáshoz? Miért? Elemezd a kérdést.

(Pólya: Problémamegoldás iskolája I)

32. Néhány kereskedőnek 8240 korona közös tőkéje van; mindegyikük negyvenszer annyi koronát ad az üzletbe, mint ahányan társultak, és az egész összeghez annyi százalékot nyernek, mint ahányan vannak. Ha a hasznot felosztják, mindegyikük tízszer annyi koronát kap, mint ahányan vannak, és még megmarad 224 korona. Számítsuk ki hányan társultak!

(Euler)

33. Egy 3 km hosszú villamos-vonal két végállomásáról 5 percenként egyszerre indítanak egy-egy villamost. A villamosok menetideje 10 perc. Az egyik villamos indítása után 2 perccel egy gyalogos elindul a sínek mentén és 45 perc múlva ér a másik végállomásra.
a) Útközben hány szembejövő villamossal találkozik?
b) Hány vele egy irányba haladó előzi meg?

34. Oldd meg az alábbi egyenleteket:
a) $\sqrt{2x+20}+\sqrt{1-x}=5$; b) $\sqrt{x+5}=x^2-5$; c) $x^2-24x+142=\sqrt{x-10}+\sqrt{14-x}$;
d) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$; e) $\sqrt{x+4p+16}=2\sqrt{x+2p+4}-\sqrt{x}$, ahol p valós paraméter. Milyen p értékekre van megoldás?

35. Milyen a paraméter érték esetén teljesülnek minden x-re a következő egyenlőtlenségek?
a) $(a-3)\,x^2-(a+2)\,x+a+5\geq 0$
b) $(a+3)\,x^2-6\,x+a-5\leq 0$

36. Mely valós számhármasok elégítik ki a következő egyenletrendszert?

$$\frac{xy}{5x+4y}=6;\qquad \frac{xy}{3x+2z}=8;\qquad \frac{yz}{3y+5z}=6\qquad (x,y,z\neq 0)$$

37. Határozd meg $\frac{a+b}{a-b}$ értékét, ha $2a^2+2b^2-5ab$ és $b\geq a\geq 0$!

38. Az $x^3+px+q=0$ egyenletben p és q valós számok, $q\neq 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei legyenek a, b, c. Írja fel azt az egyenletet, amelynek gyökei: $(a-b)^2$, $(b-c)^2$ és $(c-a)^2$!

39. A k paraméter mely értékei mellett lesz az $x^2 - (3k - 11)\,x + 2k^2 - 19k + 40 = 0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege minimális?

40. Van két edényünk. Az egyik 8 literes és tele van 87,5 %-os alkohollal; a másik 10 literes és üres. Az első edényből áttöltünk valamennyi alkoholt a másodikba, majd feltöltjük vízzel. Ezzel a keverékkel újra teletöltjük az első edényt. Így ott 70 %-os alkohol keletkezik. Határozza meg, hogy először mennyi alkoholt öntöttünk át a második edénybe!

41. 50 csavar annyiba kerül, ahány csavart 7200 Ft-ért kapunk. Mennyibe kerül egy csavar?

42. Egy munka elvégzésére három gépet használnak. Ezt a munkát az első és a második együtt 7,2 nap; az első és a harmadik együtt 9 nap; a második és a harmadik gép együtt 12 nap alatt végezné el. Hány nap alatt végeznék el a munkát külön-külön?

43. Egy apa oly módon kívánja gyermekét biztosítani, hogy az 25 éves korától kezdve 15 éven át évi előleges 1500 Ft-ban részesüljön. Mekkora összeget kell evégből a gyermek születésekor a takarékpénztárba tenni, ha az összetett kamatok kamatlába 4%?

(*érettségi feladat 1893 budapesti V. kerületi állami főreáliskola*)

44. A pedagógus szakszervezet azért küzd, hogy a következő öt évben a tanárok fizetése egyenletesen évente 5%-kal növekedjen.
   a) Ha ma valakinek 50 000 Ft a fizetése, akkor mennyi lesz három, illetve öt év múlva, ha a kormányzat teljesíti a követelést?
   b) Mennyi idő alatt duplázódna meg a pedagógusfizetés, ha ez a növekedési tendencia állandó maradna?

45. Az élő szervezetek anyagcseréjük során folyamatosan vesznek fel a környezetükből – és aztán le is adnak – különböző szénvegyületeket. A légkörben – és így minden élő szervezetben – állandó a radioaktív C_{14} szénizotóp aránya, amelynek felezési ideje 5760 év. Egy szervezet halála után a benne levő C_{14} izotóp exponenciálisan csökken. Egy babiloni város ásatásakor, amelyet Hammurabi király idejében építettek, találtak egy fadarabot, amelyben már csak 64%-a található az eredeti (állandó) C_{14} izotópnak. Ennek alapján mikor élhetett körülbelül Hammurabbi király?

(Egységes érettségi feladatgyűjtemény)

46. A légnyomás a magassággal exponenciálisan csökken, és körülbelül 5500 m magasan éri el a tengerszinten levő légnyomás felét. a) Adja meg a légnyomás értékét h a tengerszint feletti magasság függvényében. b) Ha a tengerszinten a légnyomás egységnyi (kb. 10^5 Pa, vagy régies mértékegységekkel 1000 mbar, 1 atmoszféra, 760 Hgmm), akkor mennyi a nyomás a Mountblanc, a Kilimandzsáró, illetve a Mount Everest csúcsán? A fenti hegyek tengerszint feletti magassága rendre: 4807 m, 5895 m, illetve 8848 m.

47. A 137-es cézium felezési ideje kb. 30 év.
   a) Adja meg a bomlási képletet $N(t) = N0 \cdot e^{-\lambda t}$ alakban!
   b) Mikorra fog a csernobili baleset okozta cézium szennyeződés a maximális érték 10%-ára csökkenni?

48. Manapság egyre gyakrabban használnak információátvitelre üvegszálból készült kábeleket a korábbi drótkábel és árammal történő információátvitel helyett. A fény intenzitása az üvegszálon történő haladás közben exponenciálisan csökken. Egy különlegesen tiszta üvegszálon 100 m haladás alatt a fény intenzitása 0,2%-kal csökken.
   a) Adja meg a forrástól d távolságra az üvegszálban a fényintenzitás, ha d-t km-ben mérjük.
   b) 12 km hosszan hány százalékára csökken az intenzitás? c) Mekkora távolságra kell fényerősítőket beépíteni az üvegszálas kábelbe, ha a besugárzott fényintenzitásának legalább 20%-a el kell hogy érje az erősítőt, ahhoz, hogy a hibákat elkerüljük?

(Egységes érettségi feladatgyűjtemény)

49. Kölcsönt szeretnék felvenni lakásvásárláshoz. Szükségem lenne 1 000 000 Ft-ra. Két bankot kerestem fel. Az egyik azt hirdeti, hogy különösen kedvező, mindössze 9%-os évi kamatra ad kölcsönt és legfeljebb 5 év futamidővel. A másik bank évi 19%-os kamat mellett ad kölcsönt, ugyanakkora 5 éves futamidővel. A beszélgetés során kiderül azonban, hogy a két bank másként számol. Az első bank számítási eljárása a következő: Kiszámítja, hogy az 1 000 000 Ft mennyit érne 5 év múlva a 9%-os kamatos kamatszámítással. Ezt az összeget fizetteti vissza 60 hónap alatt, tehát a kamatos kamattal kapott összeg 60-adrésze a havi törlesztő részlet. A másik bank eljárása a szokásos: Az évi kamatból kiszámítják a havi kamatot, s minden hó végén megnézik a mérleget, az aktuális tartozásomat felszorozzák a havi kamattal, s levonják az aktuális havi törlesztő részletet. Ez az eljárás 60 hónap alatt kell, hogy 0-ra fusson, tehát elfogyjon a tartozásom.

a) Mekkora havi részletet fizetnék az első banknál?

b) Mekkora a havi részlet a második banknál?

c) Tényleg különösen kedvező az első bank? Mi a véleménye a két eljárásról?

1.b Beküldendő feladatok:

1.b 1. Melyik a legkisebb pozitív egész szám, amely csak 0 és 1-es számjegyet tartalmaz és osztható 792-vel?

1.b 2. a) Határozza meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $3x^2 - 5x + k = 0$ másodfokú egyenlet valós gyökeinek aránya 3 : 4 legyen!

b) Határozza meg a $7x^2 - 4x - 1 = 0$ egyenlet gyökeinek négyzetösszegét a gyökök kiszámolása nélkül!

1.b 3. Az aritmetikai-számelméleti gyakorló feladatok közül a 3-as sorszámú.

1.b 4,5,6. A szöveges feladatok közül a 7-es, 16-os és 42-es sorszámúak

Határidő: szeptember 27.

2. témakör: A matematikai analízis elemei, függvényvizsgálat elemi eszközökkel és differenciálszámítás segítségével

2.a Gyakorló feladatok

1. a) Ábrázolja az f: $x \to 2x$, illetve a g: $x \to 2^x$ függvényeket, az $0 < x < 6$ intervallumon.

b) Ha x = 1, 2, 3, 4, ..., akkor milyen sorozatot alkotnak az $f(1)$, $f(2)$, ... $f(10)$, illetve a $g(1)$, $g(2)$, ..., $g(10)$ számok?

c) Mennyi az összege az első 10 elemnek (x = 10-ig) az első, illetve a második esetben?

d) Megbecsülhető a grafikonról a két összeg viszonya?

2. Egy színházteremben, amelyik felülről nézve egy körgyűrű-cikk, a következőket tudjuk az ülőhelyekről. Az első sorban 18 hely van, utána minden sorban 3-mal több, és 24 sor van. Minden sor 20 cm-rel magasabban van, mint az előző.

a) Hány férőhelyes a színház?

b) Mennyivel van magasabban az utolsó sor, mint az első?

3. Egy négyzet alapú piramis építéséhez egyforma kőtömböket használtak. Felfelé haladva minden sorba eggyel kevesebb kőtömb kerül.

a) Hány sor van egymás fölött, ha egy kőtömb magassága 80 cm, és a piramis egyetlen záróköve a tetején 42,4 méter magasan van?

b) Hány kőtömb határolja a piramis felületét?

4. Állapítsuk meg az $y=\dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$ függvény minimumát és maximumát!

5. Szeretnénk egy 80 x 80 cm-es kartonból dobozt készíteni. Mekkora lehet a legnagyobb térfogatú doboz? Mi a helyzet, ha a karton mérete 80 x 120 cm?

6. Henger alakú, adott vastagságú fémdobozba pl. üdítőitalt akarunk tölteni. Milyen méretű hengert válasszunk,
   a) ha éppen 1 liter térfogatút akarunk?
   b) ha környezetvédelmi okokból a legkevesebb hulladékra törekszünk és a legkevesebb fémet akarjuk felhasználni?
   c) ha csak fél literes az ital (pl. Coca Cola)?
   d) Ilyenek a „valóságban" ezek az üdítők? Ha nem, vajon miért nem?

7. Adott kerületű háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe? Mi a helyzet négyszögek esetén?

8. Bizonyítsa be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll az $a+2b+3c \geq 14$ egyenlőtlenség, akkor érvényes az $a^2+b^2+c^2 \geq 14$ egyenlőtlenség is. Mikor áll fenn egyenlőség?

9. Bizonyítsa be, hogy ha $a + b = 1$, és a, b pozitívak, akkor $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2+\left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2 \geq \dfrac{25}{2}$.

10. Igazolja, hogy $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 2$ fennáll minden pozitív egész n-re.

11. Határozza meg az $S=\dfrac{a}{a+b+d}+\dfrac{b}{a+b+c}+\dfrac{c}{b+c+d}+\dfrac{d}{a+c+d}$ kifejezés értékkészletét, ha a, b, c, d pozitív számok!

12. Vizsgálja meg az $f(z)=\left(\dfrac{x_1^{\,z}+x_2^{\,z}+\ldots+x_n^{\,z}}{n}\right)^{1/z}$ függvény monotonitását, ha $x_1, x_2, \ldots x_n$ pozitív számok, z pedig tetszőleges nullától különböző valós szám. Mivel egyenlő $f(-1)$, $f(1)$, $f(2)$? Mennyi $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ értéke? Mit jelent a függvény monotonitása?

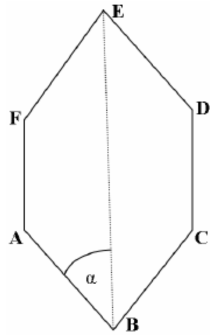
13. Adja meg az alábbi függvények szélsőértékeit:
    a) $F(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+3}$; b) $G(x)=\dfrac{1}{x^2+2x-3}$; c) $H(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$.

14. Határozza meg az alábbi függvény minimumát: $f(x)=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(b-x)^2+c^2}$, ahol a, b, c adott pozitív számok.

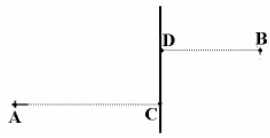
15. Mekkora az $a^6 + b^6$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értéke, ha a és b olyan valós számok, amelyekre $a^2 + b^2 = 1$?

16. Adott felszínű téglatestek (dobozok) közül melyikbe fér a legtöbb „töltelék", azaz melyiknek van legnagyobb térfogata?

17. Egy kartonból készült, harmonikaszerűen mozgatható tartót használunk növények felnevelésére. Egy „cella" hatszög alakú, minden oldala 3 cm. Szimmetria miatt, mindössze egyetlen szögtől függ a cella területe (lásd az ábrát).
    a) Hány fokos az α szög, ha a BE távolság 4 cm?
    b) Igazolja, hogy a cella területét az alábbi formula adja:
    $T = 18\cdot\sin\alpha + 18\cdot\sin\alpha\cos\alpha$.
    c) Milyen α értékre maximális a terület?
    Milyen hatszöget kapunk ekkor?



18. Valaki szeretne az ábrán látható *A* pontból *B*-be eljutni. Az elválasztó vonaltól balra a sebessége: 6 km/h, jobbra 3 km/h. Milyen útvonalon menjen, hogy a legrövidebb idő alatt érjen *A*-ból *B*-be? *AC* = 4km, *BD* = 3km, *CD* = 2km.



Az egységes érettségi feladatgyűjtemény

1069, 1079, 1298, 1303, 1304, 1364, 1368, 1369 sorszámú feladatai.

2.b Beküldendő feladatok:

2.b 1. Egy patak partján el akarunk keríteni egy téglalap alakú részt. A kerítésből 400 méternyi anyagunk van. Hogyan kell az elkerített téglalap oldalait megválasztani, hogy a terület maximális legyen

a) ha a part mentén is szeretnénk kerítést,

b) ha a part mentén nem kell kerítés?

2.b 2. a) Lehet-e egy minden valós számon értelmezett szigorúan monoton függvény páros, illetve páratlan?

b) Lehet-e egy minden valós számon értelmezett pozitív értékű függvény páros, illetve páratlan?

c) Lehet-e egy páros, illetve páratlan függvénynek pontosan 1, 2, 3… szélsőértékhelye?

2.b 3. A gyakorló feladatok közül a 4-es sorszámú.

Határidő: október 30.

3. témakör: elemi geometria

3.a Gyakorló feladatok

1. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóján vegyük fel a D és az E pontokat úgy, hogy AC = AD és BC = BE legyen. Mekkora az ECD szög?
2. Egy ABD háromszög szögei rendre α, β, γ. Mekkora szöget zár be egymással
   a) az A és B csúcsokból induló szögfelezők
   b) az A és B csúcsokból induló magasságvonalak
   c) Az A csúcsból induló szögfelező és magasságvonal.
3. Egy ABC háromszögnek adott az AB oldala, valamint tudjuk, hogy a háromszög A illetve B csúcsából induló szögfelezők 120°-os szöget zárnak be egymással. Szerkesztendő a háromszög körülírt köre!
4. Adott egy ABC háromszög k körülírt köre és ezen rögzítve az A és B csúcsok.
   Szerkesztendő a) a beírt körök középpontjainak mértani helye,
   b) a magasságpontok mértani helye,
   c) a súlypontok mértani helye,
   ha a C csúcs körbefut a kör kerületén.
5. Mutassa meg, hogy a háromszög ugyanazon oldalhoz tartozó szakaszfelező merőlegese és szögfelezője a körülírt körön metszi egymást.
6. Az ABC szabályos háromszög körülírt körén felveszünk egy D pontot a C-t nem tartalmazó AB köríven. Mutassa meg, hogy a DC = DA + DB!
7. ABC háromszög körülírt körének középpontját jelölje O. Mutassa meg, hogy az A csúcsból induló szögfelező felezi a magasságvonal és az AO sugár által bezárt szöget!

8. Az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelező a BC oldalt a D pontban, az AD szakasz felezőmerőlegese az AC oldalt az E pontban metszi. Az E pontra illeszkedő és az AD-vel párhuzamos egyenes a BC oldalt az F pontban metszi.
   a) Bizonyítsa be, hogy az ED párhuzamos az AB-vel!
   b) Igaz-e, hogy az EF felezi a CED szöget?
9. Egy ABC háromszög C csúcsából merőlegeseket bocsátunk az A illetve B csúcsokból induló külső és belső szögfelezőkre. Mutassuk meg, hogy az így nyert négy merőleges talppontjai egy egyenesen vannak!
10. a) Igaz-e, hogy ha két háromszögben van két-két azonos hosszúságú oldal és van egy-egy azonos nagyságú szög, akkor egybevágóak?
    b) Igaz-e, hogy ha két háromszögben van két azonos hosszúságú oldal és két azonos nagyságú szög, akkor egybevágóak?
    c) Lehet-e egy ponthalmaz egybevágó a részhalmazával?
11. Adott egy AB szakasz. Színezd a sík azon pontjait pirosra azokat a pontokat, melyekre ABC háromszög derékszögű, kékre azokat a pontokat, melyekre ABC háromszög hegyesszögű és zöldre azokat a pontokat, melyekre ABC háromszög tompaszögű.
12. a) Egy egyenlőszárú háromszög alapján felvett tetszőleges P pontból párhuzamosokat húzunk, melyek a szárakat X és Y pontokban metszik. Mutassa meg, hogy PX + PY nem függ a P pont megválasztásától.
    b) Egy egyenlőszárú háromszög alapjának meghosszabbításán felvett tetszőleges P pontból párhuzamosokat húzunk, melyek a szárak egyeneseit X és Y pontokban metszik. Mutassa meg, hogy $|PX - PY|$ nem függ a P pont megválasztásától.
13. a) Mi azon pontok halmaza, melyek egy félegyenestől adott d távolságra vannak?
    b) Mi azon pontok halmaza, melyek egy szakasztól adott d távolságra vannak?
    c) Mi azon pontok halmaza, melyek szögvonaltól adott d távolságra vannak?
    d) Mi azon pontok halmaza, melyek egy két pontból álló alakzattól adott d távolságra vannak?
    e) Mi azon pontok halmaza, melyek egy két félegyenesből álló alakzattól adott d távolságra vannak?
    f) Mi azon pontok halmaza, melyek egy két szakaszból álló alakzattól adott d távolságra vannak?
14. Egy ABCD rombusz AB oldalát rögzítjük, az A csúcsnál levő szögét 0-tól 180 fokig változtatjuk. Mi lesz az átlók metszéspontjának a halmaza?
15. Szerkesztendő háromszög, ha adott két oldalának a különbsége, a harmadik oldala és egy szöge. Hány megoldása lehet a feladatnak?
16. Szerkesztendő a háromszög, ha adott az oldalak, szögek, magasságvonalak és súlyvonalak közül három adat.
17. Egy ABC háromszög AC és BC oldalára kifelé ACB’ és BCA’ szabályos háromszögeket rajzolunk. Mutassa meg, hogy AA’ = BB’ és hogy ezek 60º-os szöget zárnak be egymással.
18. Egy hatszög minden szöge 120º. Mutassa meg, hogy két szomszédos oldal összege megegyezik a szemben fekvő szomszédos oldalak összegével.
19. Egy trapéz hosszabbik alapja a, rövidebbik alapja b hosszúságú. Szárai derékszöget zárnak be egymással. Mutassa meg, hogy az alapok felezőpontját összekötő szakasz hossza (a - b)/2.
20. Mutassa meg, hogy egy a és b oldalú parallelogramma szögfelezői téglalapot határoznak meg, melyben az átlók hossza éppen a – b.

21. Egy ABCD négyszög belsejében felvett P pontot kössünk össze a négyszög csúcsaival.
   a) Keressük meg azt a pontot, melyre az AP + BP +CP + DP összeg minimális.
   b) Bizonyítsuk be, hogy ez az összeg nagyobb a négyszög kerületének felénél.
22. Egy ABC háromszög belsejében felvett P pontot kössünk össze a háromszög csúcsaival.
   a) Bizonyítandó, hogy az AP + BP +CP összeg nagyobb a háromszög kerületének felénél, de kisebb a háromszög kerületénél.
   b) (nehéz ***) Keresse meg azt a pontot, melyre az AP + BP +CP összeg minimális.
23. Mutassa meg, hogy minden négyszögben van olyan oldal, amely kisebb valamelyik átlónál.
24. Egy sokszög belsejében felveszünk egy tetszőleges P pontot. Bizonyítsa be, hogy ha ebből a pontból merőlegest állítunk a sokszögnek a P-hez legközelebbi oldalára, a merőleges talppontja ennek az oldalnak a belsejébe esik.
25. Egy ABC háromszög valamely belső P pontját tükrözzük az oldalakra, majd a kapott képet összekötjük ennek az oldalnak a végpontjaival. Az így nyert P1, P2 és P3 pontok és a háromszög csúcsai tehát kifeszítenek egy hatszöget. Mi a feltétele annak, hogy ez a hatszög konvex legyen?
26. Adott egy egyenes és rajta kívül két különböző pont, A és B.
   a) Az egyenes mely P pontjára minimális az AP + BP összeg?
   b) Az egyenes mely Q pontjára maximális az AQ - BQ különbség abszolút értéke?
27. Adott egy szögtartomány belsejében egy R rögzített ponttal. Szerkesszünk minimális kerületű háromszöget, melynek egyik csúcsa R, másik két csúcsa pedig a szög szárain van.
28. (nehéz*) Mutassa meg, hogy egy hegyesszögű háromszögbe beírható háromszögek közül a legkisebb kerületűnek a csúcsai a magasságtalppontok.
29. Mutassa meg, hogy egy háromszög
   a) a középvonalak által alkotott háromszög súlypontja megegyezik az eredeti háromszög súlypontjával,
   b) a középvonalak által alkotott háromszög magasságpontja megegyezik az eredeti háromszög körülírt körének középpontjával,
   c) hozzáírt köreinek középpontjai által alkotott háromszög magasságpontja megegyezik az eredeti háromszög beírt körének középpontjával.
30. a) Ha egy hegyesszögű háromszögben összekötjük a magasságtalppontokat, középen a talpponti háromszöget kapjuk, és a csúcsoknál még három darab háromszög keletkezik. Mutassuk meg, hogy a csúcsoknál keletkező háromszögek hasonlók az eredeti háromszöghöz.
   b) Bizonyítsuk be, hogy a talpponti háromszög körülírt körének középpontja megegyezik az eredeti háromszög magasságpontjával.
31. Egy körnek AB átmérőjén úgy választjuk a C és D pontokat, hogy azok a kör középpontjától egyenlő távolságra legyenek. Mutassuk meg, hogy ha e két pontot a kör kerületének egy tetszés szerinti P pontjával összekötjük, akkor a $CP^2 + DP^2$ összeg állandó.
32. Bizonyítsa be, hogy egy parallelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az összes oldalai négyzetének összegével. Tehát $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$.
33. Bizonyítsa be, hogy egy „térbeli parallelogramma”, vagyis egy paralelepipedon átlóinak négyzetösszege megegyezik az élek hosszának négyzetösszegével. Tehát $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = e^2 + f^2 + g^2$.
34. Mutassa meg, hogy egy háromszög oldalai és súlyvonalai között fennáll a következő összefüggés: $a^2 + 4sa^2 = 2(b^2 + c^2)$.

Az egységes érettségi feladatgyűjtemény

1671, 1686, 1687, 1761, 1784, 1833, 1834, 1840, 1863, 1874, 1877
2083, 2098, 2099, 2388, 2443, 2554 sorszámú feladatai.

3.b Beküldendő

3.b 1. Adottak: A(-1,8; 0,2), B(-0,8; -4,8), C(9,2; -2,8).

a) Igazolja, hogy a háromszög derékszögű!

b) Mekkorák az ABC háromszög szögei?

c) Írja fel a háromszög körülírt körének egyenletét!

3.b 2. Egy egyenlő szárú háromszög két csúcsa: A(-3; 6) és B(-7; 4); harmadik csúcsa pedig az $y - 2 = 0$ egyenletű egyenesen van. Határozza meg ennek a csúcspontnak a koordinátáit!

3.b 3. A gyakorló feladatok közül a 32-es sorszámú.

Határidő: november 1.

4. témakör: Kombinatorika, gráfok, valószínűségszámítás és matematikai statisztika

4.a Gyakorló feladatok

1. Legalább hány 13 tippes totószelvény kitöltésével biztosítható, hogy legyen legalább 5-ös találatunk?
2. Hány lottószelvényt kell kitöltenünk a biztos telitalálathoz?
3. Május 35-én a lottót úgy játsszák, hogy az 1, 2, 3, …, 20 számokból 18-at húznak ki.
   a) Hány szelvényt kell kitöltenünk a biztos telitalálathoz?
   b) Hány kell ahhoz, hogy biztosan legyen legalább 15 találatunk?
4. Két iskola legjobb sakkozói versenyeztek egymással. Mindenki mindenkivel egy játszmát játszott. Először az egy-egy iskolán belüli játszmákra: összesen 66 játszmára került sor. Az egész körmérkőzés 136 játszmából állt. Hány versenyző indult az egyik és hány a másik iskolából?
5. Hány olyan egymáshoz nem hasonló háromszög van, amely tompaszögű, továbbá nem egyenlő szárú és mindegyik szöge fokokban mérve egész számot ad?
6. Egy egyfordulós futballbajnokságon a csapatok sorrendjét a gólarányok figyelembevétele nélkül egyértelműen meg lehetett határozni. A bajnokságon volt olyan csapat, amelyet a nála jobb helyezést elért csapatok valamelyike nem győzött le. Bizonyítsuk be, hogy a bajnokság folyamán volt döntetlen mérkőzés is. (Egyfordulós futballbajnokságon minden csapat minden csapattal egyszer játszik. Minden egyes mérkőzés után a győztes csapat két pontot, döntetlen esetén mindkét csapat egy-egy pontot kap.)
7. Hány téglalapot lehet kijelölni egy 6 x 10-es négyzetrácsban úgy, hogy oldalaik rácsegyenesek legyenek?
8. A sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarokba hányféle útvonalon juthat el a bástya, ha a bástyát csak jobbra és fölfelé lehet tolni?
9. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan hatjegyű számot készíthetünk, amely osztható
   a) 2-vel,
   b) 3-mal,

c) 4-gyel,
d) 5-tel,
e) 6-tal,
feltéve, hogy mindegyik számot csak egyszer használjuk fel.

10. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan hatjegyű számot készíthetünk, amely osztható 3-mal, feltéve, hogy egy-egy számjegyet többször is felhasználhatunk? Mennyi ezeknek a számoknak az összege?
11. Mi a valószínűbb: két dobókockával legalább egy 6-ost vagy négy dobókockával legalább két 6-ost dobni?
12. Igaz-e, ha egy szobában véletlenszerűen összegyűlik 5 ember, akkor valószínűbb, hogy van köztük két olyan, aki a hét ugyanazon napján született, mint az hogy nincs két ilyen ember? Miért?

Az egységes érettségi feladatgyűjtemény

129, 140, 157, 172, 205, 208, 227, 232, 237, 242, 2584, 2586, 2612, 2615, 2619. 2609, 2604, 2658, 2662, 2667, 2677, 2710, 2727, 2729, 2739, 2747, 2761, 2777, 2770, 2779, 2894, 2927, 2918, 2912, 2809, 2863, 2957, 2958, 2960, 2949 sorszámú feladatai.

4.b Beküldendő

4.b 1. Egy osztályban az egyik matematika-dolgozat átlaga 3,25, a jegyek összege 78 volt. Tudjuk, hogy senki nem írt elégtelen dolgozatot. Legfeljebb hány jeles dolgozat lehetett?

4.b 2. Egy bizonyos vírus jelenlétének kimutatására vértesztet alkalmaznak. A teszt előzetes vizsgálatok alapján 1000 fertőzöttből 998 esetben mutat pozitív eredményt. Különböző okokból azonban 100 nem fertőzöttből is 5 esetben pozitívat mutat, azaz tévesen „riaszt". Becslések szerint egy nagyváros lakói között legfeljebb egy ezrelék lehet az adott vírussal fertőzött. Valakin elvégzik a tesztet és pozitívnak találják. Mekkora az esélye, hogy az illető tényleg fertőzött?

4.b 3, 4, 5, 6. A gyakorló feladatok közül a 4-es, 7-es 9-es és 12-es sorszámú.

Határidő: december 10.

Szempontok a feladatelemzéshez

I. A feladat megértése

Adatok, ismeretlenek azonosítása. Feladatok reprezentációja: ábra, táblázat, vázlat. Állítás szimbólumokkal való leírása. A feladatban előforduló fogalmakkal kapcsolatos definíciók, tételek felelevenítése, mobilizálása.
Előkészítő feladatsorozat tervezése.

II. A megoldás ötletének megtalálása, megoldási terv készítése

Miről is van szó a feladatban? (Saját probléma megfogalmazás)
Hogyan tudnám saját szavaimmal megfogalmazni a problémát?
Hogyan tudom a problémát ismert fogalmak segítségével érthetőbben esetleg egyszerűbben megfogalmazni? Hogyan szemléltethető a probléma, illetve hogyan vázolható, ábrázolható másképpen? (heurisztikus segédeszközök)
Oldottam már meg hasonló problémá(ka)t? Hogyan? (Analógia elve)
Milyen részproblémákra bontható a probléma? (Felosztás elve)

Milyen már megoldott problémára tudom a probléma egyes részeit visszavezetni? (Visszavezetés elve)
Lehetséges a problémát specializálni? (Redukálás elve)
Milyen feladattípusról van szó?
Mire lehet a megadott adatokból következtetni? (Célirányos okoskodás)
Miből lehet a keresett mennyiséget meghatározni? Miből következik a bizonyítandó állítás?
Hogyan néznek ki a további lépéseim?

III. A megoldási terv végrehajtása

Várható tanulói hibák (típushibák) az alkalmazott algoritmusok, eljárások végrehajtásával kapcsolatban. Lépések jogosságának ellenőrzése. (Indoklások)

IV. Visszatekintés, reflexió

Diszkusszió, megoldások száma.
Az eredmények interpretálása, értelmessége.
Milyen új dolgot tanultam? A megoldási stratégia kiemelése.
Milyen hiányosságokat fedeztem fel a tudásomban?
Milyen új megoldási eljárást lehetett felismerni a megoldott problémával kapcsolatban?
Többféle megoldás lehetősége, megoldások összehasonlítása. (Felhasznált ismeretek mennyisége, bonyolultsága, az ötlet szokatlansága, mesterkéltsége)
Melyik megoldási mód illik legjobban a problémához?
A feladat megoldásával kapcsolatos személyes élményei, nehézségei. Hogyan jutott az AHA élményhez?

Az elemzéshez minta a http://mathdid.elte.hu/pic/elemzes.pdf címen található.