Elemi matematika 4.
Támpontok az beadandó feladatok elkészítéséhez

Feladat: Egy KöMAL vagy ABACUS versenyfeladat kiválasztása és elemzése a következő szempontok alapján.

- A feladatot úgy válasszuk meg, hogy abban valamely központi fogalom jellemzői hangsúlyozódjanak! Adjunk is meg egy, az említett tulajdonságokra épülő megoldást!
- Foglaljuk össze, milyen előzmények szükségesek az adott fogalom fenti tulajdonságainak megismeréséhez!
- Állítsunk össze egy feladatsorozatot, amely az adott fogalom fenti tulajdonságainak megismerését segíti!
- Fogalmazzunk meg olyan feladatokat, melyekben az adott fogalom különböző tulajdonságai ill. a fogalomnak más kapcsolódó fogalmakhoz való viszonya jelenik meg!
- Az eddigiek segítségével fogalmazzunk meg egy-egy az 5-8. osztályban, 9-12. osztályban és a felsőoktatásban tanulók számára kitűzhető feladatot, amely az eredeti versenyfeladathoz hasonlóan az adott fogalomra épül!
- A fenti feladatokat természetesen megoldva kell beadni, a megoldásban mutassunk rá, miért felel meg a feladat az adott kritériumoknak!

Példa: Az összetett függvény fogalmának egyik alapvető tulajdonsága, hogy **legbővebb értelmezési tartományát a belső függvény értelmezési tartománya mellett a külső függvény értelmezési tartományának és a belső függvény értékkészletének metszetét vizsgálva kapjuk**.
A következőkben egy erre épülő feladatmegoldást láthatunk.

- *Kömal 2004/6.) B. 3751. Legyen* $f(x)=\dfrac{x}{1-x}$. *Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a részhalmazát, ahol minden pozitív egész* n *esetén az* $f^{(n)}(x)=f\left(f\left(\ldots\left(f(x)\right)\ldots\right)\right)$, n *db függvényből képzett összetett függvény értelmezhető!*

Megoldás: A fenti tulajdonságot ebben a speciális esetben a következőképpen értelmezhetjük. Az $f^{(n)}(x)=f\left(f^{(n-1)}(x)\right)$ függvény akkor értelmes, ha $f^{(n-1)}(x)$ függvény értelmes és lehetséges értékei közt nem szerepel a külső $f(x)$ függvény értelmezési tartományából kizárt $y_1=1$ érték. Mivel azonban $f^{(n-1)}(x)=f\left(f^{(n-2)}(x)\right)$, ezért $f^{(n-2)}(x)$ értékkészletében nem szerepelhet az y_2 érték, ha $f(y_2)=1$, azaz $\dfrac{y_2}{1-y_2}=1$, tehát az $y_2=\dfrac{1}{2}$. Hasonlóan adódik, hogy $f^{(n-3)}(x)$ nem veheti fel az $y_3=\dfrac{1}{3}$ értéket, végül pedig, hogy $f^{(n-(n-1))}(x)=f(x)\neq\dfrac{1}{n-1}$, amiből $x\neq\dfrac{1}{n}$ következik. Mivel az n tagból álló összetett függvénynek minden n-re értelmesnek kell lennie, ezért a valós számok halmazából az $\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\ldots,\dfrac{1}{n},\ldots\right\}$ halmazt kell kizárnunk.

- **Az említett tulajdonság megértéséhez szükséges előzmények:**
  - számhalmazok, műveletek számhalmazokkal
  - függvény, értelmezési tartomány, értékkészlet fogalma
  - műveletek függvényekkel
  - függvények hányadosának értelmezési tartománya
  - az összetett függvény fogalma

- **Az említett tulajdonság megértését segítő feladatsorozat:**

  1. Három jó barát András, Béla és Csaba saját 3 fős vállalkozásukban, más-más időbeosztásban dolgozik. András reggel 10-14-ig, Béla 10-13-ig és 14-15-ig, Csaba pedig 11-15-ig végzi ugyanazt a munkát. Mindhárman egyenletesen, egyforma sebességgel dolgoznak.

  a. A nap mely időszakában végzi a cég a legintenzívebb munkát?

  b. A napi munkának mekkora része készül el ebben az időszakban?

  c. Ábrázold grafikonon az óránként végzett munka mennyiségét!

  d. A cég elvállalt egy új feladatot, melyet csak pontosan két emberrel lehet végezni. Legfeljebb napi hány órát tud a cég az új feladattal foglalkozni?

  2. A fenti cég óránkénti keresete az új munkával a munkavégzők személyétől függ. András óránként 5000, Béla 8000, Csaba 7000 Ft bevételt termel, méghozzá úgy, hogy az adott órában a bevétel egyenletesen növekszik.

  a. Ábrázoljuk grafikonon a cég e munkából származó bevételét az idő függvényében!

  b. Olvassuk le a grafikonról, mekkora napi bevételre tesz szert a cég az új munkával!

  c. Adjunk meg képlettel egy lineáris függvényt, amely úgy írja le a pillanatnyi összbevételt, hogy az egész napi bevétel változatlan marad!

  d. Fogalmazzunk meg, egy a feladatbelihez hasonló szituációt, ahol ez az elsőfokú függvény írja le a pillanatnyi összbevételt!

  3. A cég napi kiadása 13000 Ft, az ezen felül keresett összegből 20% adó levonásával kapjuk a hasznot.

  a. Adjunk meg egy olyan függvényt, amely a bevételhez a hasznot rendeli! Mi ennek a függvénynek az értelmezési tartománya?

  b. E függvény és a 2.e. feladatbeli egyszerűsített bevételfüggvény segítségével írjuk fel a hasznot az idő függvényében!

  c. Határozzuk meg az így kapott idő-haszon függvény értékkészletét és értelmezési tartományát!

- **Néhány az összetett függvények tulajdonságaira, a köztük levő kapcsolatok vizsgálatára vezető feladat:**

  1. Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény értelmezési tartománya a $[0;2]$ intervallum, hozzárendelési szabálya az $f(x)=x+1$. Határozzuk meg az $f^{(n)}(x)=f\left(f\left(...\left(f(x)\right)...\right)\right)$, n db függvényből képzett összetett függvény értelmezési tartományát!

  2. Igazoljuk, hogy ha egy $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvény inverze önmaga, akkor az $f^{(n)}(x)=f\left(f\left(...\left(f(x)\right)...\right)\right)$, n db függvényből képzett összetett függvény értelmezési tartománya megegyezik az eredeti függvény értelmezési tartományával!

  3. Adjuk meg az összes olyan $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ injektív függvényt, amelyre teljesül az $f\left(f\left(...\left(f(x)\right)...\right)\right)=f(x)$ minden pozitív egész n esetén!

  4. Alkossunk kétféleképpen összetett függvényt az $f(x)=x^2$ és a $g(x)=3x+2$ függvényekből! Mit mondhatunk a négy függvény párosságáról? Van-e valamilyen kapcsolat az összetett függvények és összetevőik párossága között?

  5. Mely függvények összetett függvénye lehet az $f(x)=\dfrac{1}{5-2x}$ függvény? Mit mondhatunk a monotonitásukról? Milyen összefüggés van a részek és az összetett

függvény monotonitása közt? Igazoljuk állításunkat a függvények deriváltjainak vizsgálatával is!

- **Az eredeti fogalomra épülő feladatok különböző szinteken:**

5-8. osztály: Nyáron a 7. a osztály a 280m tengerszint feletti magasságban található erdei iskolából indulva egy 600m magasan fekvő kilátóhoz kirándult. Odafelé egy órán keresztül, egyenletes emelkedőn, 3 km/h sebességgel jutottak 400m magasra, majd egy kicsit meredekebbé vált az út és egy újabb óra alatt 2 km-t tettek meg a kilátóig. A visszafelé úton egy másik ösvényt választottak, amely enyhén lejtett, így 2 óra alatt 8 km-t megtéve értek haza.

a. Ábrázoljuk külön koordináta-rendszerben, a megtett utat az idő függvényében és a magasságot a megtett út függvényében!

b. A két grafikon segítségével állapítsuk meg, milyen magasan jártak a túrázók 1.5 óra elteltével! Olvassuk le a grafikonokról a magasságot minden 0.5 órában, majd készítsünk értéktáblázatot!

c. A feladat szövege alapján ábrázoljuk a magasságot az idő függvényében, majd ugyanabban a koordináta-rendszerben ábrázoljuk az előbb kapott számpárokat! Mit tapasztalunk? Mi lehet ennek az oka?

9-12. osztály: Legyen $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, $g(x)=x^2+px+1$, $h(x)=\sin x$. Határozzuk meg p értékét úgy, hogy az $f\left(g\left(h(x)\right)\right)$ függvény minden valós x esetén értelmezhető legyen!

Felsőoktatás: Legyenek $f(x)$ és $g(x)$ monoton növő függvények melyekre $f(x)\le g(x)$ teljesül az értelmezési tartományok metszetén. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f\left(f(x)\right)\le g\left(g(x)\right)$ is teljesül!