1. Határozd meg az alábbi kifejezés pontos értékét!

$$1 - 2 - 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 8 + 9 - 10 - 11 + \ldots - 2003$$

Megoldás
Eredmény: -2004.
Az elejétől kezdve, négyesével csoportosítva mindig 0 az összeg (az első kettőé mínusz 1, a második kettőé plusz 1 stb). Még a (+ 2004) hiányzik, hogy teljes négyes legyen a végén is, tehát így (-2004) az összeg.

Sok dolgozat alapján

Variációk
1.1. Számold ki

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 2003$$

értékét!

Megoldás

Eredmény: 2007006.
Írjuk le az összeget önmaga alá fordított sorrendben, és adjuk először össze az egymás alá kerülő párokat:

1	+	2	+	3	+	...	+	2001	+	2002	+	2003
2003	+	2002	+	2001	+	...	+	3	+	2	+	1
2004	+	2004	+	2004	+	...	+	2004	+	2004	+	2004

Tehát a keresett összeg kétszerese 2003·2004, ebből adódik a fenti eredmény.

Sok dolgozat alapján

A diákok által javasolt variációk
1.1.1. -1 + 2 + 3 - 4 - 5 + 6 + 7 - 8 - 9 + 10 + 11 - ... + 2003

Petz Tamás

1.1.2. -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + ... - 2003

Blázsik Zoltán

1.1.3. 1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + 7 + 8 - 9 + 10 + ... + 2003

Grósz Dániel

Megoldásaik
1.1.1. 2004; **1.1.2.** -1002;
1.1.3. (1 + 2 - 3) + (4 + 5 - 6) + (7 + 8 - 9) + ... + (1999 + 2000 - 2001) + 2002 + 2003 =
0 + 3 + 6 + ... + 1998 + 4005= 3·(1 + 2 + ... + 666) + 4005 = 4005+(3·666·667/2) = 670338

Kapcsolódó feladatok, folytatás
5., 8.

További variációk
1.2.

1 2 3 4 5 6 7 8

Ketten játszanak. Felváltva írnak be egy-egy előjelet minden szám elé (az 1-es elé is tehetnek). "Kezdő" azt szeretné, hogy a legvégül kapott előjeles összeg ne legyen nulla, míg "Második" azt szeretné, hogy nullát kapjanak. Hogyan érdemes játszani? Kinek kedvező a játék?

Megoldás

Kezdő el tudja érni, hogy az összeg pozitív legyen: ehhez mindig a lehető legnagyobb abszolút értékű számot választja, és annak előjelét pozitívra állítja.

1.2.1. Kezdő azt szeretné, hogy páros legyen az összeg, míg Második azt, hogy páratlan. Most hogyan érdemes játszaniuk?

Megoldás

Kezdő nyer. Mindegy mit csinálnak, az előjeles összeg mindig páros.
Ennek az az oka, hogy két páratlan szám összege, különbsége is páros, így négy páratlan szám előjeles összege is mindig páros, a páros összeadandók pedig nem változtatnak a paritáson.

1.2.1.1. Gondoljuk meg miként módosul az 1.2.1.-ben leírt játékra vonatkozó eredmény, ha nem az 1-től 8-ig, hanem 1-től valamely más számig (n) vannak felírva a számok a táblára!

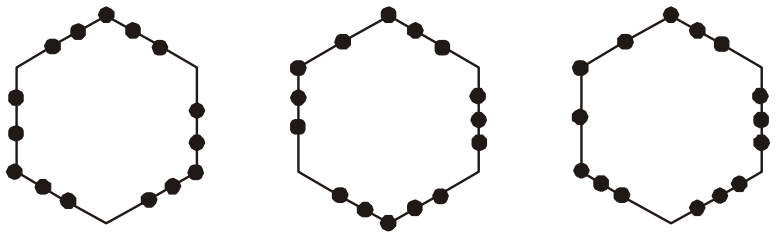
Eredmény: n = 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18, ... esetén bármely előjelezésnél páratlan lesz az összeg, míg n = 3, 4, 7, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, ... esetén mindig páros lesz.

Kapcsolódó feladatok, folytatás
10.
2. Helyezz 15 piros pontot egy hatszög oldalaira úgy, hogy minden oldalon ugyanannyi piros pont legyen!

I. megoldás
Ha minden oldalon 2 pont van, az csak 6·2=12 pont. Ha minden oldalon 3 pont van, az 6·3=18 pont, ez több 15-nél. De ez lehet, ha 3 pontot kétszer számolunk. Úgy kell csinálni, hogy a hatszög minden második csúcsába teszünk egy piros pontot (ez 3 pont) és minden oldalra 2 pontot. Ekkor minden oldalon 3 pont lesz, mert 2 pont az oldalon van, 1 pont az egyik végén. Az oldalakra nem lehet 4-4 pontot feltenni.

Róka Péter

Megjegyzés
Nem kell feltétlenül minden második csúcsot választanunk, hanem akármelyik három különböző csúcson lehet a három piros pont. Három lényegesen különböző elrendezés látható az alábbi ábrákon.



Horváth Anikó

Variáció
2.1. Hétszögre is el tudnád megfelelően helyezni a 15 piros pontot?

Megoldás
15-ben nincs meg a 7 maradéktalanul. 21-ben viszont megvan 3-szor. 21-15=6 ezért 6 csúcsra kell pontot rakni és a többit úgy elhelyezni, hogy mindegyik oldalon három pont legyen. Ez valóban megtehető: 1-1 pontot teszünk minden olyan oldalra, amelynek mindkét végpontjában van piros pont, és 2-2 pontot teszünk arra a két oldalra, amelyeknek egyik végpontjában nincs piros pont.

Selmeczy Péter

Kapcsolódó feladatok, folytatás
7., 13.

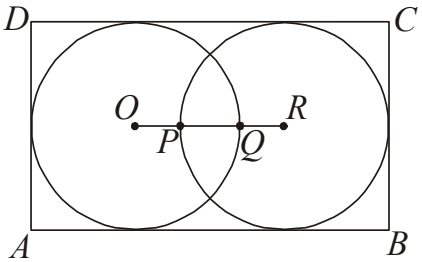
3. Anna, Bori, Cili kirándulni mentek. Anna két, Bori három szendvicset vitt magával, míg Cili elfelejtett útravalót hozni. A túra során egyenlően osztoztak a szendvicseken és Cili ragaszkodott hozzá, hogy fizessen azért, amit kapott. Így összesen 140 Ft-ot fizetett. Ebből mennyit kapott Anna, és mennyit Bori?

I. megoldás
A 140 Ft-ot Anna és Bori szendvicsei számának megfelelően, 2:3 arányban kell elosztani. 140/5 = 28, tehát Anna 2·28 = 56, míg Bori 3·28=84 Ft-ot kap Cilitől.

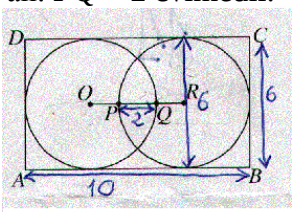
Megjegyzés: Ez a megoldás hibás. Lásd a következő megoldást!
II. megoldás
Összesen 5 szendvics és 3 gyerek van, Ezért minden gyerek $\frac{5}{3}=1\frac{2}{3}$ szendvicset kap. Anna két szendvicset vitt, ezért $\frac{1}{3}$-ot kell adnia Cilinek ($2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$). Bori 3 szendvicset vitt, ezért $1\frac{1}{3}$ kell adnia Cilinek ($3-\frac{5}{3}=1\frac{1}{3}$). Cili 140 Ft fizetett $\frac{5}{3}$ szendvicsért, vagyis $\frac{1}{3}$ szendvicsért 140:5= 28 Ft-ot fizetett. Annától $\frac{1}{3}$ szendvicset kapott Cili, ezért 28 Ft-ot fizet neki. Bori $1\frac{1}{3}$ szendvicset adott Cilinek, ezért 28·4=112 Ft-ot kapott.

Selmeczy Péter

4. Az alábbi ábrán látható *O* és *R* középpontú körök sugara 3 cvimedli, míg az *ABCD* négyszög kerülete 32 cvimedli. Határozd meg a *PQ* szakasz hosszát! (Bergengóciában cvimedliben mérik a távolságot. Vigyázat! Lehet, hogy a rajz nem pontos, de az biztos, hogy a két kör sugara egyforma, és a téglalap mindegyiket három oldalával is érinti.)



Megoldás
A kör átmérője 6 cvimedli vagyis ennyi a téglalap szélessége: *BC* és *DA* 6 cvimedli hosszúak. 32-(6+6)=20, azaz *AB*+*CD*=20, *AB* és *CD* ugyanolyan hosszú, így 20:2=10=*AB*=*CD*. A két kör egymás mellett 12 cvimedli hosszú lenne, de 10 cvimedli helyre be kell férnie, ezért 2 cvimedli "összekapcsolódás" van: *PQ* = 2 cvimedli.



Selmeczy Péter

Megjegyzés
Legyen az egyik kör és *AD*, illetve a másik kör és *CB* érintési pontja *X*, illetve *Y*. A gondolatmenetben kimondatlanul felhasználtuk, hogy az *X, Y, O, P, Q, R* pontok egy egyenesbe esnek, és az *XY* szakasz hossza is 10 cvimedli. Ezt be is bizonyíthatjuk: észrevehető, hogy az *O* pont és az *AB* egyenes távolsága az *O* középpontú kör sugarával egyezik meg, és ugyanekkora az *O* pontnak a *CD*, valamint az *R* pontnak az *AB* illetve *CD* egyenesektől való távolsága is. Ezért az *O, R* (és az *OR* szakaszon levő *P, Q*) pontok az *AB, CD* egyenesektől egyenlő távolságra vannak, egy azokkal párhuzamos egyenesen. Az *AD, CB* szakaszokon *O*-hoz, illetve *R*-hez legközelebbi pont a körök *X*, illetve *Y* érintési pontja, ezek a szakaszok felezőpontjai, szintén az előbb említett egyenesen vannak rajta.

Blázsik Zoltán dolgozata alapján

5. Egy buli végén mindenki mindenkivel kezet fogott. Ekkor érkezett meg az egyik vendég barátja, hogy együtt menjenek majd el moziba, és kezet fogott azokkal, akiket ismert. Így összesen 68 kézfogás történt. A buli résztvevői közül hányan ismerték ezt az embert?

I. Megoldás
Írjunk fel adott számokat, amelyek az emberszámot jelölik és melléjük azt, hogy ha mindenki mindenkivel kezet fog, akkor hány kézfogás esik meg.

Ha 2 ember van jelen, akkor – 1 kézfogás
3 ember… - 3 kézfogás
4 ember… - 6 kézfogás
5 ember… - 10 kézfogás
6 ember… - 15 kézfogás
7 ember… - 21 kézfogás
8 ember… - 28 kézfogás
9 ember… - 36 kézfogás
10 ember… - 45 kézfogás
11 ember… - 55 kézfogás
12 ember… - 66 kézfogás

Tovább már nem kell menni, hiszen akkor már összesen több mint 68 kézfogás történne meg. Hamar rá lehet jönni, hogy csak az lehet, hogy 12 ember van a társaságban, mert ha 11 ember lenne, akkor, ha a beérkezett barát ismer mindenkit, akkor is csak 66 kézfogás, ami még túl kevés.(ugyanez érvényes, ha 11 embernél is kevesebb ember van jelen.)

Tehát a bulin 12 ember lehetett (66 kézfogás) emiatt a buli résztvevői közül ketten ismerik az egyik résztvevő barátját.

Blázsik Zoltán

II. megoldás
Hogyha 11 ember van a buliban, akkor az első ember 10 emberrel fog kezet, a második 9 emberrel fog kezet, mert az elsővel már fogott kezet és így tovább, az utolsó emberig, aki már csak egy emberrel fog kezet. Általában, a kézfogások számát az

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

képlet adja meg, ahol *n* az emberek száma mínusz 1. Tegyük fel, hogy 11 ember van. Ekkor a kézfogások száma 55, ezután megérkezett az egyik vendég barátja, de hogyha mindenkit

ismert volna, akkor is csak 10+55=65 kézfogás történt volna, de összesen 68-nak kellett történni. Ha 12 ember volt a bulinál akkor 66 kézfogás történt volna, ezután jött az egyik vendég barátja, akinek két embert kellett ismernie, mert úgy lett 68 kézfogás. 13 vagy több ember nem lehetett a buliban, mert úgy már egyből legalább 78 kézfogás lenne. Tehát két embert ismert az egyik vendég barátja.

Selmeczy Péter

Variáció

5.1. Az I. megoldásban nagyon munkaigényes, a II. megoldásban pedig esetleges, ahogy megtaláltuk, hogy 12 vendég volt eredetileg. Van-e erre jobb módszer? Hogy lehetne megoldani a feladatot pld 1111 kézfogás esetén?

Kalló Bernát kérdése

Megoldás

Az 5. feladat II. megoldásában láttuk, hogy a kézfogások számának kétszerese $n\cdot(n+1)$, ahol $(n+1)$ az emberek száma a buliban. A buli résztvevői közötti kézfogások száma legfeljebb 1111, de ha a vendég barátja minden résztvevővel kezet fogott volna, akkor már 1111-nél nem lenne kevesebb a kézfogások száma:

$$n\cdot(n+1) \le 2222 \le (n+1)\cdot(n+2),$$

így

$$n\cdot n < n\cdot(n+1) \le 2222 \le (n+1)\cdot(n+2) < (n+2)\cdot(n+2),$$

$$n < \sqrt{2222} \approx 47{,}138 < n+2,$$

ahonnan $n = 46$ vagy $n = 47$. $n = 48$ esetén a kézfogások száma 1128, ami túl sok, míg $n = 46$ esetén 1081 kézfogás adódik, ami megfelelő. Tehát a buliban eredetileg 47 ember volt, a vendég barátja pedig 1111-1081=30 embert ismert. Ezzel a módszerrel minden esetben megoldható a feladat, csak egy olyan számológépre van szükség, amely tud gyököt vonni.

Selmeczy Péter

Kapcsolódó feladatok, folytatás

8.

6. Egy kocka élei 2 cm hosszúak. A kocka fehér, de rendelkezésünkre áll sok

a) 1cm × 3cm-es

b) 1cm × 4cm-es

c) 1cm × 5cm-es

d) 1cm × 6cm-es

piros papírszalag, amelyeket a kockára ragaszthatunk. Melyik típusú szalagokkal lehet úgy befedni a kockát, hogy minden lapja piros legyen, de sehol se legyen egynél több rétegben piros papír? (A papírokat behajtani szabad, de elvágni nem!)

Megoldás

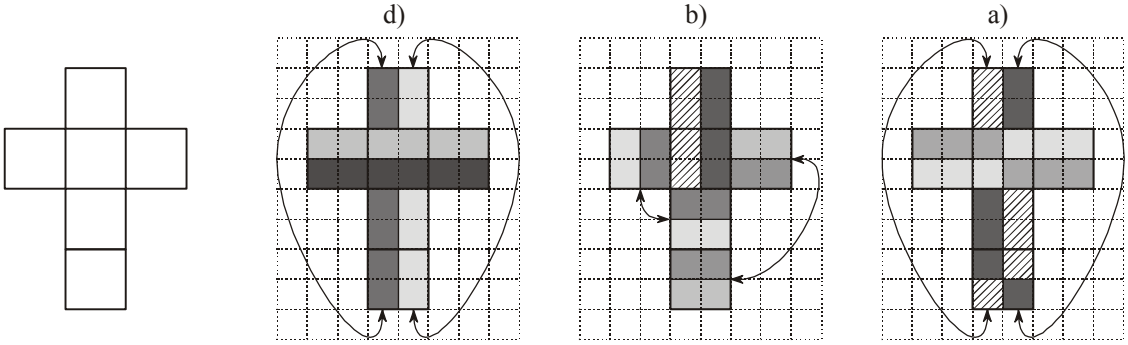
Hajtsuk ki a kockát úgy, hogy a felületét lássuk!

c) Öttel nem lehet meg csinálni, mert huszonnégy 1×1-es kockából áll a négyzet felülete ami nem osztható öttel.

d) 24 osztható hattal ezért nincs eleve kizárva. Meg is lehet csinálni! Először rakjunk kettőt keresztbe és utána kettőt vízszintesen úgy, hogy az egyik oldalról átmenjen a másik oldalra.

a) Hárommal úgy kell megcsinálni, hogy a d) kérdésben levő hatosokat két részre vágjuk.

b) Először rakjunk négyet (2×2) vízszintesen és kettőt függőlegesen úgy, hogy az egyik oldalról átmenjen a másik oldalra.

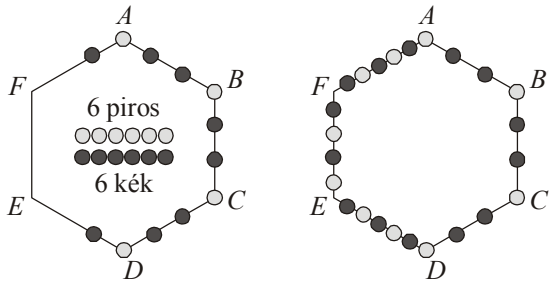


Selmeczy Péter

7. Helyezz 10 piros és 14 kék pontot egy hatszög oldalaira úgy, hogy minden oldalon ugyanannyi piros pont legyen, mint kék!

Megoldás

Eleinte a 10 piros pontot át kell változtatni úgy, hogy 14 pontnak számítson és így a piros pontok száma megegyezzen a kékek számával. Ezt úgy lehet elérni, hogy négy piros pontot négy különböző csúcsra rakunk. Rakjunk például egy-egy piros pontot az *A B C D* csúcsokra! Ezután rakjunk két-két kék pontot az *AB, BC* és *CD* szakaszra, egyet-egyet pedig az *FA, DE* szakaszokra! Így minden oldalon ugyanannyi kék pont lesz, mint piros és még 6 pontot kell elhelyeznünk mind a két színből. Ezeket tetszőlegesen felrakhatjuk, úgy, hogy amennyit az egyik színből teszünk egy oldalra, ugyanannyit teszünk a másikból is oda.



Több diák dolgozata alapján

Előzmény: 2., 2.1.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 13., 18.

8. Egy szultánnak 143 felesége volt. 1000 napon keresztül adót szedett. Az első napon 144 aranyat, a többi napon pedig mindig egy arannyal többet szedett, mint az azt megelőző napon. Az így beszedett adót egyenlően akarta szétosztani feleségei között. Meg tudta-e tenni?

I. Megoldás: Számoljuk ki, hogy az utolsó napon mennyi adót szedett be!

1. nap	2. nap	3. nap	4. nap	...	1000. nap
144	144 + 1	144 + 2	144 + 3	...	144 + 999

Tehát az utolsó napon 1143 aranyat szedett. Most pedig a párosítós módszerrel számoljuk ki, hogy az 1000 nap alatt mennyi adót szedett be összesen!

$$(144+1143) + (145+1142) + \ldots = (1000:2)\cdot(144+1143) = 500\cdot 1287 = 643500$$

Tehát ennyi (643500) adót szedett be 1000 nap alatt. Ha a kapott eredmény osztható 143-mal, akkor el tudja ezt egyenlően osztani feleségei között, de ha nem osztható, akkor nem!

$$643500:143=4500$$

Mivel nincs maradék, ezért meg tudja tenni, és minden feleségének 4500 aranyat adott.

Blázsik Zoltán

II. megoldás
Ha minden nap 1-1 aranyat azonnal megkapnak a feleségek, akkor az egyes napokon még rendre 1, 2, 3, ..., 998, 999, 1000 arany marad a királynál. Ha ezeket a szokásos módon párosítgatjuk (1 + 1000, 2 + 999, 3 + 998, ..., 500 + 501), akkor mindegyik összeg 1001 lesz, tehát eloszthatóa feleségek között (1001 = 143·7), ezért a teljes összeg is eloszthatóa.

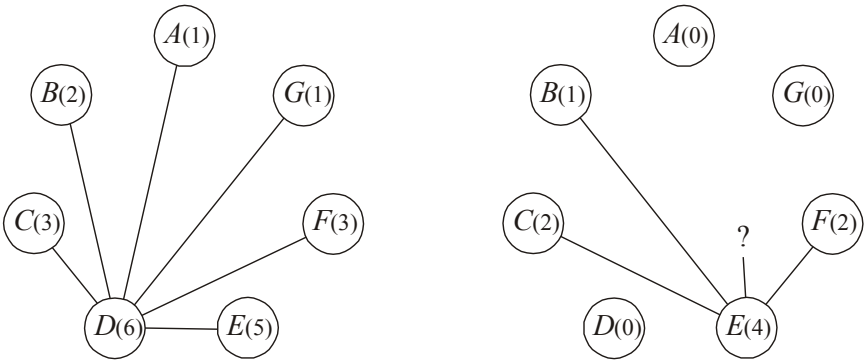
A feladat forrása: Varga Tamás matematikai versenyek
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 38.

9. Késő este egy autóbuszon heten utaztak, mindenki a végállomáson szállt le. A játékos kedvű sofőr mindegyik utast megkérdezte, hogy hány embert ismer az utastársai közül. Sorra a következő válaszokat kapta:

1, 2, 3, 6, 5, 3, 1.

A sofőr rövid gondolkodás után rájött, hogy valaki nem mondott igazat. Hogyan okoskodott a sofőr? (Az ismeretség kölcsönös!)

I. Megoldás: Jelöljük az utasokat sorban *A, B, C, D E, F, G*-vel és rajzoljunk ábrát!



Először rajzoljuk be, hogy *D* mindenkit ismer! Most töröljük ezeket az ismeretségeket! Ekkor már *A* és *G* nem ismerhet mást, de mivel *E* 5 embert ismer, ezért neki magán; *D*-n; *A*-n; és *G*-n kívül még négy embert ismernie kellene. Mivel azonban már csak 3 embert ismerhet (*B*;*C*;*F*) , ezért itt biztos, hogy valaki tévedett!

Blázsik Zoltán

II. Megoldás
Adjuk össze a hat számot!

$$1 + 2 + 3 + 6 + 5 + 3 + 1 = 21.$$

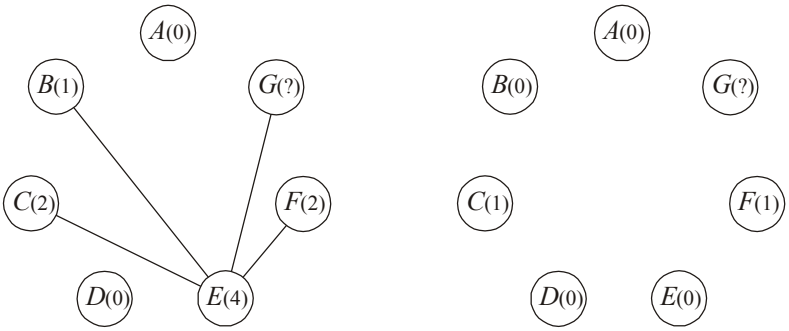
Itt páros számot kellett volna kapnunk, hiszen ha *X* ismeri *Y*-t, akkor (a megadott feltételezés szerint) *Y* is ismeri *X*-et, tehát minden "ismeretség"-ről ketten adnak számot. Az ellentmondás mutatja, hogy tévedés történt.

Gröller Márta

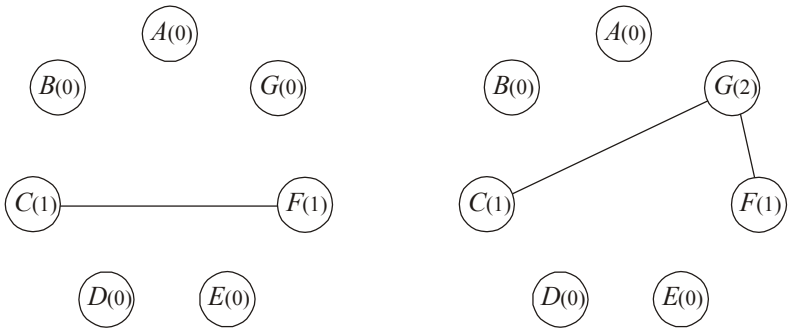
Variáció
9.1. Tegyük fel, hogy mindenki igazat mond, az első hat válasz: 1, 2, 3, 6, 5, 3, a hetedik választ pedig nem értette meg a sofőr. Mi lehetett a hetedik válasz, ha mindenki igazat mondott?

I. Megoldás

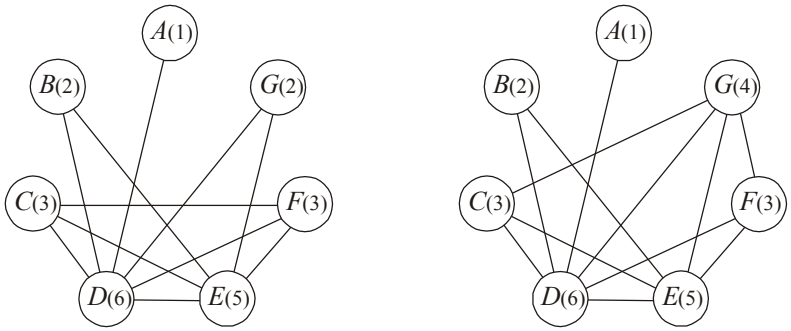
Folytassuk a 9. feladat I. megoldásának gondolatmenetét! *E*-nek *G*-t kell ismernie ahhoz, hogy meglegyen a 4 ismeretsége. Töröljük ezeket az ismeretségeket!



Innentől viszont két eset lehetséges:
A) *C* és az *F* ismeri egymást és más ismeretség nincs.
B) *C* is és *F* is ismeri *G*-t és más ismeretség nincs.



Ha visszarajzoljuk *D* és *E* letörölt ismeretségeit, akkor azt kapjuk, hogy *G* az A) esetben 2 utast, a B) esetben pedig 4 utast ismer.



Tehát a hetedik válasz lehetett 4 is és 2 is, de más nem.

Blázsik Zoltán

II. Megoldás

A 9. feladat II. megoldásából következik, hogy a hetedik embernek páros sok utast kell ismernie. Ha senkit sem ismerne, akkor nem lehetne olyan utas, aki mindenkit ismer, pedig van ilyen. Ha pedig ő is mindenkit ismerne, akkor nem lehetne olyan ember, aki csak egy embert ismer, pedig ilyen is van. Tehát a hetedik ember 2 vagy 4 embert ismerhet. Mind a két eset lehetséges is (lásd az előző megoldás példáit).

Károlyi Gergely

10. Játék

1 2 3 4 5 6 7 8 9

Ketten játszanak. Felváltva írnak be egy-egy előjelet minden szám elé (az 1-es elé is tehetnek). "Kezdő" azt szeretné, hogy a legvégül kapott előjeles összeg ne legyen osztható hárommal, míg "Második" azt szeretné, hogy osztható legyen hárommal. Hogyan érdemes játszani? Kinek kedvező a játék?

És ha megfordítják a szerepeket?

I. Megoldás

Mivel Kezdő eggyel többet rakhat, ezért a legvégén marad előtte egy helyzet és egy kimaradt hely. Három lehetőség van:

A) az eddigiek összege 3-mal osztható;
B) az eddigiek összege 3-mal osztva 2 maradékot ad;
C) az eddigiek összege 3-mal osztva 1 maradékot ad.

A) Ebben az esetben csak akkor nem nyerhet Kezdő, ha 3-mal osztható szám előtt marad ki hely! De ez nem állhat elő, ha Kezdő legelőször a 3-mal osztható számok előtti helyekre rak!

B) Itt 3 aleset van:
B_1) 3-mal osztható szám előtt lesz hely;
B_2) 3-mal osztva 2 maradékot adó szám előtt lesz hely;
B_3) 3-mal osztva 1 maradékot adó szám előtt lesz hely;

B_1) Hozzá is adhatja, ki is vonhatja, mindenféleképpen jó Kezdőnek!
B_2) Ekkor a számot hozzá kell adni az eddigiekhez, és úgy jó lesz.
B_3) Ekkor a számot ki kell vonni az eddigiekből, és így jó lesz.

C) Itt 3 aleset van:
C_1) 3-mal osztható előtt lesz hely
C_2) 3-mal osztva 2 maradékot adó szám előtt lesz hely;
C_3) 3-mal osztva 1 maradékot adó szám előtt lesz hely;

C_1) Hozzá is adhatja, ki is vonhatja, mindenféleképpen jó Kezdőnek!
C_2) Ekkor a számot ki kell vonni az eddigiekből, és így jó lesz.
C_3) Ekkor a számot hozzá kell adni az eddigiekhez, és úgy jó lesz.

Ha Kezdő az első három lépésében az aláhúzott szöveget követve játszik, az utolsóban pedig a megfelelő leírt esetben megfogalmazott módon, akkor biztosan nyer!

Ha megfordítjuk a szerepeket, akkor a végén a Kezdő előtt álló lehetséges esetek ugyanazok lesznek, mint az előbb.

A) Ebben az esetben nem nyerhet Kezdő, ha 3-mal nem osztható szám előtt marad ki hely. Ezt csak úgy bírná megakadályozni, ha az összes 3-mal nem osztható szám elé rakna még mielőtt az utolsó rakásához érnénk, de ezt nem bírja megtenni hiszen ehhez 6 rakás lenne csak elég, de ennyit nem rakhat, ezért ekkor ő a vesztes.

Tehát ha Második úgy játszik, hogy először a hárommal osztható számok elé rak, akkor biztos, hogy nem veszt.

Megjegyzés
Az eredeti játékra a fenti megoldás jó, a fordított játékra azonban nem. Ha ugyanis Második mind a három lépésében a hárommal osztható számok elé rak előjelet, akkor nem tudja biztosítani, hogy Kezdő utolsó lépése előtt valóban az A) eset valósuljon meg.

II. Megoldás
A játékban az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számoknak csak a hármas maradékai lényegesek. Ezek: 1, 2, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 0. A játék két variációját fordított sorrendben vizsgálom.

Kezdő: Én
Második: Apa

B) A fordított játék:
Úgy kell kezdeni, hogy berakunk egy bármilyen előjelet az egyik nulla elé. Ha apa bármikor berak egy előjelet egy másik nulla elé, akkor én berakok egy előjelet a harmadik nulla elé. Ha viszont bármikor berak egy előjelet az egyes vagy a kettes elé, akkor én ugyanazt az előjelet rakom be a másik típusú szám, a kettes vagy az egyes elé. Így az én lépésem után mindig hárommal osztható lesz a kifejezés, tehát a legvégén is az lesz.
Ha Kezdő ezt tudja, akkor mindig ő fog nyerni.

A) Az eredeti játék:
Így is Kezdő nyer. Ugyanazt csinálom, mint az előbb, amikor arra törekedtem, hogy minden lépésem után hárommal osztható legyen az összeg. Egyetlen egyszer térek el ettől: amikor az utolsó (1, 2) pár jön sorra. Ekkor az ellenkező előjelet választom, mint Apa, így az összeg nem lesz hárommal osztható.

Selmeczi Péter dolgozata alapján

Megjegyzés
A II. megoldás A) részében nem lényeges, hogy épp az utolsó (1, 2) párnál térjünk el a B)-ben leírt szabálytól. Csak az fontos, hogy egyszer térjünk el.

Kapcsolódó feladatok, folytatás: 19.

11. Egy ingaóra a hőmérséklet ingadozása miatt nem jár egyenletesen. A meleg miatt a déli órákban naponta összesen fél percet siet, míg a hajnali hidegben naponta összesen harmad percet késik. Május elsején reggel pontosan mutatja az időt.
Számítsuk ki, hogy legközelebb hányadikán siet 5 percet?

Megoldás
Május elsején a déli órák után egészen a hajnali hidegek kezdetéig 30 másodpercet siet az óra. Bármelyik nap bármelyik órájához képest másnap ugyanabban az órában tíz másodperccel többet siet az óra.
5 perc az 300 másodperc; $300 = 30 + 27 \cdot 10$. Tehát a május elsejei délután után 27 nappal, azaz a <u>május 28-ai déli órákat követő pillanatok</u>tól kezdve a 29-ei hajnal kezdetéig végi 5 percet siet az óra. Korábban mindig kevesebbet siet.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés

Az alábbi grafikonon a sietés mértékét ábrázoltuk az idő függvényében. Az egyes időszakokban a késés, illetve a sietés változását egyenletesnek tekintettük. A grafikonról leolvasható, hogy mikor siet az óra pontosan 5 percet:

a 28-ai déli és 29-ei hajnali órák között;
a 29-ei déli órák egy pillanatában;
a 30-ai hajnali órák egy pillanatában;
a 30-ai déli órák egy pillanatában;
a 31-ei hajnali és déli órák között.

12. Hány olyan, csak 0 vagy 1-es számjegyből álló nyolcjegyű szám van, amelyben nem fordul elő két szomszédos 1-es?

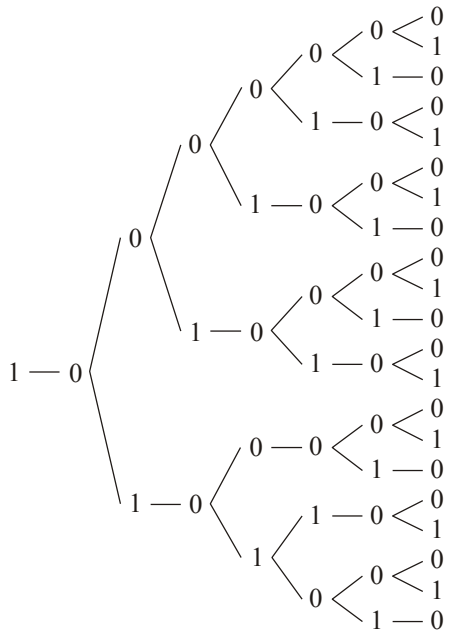
I. megoldás

A számnak 1-gyel kell kezdődnie, mert 0-val nem kezdődik nyolcjegyű egész szám. Utána nullának kell következnie, mert különben két 1-es lenne egymás után. Ezután meg kell nézni, hogy hány számot lehet csinálni 1, 2, 3 és 4 egyessel.

1 egyes:	10000000		2 egyes:	10100000
				10010000
3 egyes:	10101000			10001000
	10100100			10000100
	10100010			10000010
	10100001			10000001
	10010100			
	10010010		4 egyes:	10101010
	10010001			10101001
	10001010			10100101
	10001001			10010101
	10000101			

21 ilyen szám van.

Selmeczy Péter



II. megoldás

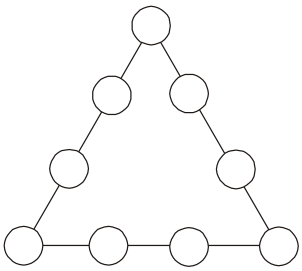
Rajzoljunk ábrát! 1-essel kell kezdeni. Ebből csak egy vonalat indítok, mert csak 0-s következhet utána. Abból viszont két vonal indul, mert lehet mögötte 1-es is, 0-s is. Így rajzoltam tovább. A végén csak meg kell számolni, hogy hány számjegyből nem indul vonal (utolsó oszlop). Tehát 21 megfelelő szám van.

Blázsik Zoltán

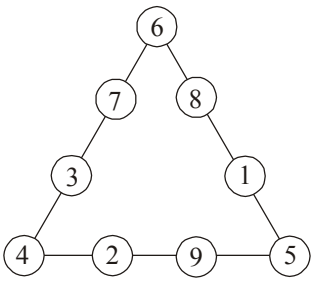
Variáció

12.1. Hány 2, 3, 4,5, 6, 7 jegyű hasonló tulajdonságú szám van? Mit gondolsz hány 9, 10, 11 jegyű lesz?

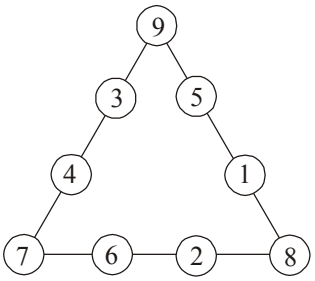
13. Írd be az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számokat a kilenc karikába úgy, hogy a háromszög oldalain található négy-négy szám összege egyenlő legyen
a) 20-szal;
b) egymással és a lehető legnagyobb legyen.



Megoldás
a) Hogyha a számok összegét összeadjuk, 45-öt kapunk. Ha a három oldal összegét összeadjuk, 60-at kapunk. A sarkokon levő számok két oldalhoz tartoznak, ezért értékük duplázódik. A három sarok értéke 60-45=15. Egy megfelelő kitöltés látható az ábrán.



b) Legfeljebb 23 lehet egy oldalon, mert ha 24 lenne, akkor összesen 72 lenne az oldalak összege, tehát a sarkon álló szám összege 72-45=27 kellene, hogy legyen. De, hogyha a három legnagyobb számot összeadjuk, akkor is csak 24-et kapunk.
Ha 23 van mindegyik oldalon, akkor a sarokösszeg $23 \cdot 3 - 45 = 24$.
A 24-et csak úgy tudjuk elérni, hogy ha a három legnagyobb számot rakjuk a sarkokra $(9 + 8 + 7 = 24)$. Ezután a többi számot úgy kell elhelyezni, hogy minden oldalon 23-at kapjunk. Ez lehetséges is (lásd az ábrát).

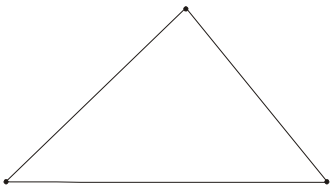


Előzmény: 2., 2.1., 7.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 18.

14. A Kecskefy, a Kecsovszky és a Kecsora család is tenyészt kecskét. A három család másképp legelteti a kecskéket. Az állatokat nyakában található övre egy-egy 10 méter hosszú kötelet kötnek, de a kötél másik végén található gyűrűt különbözőképpen rögzítik.

Kecskefyék a réten egy 40×50 méteres téglalap csúcsaiban kitűznek egy-egy póznát, a póznák között pedig - a téglalap oldalain - kifeszítenek egy-egy drótot. A gyűrűk a póznákhoz vannak rögzítve, illetve szabadon futhatnak a drótokon két pózna között. A kecskék a téglalapon kívül és belül is mozoghatnak.

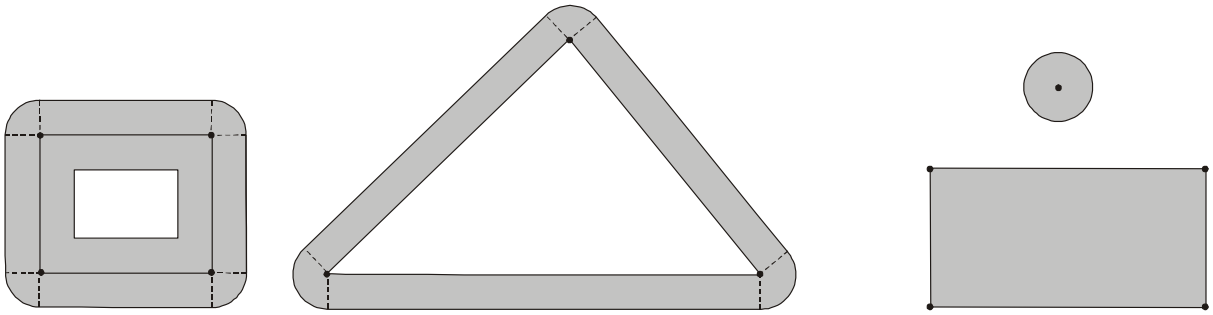
Kecsovszkyék csak a zöldségeskerten kívül engedik legelni a kecskéket. A kert háromszög alakú, oldalai 90, 100, 130 méter hosszúak. A kerítés mentén végigfutó dróton szabadon mozoghatnak a gyűrűk.



Kecsoráék külön tartják a kecskebakot, melynek gyűrűje egy rögzített póznához van kötve. A többi kecskén még kötél sincs, azok bárhol legelhetnek egy 40m × 80m-es téglalap alakú zárt telken belül.

Készíts méretarányos rajzokat, feltüntetve azokat a részeket, ahol a kecskék legelhetnek! Melyik család legelteti a legnagyobb területen a kecskéket?

Megoldás



Eredmény: a három terület egyenlő.
Az ábrán fél cm = a valóságban 10 m. Az egyes területek körcikk alakú részekből és téglalap alakú részekből állnak. Látni fogjuk, hogy
a) a körcikk alakú területek mindhárom esetben egy-egy 10m sugarú teljes kört adnak ki,
b) a téglalap alakú részek összterülete mindhárom esetben 3200 m^2.

Az a), b) állítások a harmadik esetben (Kecsoráék) automatikusan teljesülnek (kivéve, ha a kecskebakot a telekhez közel kötik ki, mert akkor kisebb területet kapnak), az első esetben (Kecskefyék) pedig egyszerű számolással és a négy negyedkör egymás mellé illesztésével igazolhatók. A második esetben (Kecsovszkyék) is csak az a) állítást indokoljuk alaposabban, sőt, azt kétféleképpen is.

I. indoklás
Ha a háromszög szögei α, β, γ, akkor a csúcsoknál létrejövő körcikkek középponti szögei rendre

$$360^\circ - 90^\circ - \alpha - 90^\circ = 180^\circ - \alpha,$$
$$360^\circ - 90^\circ - \beta - 90^\circ = 180^\circ - \beta,$$
$$360^\circ - 90^\circ - \gamma - 90^\circ = 180^\circ - \gamma,$$

ezek összege pedig

$$180^\circ - \alpha + 180^\circ - \beta + 180^\circ - \gamma = 540^\circ - (\alpha + \beta + \gamma) = 360^\circ,$$

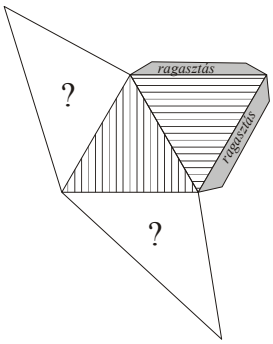
hiszen $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Több dolgozat alapján

II. indoklás
A körcikkek határolósugarai páronként párhuzamosak egymással, így a körcikkek az oldalak mentén egymáshoz tolhatók úgy, hogy együtt épp egy teljes kört adjanak ki.

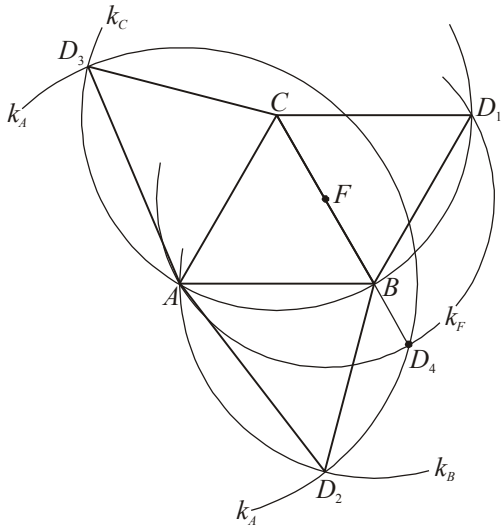
Danka Miklós

15. I. Berangesz fáraó olyan háromszög alapú piramist szeretne építtetni családja örök nyughelyéül, amelynek alapja, és egyik oldallapja[1] egymással egybevágó szabályos háromszög alakú, magassága pedig a lehető legnagyobb. Készítsd el papírból a piramis makettjét! Írd le a szerkesztés lépéseit! (A szabályos háromszögek oldalai legyenek 6 cm hosszúak, a piramist pedig tekintsd háromszög alapú gúlának.)



[1] Bizonyára az az oldala, amely a tavaszi napéjegyenlőség napján a napfelkelte irányába néz.

I. megoldás

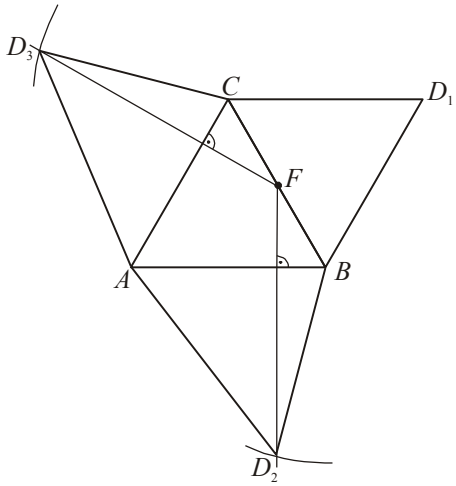


A háromszög alapú gúla alapjának csúcsait A, B, C-vel, a gúla negyedik csúcsát D-vel jelöljük. Ha a BCD, ABD, CAD oldallapokat leforgatjuk a BC, BA, AC egyenesek mentén az alaplap síkjába úgy, hogy ne feküdjenek rá az ABC lapra, akkor rendre a BCD_1, ABD_2, CAD_3 háromszögeket kapjuk. Ha megszerkesztjük az A, B, C, D_1, D_2, D_3 pontokat, akkor az oldallapok felhajtásával megkapjuk a piramis makettjét. Fülekkel és ragasztással vagy más módon rögzíthetjük is majd az oldallapokat.

Legyen BCD a szabályos oldallap, és jelölje BC felezőpontját F. A piramis magassága az D pont és az alaplap távolsága, míg a DF szakasz hossza a D pont és az alaplap egy pontjának távolsága. Mivel a DF szakasz hossza adott, így a piramis akkor lesz a legmagasabb, ha DF épp a testmagasság, azaz ha D épp az F pont "fölött" van. Az AFD háromszög tehát egy egyenlő szárú derékszögű háromszög, amelynek befogói az adott $AF=FD_1$ szakaszokkal egyenlők. Ebből a gúla egyetlen még ismeretlen élének, AD-nek a hossza is szerkeszthető.

A szerkesztés lépései:

1. Felvesszük az ABC, BCD_1 szabályos háromszögeket és a BC szakasz F felezőpontját.
2. Az FB félegyenesre (tehát AF-re merőlegesen) felvesszük az AF-fel egyenlő AD_4 szakaszt.
3. A B középpontú, D_1-en átmenő k_B kör és az A középpontú D_4-en átmenő k_A kör AB-től C-vel ellenkező oldalra eső metszéspontja D_2; míg a C középpontú, D_1-en átmenő k_C kör és k_A AC-től B-vel ellenkező oldalra eső metszéspontja D_3.



Több dolgozat alapján

II. megoldás

Ha felhajtjuk D_2-t, akkor F fölé kell kerülnie, és a felhajtás közben az alapsíkra vonatkozó vetülete az AB forgástengelyre merőleges D_2F egyenesen mozog. Tehát D_2 az F-ből AB-re bocsájtott merőleges félegyenes és a B középpontú BD_1 sugarú k_B kör metszéspontja. Hasonlóan kapjuk D_3-at is.

Véges Márton

Kapcsolódó feladatok, folytatás: 20.

16. Határozd meg azokat az *abab* alakú, négyjegyű természetes számokat, amelyek oszthatók 15-tel!

I. megoldás

Ha az *abab* alakú szám osztható 15-tel, akkor természetesen 3-mal és 5-tel is osztható. Másrészt, ha *abab* osztható 3-mal és 5-tel, akkor osztható 15-tel is, mert a 3 és az 5 relatív prímek!

Ha a szám osztható 5-tel, akkor $b = 0$ vagy 5. Ennek alapján két esetet különböztetünk meg.

I. b=0: Ekkor a szám $a0a0$ alakú. Valamely egész szám pontosan akkor osztható hárommal, ha jegyeinek összege osztható hárommal. Így $a0a0$ pontosan akkor osztható 3-mal, ha $2a$, tehát, ha a osztható 3-mal. Itt három megoldás adódik: 3030; 6060; 9090.

II. b=5: Ekkor a szám $a5a5$ alakú. Most a 3-mal osztva 1 maradékot kell, hogy adjon. Tehát itt is 3 megoldás adódik: 1515; 4545; 7575.
Összesen hat megoldás van.

Blázsik Zoltán

II. megoldás
Egy szám akkor lesz osztható egy másik számmal, ha az összes prímtényezőjével is osztható. $abab = 101 \cdot ab$. 15 prímtényezős $3 \cdot 5$. 101 se 5-tel, se 3-mal nem osztható, ezért ab-nek 3-mal és 5-tel is, azaz 15-tel is oszthatónak kell lennie. Ezért ab csak 15, 30, 45, 60, 75 és 90 lehet. Hat $abab$ alakú 15-tel osztható négyjegyű szám van: 1515, 3030, 4545, 6060, 7575, 9090.

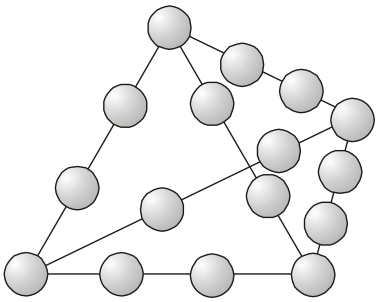
Selmeczy Péter

17. A szilvának 80%-a víz, az aszalt szilvának már csak 40%-a víz. Mennyi szilvából lesz 100kg aszalt szilva?

Megoldás
A 100kg aszalt szilvából 60kg szárazanyag és 40kg víz. A 60% az aszalt szilvánál ugyanannyi, mint a 20% a szilvánál, ezért a 20% a szilvánál 60kg. Ezért a 100% a szilvánál 60kg · 5=300kg. Tehát 300 kg szilvából lesz 100 kg aszalt szilva.

Több megoldás alapján

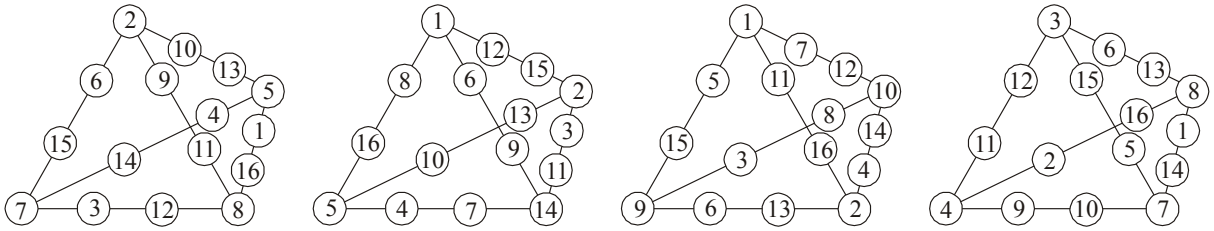
18. Írd be az 1, 2, 3, ..., 16 számokat a tizenhat gömbbe úgy, hogy a tetraéder (háromszög alapú gúla) élein található négy-négy szám összege mindenütt 30 legyen.



Megoldás
A számok összege egy élen 30. Így az éleken számolt összegek összege $6 \cdot 30 = 180$. Másrészt a 16 szám összege csak 136. A különbség 44, ami abból adódik, hogy az első összegben a csúcsokat háromszor-háromszor, a másodikban csak egyszer-egyszer számoltuk. Tehát a 44 a csúcsokba írt számok összegének duplája.
Teljesen mindegy, hogy miket rakunk a csúcsokba csak az a lényeg, hogy 22 legyen az összegük. Íme egy példa a hat élen szereplő számnégyesre:
7 3 12 8, 7 14 4 5, 7 15 6 2, 8 16 1 5, 8 11 9 2, 5 13 10 2.

Blázsik Zoltán

Megjegyzés
Nem egészen mindegy miképp választjuk a négy csúcsra írt számot, hogy összegük 22 legyen, ugyanis nem mindig kapunk megoldást. A fenti megoldásban a négy csúcs: 2 5 7 8. A négy csúcsban lehet még pld: 1 2 5 14, 1 2 9 10, 3 4 7 8.

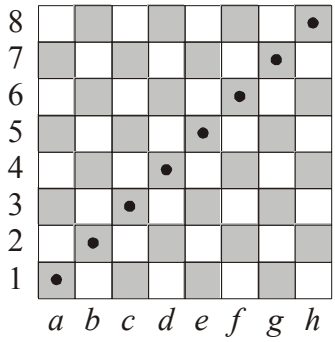


Horváth Anikó gyűjtése

Előzmény: 13.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 23., 28.

19. Ketten a következő játékot játsszák. A sakktábla jobb felső sarkába helyeznek egy bástyát. A két játékos felváltva lép a bástyával, mindig lefelé (akárhány mezőt), vagy balra (tetszőleges számú mezőt). Passzolni nem lehet. Az nyer, aki a bal alsó sarokba lép a bástyával. Tud-e valamelyikük úgy játszani, hogy mindenképpen nyerjen? Hogyan játsszon?

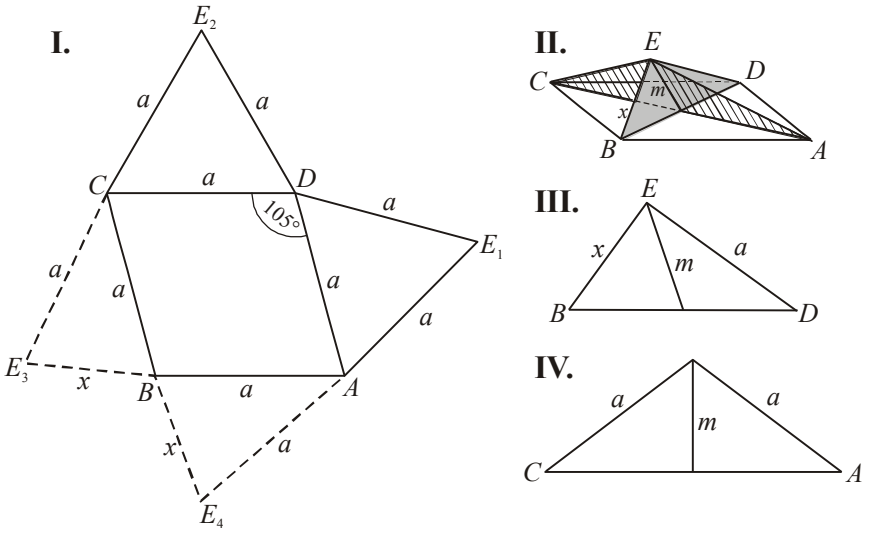
Megoldás
Ha valaki a *b*2 mezőre lép biztosan nyer, hiszen az ellenfele nem bír *a*1-re lépni, de vagy az *a* oszlopra, vagy az 1. sorra kell lépjen. Tehát aki *b*2-re lép az nyer.
Innentől tekinthetjük a feladatot úgy is, hogy a *b*2 mező a cél, vagyis egy 7×7-es négyzetben mozgunk ezentúl. Itt is igaz az, hogy aki a *c*3 mezőre rak, az nyer. És ez így megy tovább egészen addig, amíg kiderül az, hogy a *h*8, vagyis a kezdő mező is nyerő mező.
Tehát a második tud nyerni, ha a kezdő lépése után mindig egy nyerő mezőre rak.



Blázsik Zoltán

Kapcsolódó feladatok, folytatás: 24.
20. II. Berangesz fáraó négyszög alapú piramist tervez magának. Eredetileg úgy képzelte, hogy a piramis alapja 100 cvimedli oldalhosszúságú négyzet lesz, oldallapjai pedig egybevágó szabályos háromszög alakúak, de a földmérők szerint az építmény így épp nem férne el a fáraó kedvenc szigetén. Berangesz módosította a tervet: a négyzet alapot olyan 100 cvimedli oldalhosszúságú rombuszra cserélte, amelynek két szemközti csúcsánál 105º-os szöge van, és az egyik ilyen csúcsnál találkozó két oldallap szabályos háromszög alakú.
Készítsd el papírból a piramis makettjét! Jelöld a méretarányt! Írd le a szerkesztés lépéseit is!

I. megoldás
Az alábbi I. ábrán a piramis kiterített váza, a II. ábrán az összeállított piramis, a III. és IV. ábrákon a piramis azon síkmetszetei láthatók, amelyeket az alap rövidebb illetve hosszabb



átlója és a piramis fölső *E* csúcsa határoz meg. Mindenhol *a* felel meg 100 cvimedlinek.

A piramis kiterített vázán látható A, B, C, D, E_1, E_2 csúcsok könnyen szerkeszthetők, és a hiányzó E_3 és E_4 is azonnal adódna, ha ismernénk az x szakaszt. Ezért alább csak x megszerkesztését részletezzük.

A II-IV. ábrákon m a piramis E csúcsát az alaplap középpontjával, tehát a BD, AC szakaszok közös felezőpontjával köti össze. A IV. ábrán látható CAE háromszöggel egybevágó háromszöget már megszerkesztettünk: lásd pld az ACD háromszöget, amelynek ugyanekkorák az oldalai. Tehát m is megszerkeszthető és megegyezik a rombusz rövidebb átlójának felével.

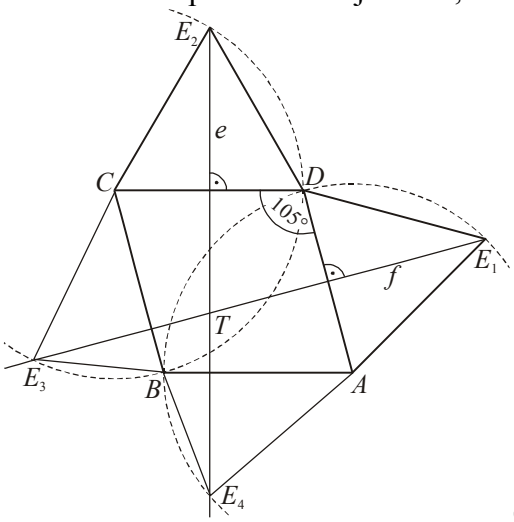
A III. ábrán látható háromszöget úgy szerkeszthetjük meg, hogy felvesszük a BD szakaszt, felezőpontjából m, a D csúcsból pedig a sugárral körzünk: a két kör metszéspontja lesz E. A keresett x szakasz megegyezik BE-vel.

Kupcsik Réka

II. megoldás

Ha a piramis I. megoldás I. ábráján látható kiterített vázát tekintjük és az AE_1D lapot a AD tengely körül felhajtjuk, azaz elforgatjuk, akkor az E_1 csúcs úgy mozog, hogy az alapsíkra vonatkozó merőleges vetülete az E_1-ből AD-ra bocsátott f merőleges egyenesen vándorol. Ugyanígy E_2 vetületének nyomát is követhetjük az CE_2D lap CD körüli forgatása közben: ez mindig az E_2-ből CD-re bocsátott e merőlegesen lesz. Az e, f egyenesek T metszéspontja a piramis E csúcsának alapsíkra való merőleges vetülete.

Ugyanehhez a T vetületi ponthoz kell jutnunk, ha a keresett E_3, E_4 pontokat forgatjuk be a



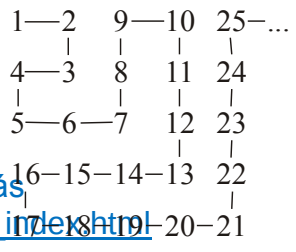
piramis E csúcsáig. Tehát az E_3 pontból BC-re bocsátott merőleges egyenesnek az E_4-ből AB-re bocsátott merőlegessel való metszéspontja is T. Ezért ez a két egyenes éppen f és e, hiszen BC párhuzamos AD-vel, AB pedig CD-vel.

Az E_3 pontot úgy szerkeszthetjük meg, hogy az f egyenest elmetsszük a C középpontú a sugarú körrel (a felel meg a makettban 100 cvimedlinek), míg az E_4 pont az e egyenes és az A középpontú a sugarú kör (rombuszon kívüli) metszéspontja.

Véges Márton

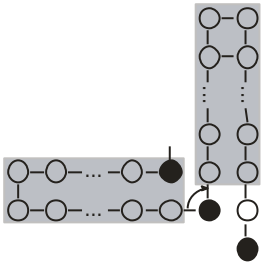
Előzmény: 15.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 25.

21. Melyik szám áll a 100. oszlop és a 100. sor találkozásában, ha a pozitív egészeket az ábrán látható módon rendezzük el?



I. megoldás

Vizsgáljuk meg az átlóban álló számokat: 1, 3, 7, 13, 21, ...!



A közöttük levő különbségek: 2, 4, 6, 8, ... **.** Ebben a sorozatban mindegyik elem kettővel nagyobb, mint az előtte levő, azaz az átló bármelyik pontjából a következőbe 2-vel rövidebb út visz, mint a következőből a rákövetkezőbe. Ennek oka leolvasható az ábrán (az első két átlóspont közti útdarab 90°-os elforgatottja nem vezet el a következő átlóspontba, két lépés még kell). Az átlóban álló számok ezért így írhatók: 1, 1+2, 1+2+4, 1+2+4+6, ... A keresett szám:

$1 + 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + 2\cdot 99 = 1 + 2\cdot(1+2+3+\ldots+99) = 1 + 99\cdot 100 = 9901.$

Több dolgozat alapján

II. megoldás

A 100×100-as négyzetben összesen 100^2 = 10 000 szám van. Ha a négyzetnek páros számú oldala van, akkor az utolsó szám a bal alsó sarokban van, tehát a 100×100-as négyzetben baloldalt alul a 10 000 áll. A 100. sor 100. oszlopába innen 99-et kell jobbra lépni, tehát ott a 10000 – 99 = 9 901 áll.

Marsal Béla

22. Egy gazdának 3 hordója van: *A, B, C.* Az *A* hordó tele van kvásszal, a *B* és a *C* hordó üres. Ha az *A* hordóból áttöltünk a *B* hordóba úgy, hogy a *B* hordó tele legyen, akkor az *A* hordó 2/5-öd részig marad kvász. Ha az *A* hordóból a *C* hordót töltjük tele, akkor az *A* hordó 5/9-ed részéig marad kvász. Ahhoz viszont, hogy a *B* és a *C* hordót is teletöltsük, az *A* hordóban levő mennyiséghez még 4 veder kvászra van szükség. Hány veder kvász fér a hordókba?

Megoldás: Rendre *a, b, c* jelöli, hogy az *A, B, C* hordókba hány veder kvász fér. Fejezzünk ki mindent *a*-val!

$$b = \frac{3}{5}a, \quad c = \frac{4}{9}a.$$

Hozzunk mindent közös nevezőre, majd a 4 veder kvászt is fejezzük ki *a*-val!

$$a = \frac{45}{45}a, \quad b = \frac{27}{45}a, \quad c = \frac{20}{45}a, \quad b + c = \frac{47}{45}a = a + \frac{2}{45}a,$$

tehát 4 veder kvász megegyezik (2/45)*a*-val. Számoljuk ki *a*-t, *b*-t, *c*-t!

$$a = \frac{45}{2}\cdot\frac{2}{45}a = \frac{45}{2}\cdot 4v = 90v, \quad b = \frac{27}{2}\cdot\frac{2}{45}a = \frac{27}{2}\cdot 4v = 54v, \quad c = \frac{20}{2}\cdot\frac{2}{45}a = \frac{20}{2}\cdot 4v = 40v,$$

ahol *v* a „veder kvász”-t jelöli. Tehát az *A, B, C* hordókat rendre 90, 54, 40 veder kvásszal lehet teletölteni.

Blázsik Zoltán

23. A Majmok Tudományos Akadémiájának 45 tagja van. Egyik ülésükön három fontos kérdést tűztek napirendre, amelyről szavazással óhajtottak dönteni. A kérdések a következők voltak:

I. Okosabb-e a majom, mint az ember?
II. Szebb-e a majom, mint az ember?
III. Igaz-e, hogy az ember a majom őse?

A szavazás után kiderült, hogy

a) az I. és III. kérdésre egyaránt 23-23 igen szavazat érkezett, míg a II. kérdésre csak 17;
b) az I. kérdésre igennel válaszolók közül 13-an a II., 12-en pedig a III. kérdésre feleltek nemmel;
c) igent mondott a II. és III. kérdésre 6 „akadémikus”, de közülük ketten az I. kérdésre nemmel szavaztak.

Hányan szavaztak mind a három kérdésre nemmel?

I. megoldás (Bergengóc példatár 49-50. o.)
Vezessük be az *A*, *B*, ..., *H* ismeretleneket azok számának jelölésére, akik a három kérdésre egy bizonyos módon válaszoltak. Az alábbi táblázat mutatja, hogy melyik ismeretlen melyik válaszhármashoz tartozik.

Kérdés	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*
I.	*i*	*i*	*i*	*i*	*n*	*n*	*n*	*n*
II.	*i*	*i*	*n*	*n*	*i*	*i*	*n*	*n*
III.	*i*	*n*	*i*	*n*	*i*	*n*	*i*	*n*

A feladat szövege alapján a következő egyenleteket írhatjuk fel:

I. $A + B + C + D = 23$, **a)** miatt;
II. $A + C + E + G = 23$, **a)** miatt;
III. $A + B + E + F = 17$, **a)** miatt;
IV. $C + D = 13$, **b)** miatt;
V. $B + D = 12$, **b)** miatt;
VI. $A + E = 6$, **c)** miatt;
VII. $E = 2$, **c)** miatt.

Ezek alapján:

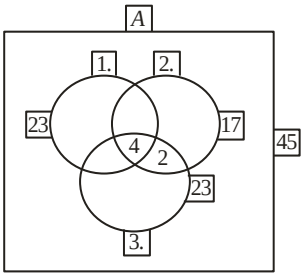
VIII. $A = 4$, VI. és VII. miatt;
IX. $A + B = 10$, azaz $B = 10 – 4 = 6$, I., IV. és VIII. miatt;
X. $A + C = 11$, azaz $C = 7$, I., V. és VIII. miatt;
XI. $D = 13 – 7 = 6$, IV. és X. miatt;
XII. $G = 10$, II., VII, VIII. és X. miatt;
XIII. $F = 17 – 4 - 6 - 2 = 5$, III., és VII-IX miatt;
XIV. 45 majom van összesen, így
$H = 45 - A – B – C – D – E – F – G = 45 – 4 – 6 – 7 – 6 – 2 – 5 – 10 = 5$.

Tehát öten válaszoltak mind a három kérdésre nemmel.

Ádám György

II. megoldás (Bergengóc példatár 50-51. o.)

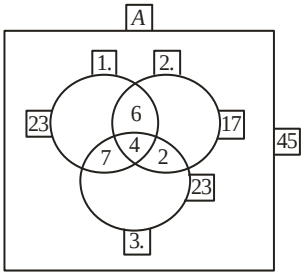
Ábrázoljuk Venn-diagrammon az alábbi halmazokat:

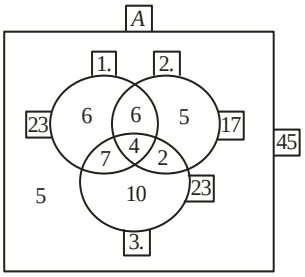


A: az „akadémikusok” halmaza (alaphalmaz);
1.: az 1. kérdésre igennel válaszolók halmaza;
2.: az 2. kérdésre igennel válaszolók halmaza;
3.: a 3. kérdésre igennel válaszolók halmaza!

Az ábrán az oldalsó „fülekbe” az adott halmaz elemszámát írtuk be. Az 1., 2., 3. halmazok az alaphalmazt nyolc részre osztják. Megpróbáljuk kitalálni, hogy az egyes részekbe hány akadémikus tartozik.

Tudjuk, hogy a **c)**-ben említett 6 „akadémikus” közül 4 mind a három kérdésre igennel felelt, és 2 csak az 1. kérdésre felelt nemmel (lásd az előző ábrát).
b) és **c)** alapján tudjuk, hogy az 1. és 2. kérdésre igennel válaszolók 10-en, az 1. és 3. kérdésre igennel válaszolók 11-en vannak. Ha figyelembe vesszük, hogy ezekből 4-en mind a három kérdésre igennel válaszoltak, akkor tovább folytathatjuk a kitöltést (lásd a következő ábrát!).





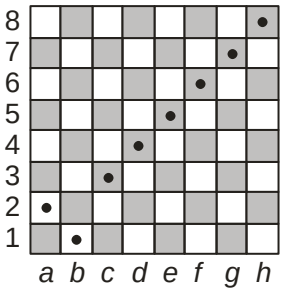
Ki kell számolni, hogy hányan szavaztak csak az
1. kérdésre igennel: 23 – (6 + 4 + 7) = 6-an;
2. kérdésre igennel: 17 – (6 + 4 + 2) = 5-en;
3. kérdésre igennel: 23 – (7 + 4 + 2) = 10-en.

Meghatározzuk azoknak az akadémikusoknak a számát, akik legalább egy kérdésre igennel szavaztak: 6 + 4 + 7 + 2 + 10 + 5 + 6 = 40. A többiek (45 – 40 = 5-en) mindhárom kérdésre nemmel válaszoltak.
Tehát 5 majom szavazott mind a három kérdésre nemmel.

Kovács Péter

24. Elemezd a 19. feladat játékát abban az esetben, amikor az *veszt*, aki a bal alsó sarokba lép!

Megoldás: Ekkor tehát *a*1 egy vesztő mező (aki oda lép az veszít!). Ha valaki *a*2-re vagy *b*1-re lép az nyer, hisz a következő lépésben már csak *a*1-re lehet lépni, ami pedig veszt.
Tehát *a*2, és *b*1 nyerő mezők. Aki az *a* oszlopba lép, de nem *a*2-re az veszít, hisz a következő lépésben az ellenfél *a*2-re megy, és nyer (hasonlóan megfogalmazható ugyanez az eszme a *b* oszlopra, az 1. és a 2. sorra is.)



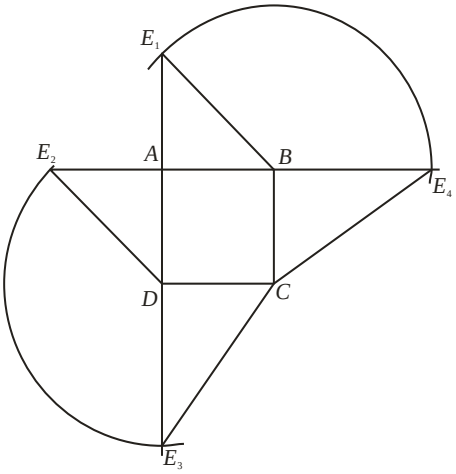
Ezután pedig a nyerő mezők a 19. feladatra adott megoldás mintájára megkereshetők (*c*3, *d*4, *e*5, *f*6, *g*7, *h*8). Tehát a második tud nyerni, ha a kezdő lépése után mindig a nyerő mezőkre lép.

Blázsik Zoltán

Előzmény: 19.

25. III. Berangesz fáraó négyzet alapú piramist tervez magának. A csúcsa az alap egyik csúcsa felett lesz, és legrövidebb oldaléle (ami egyben a testmagassága) egyenlő hosszú lesz az alapél hosszával.
a) Készítsd el papírból a piramis makettjét! Írd le a szerkesztés lépéseit is!
b) Berangesz két fia az apjukéval és egymáséval egyforma alakú, de a térben esetleg másképpen elrendezett emlékművet építene magának, és ezeket úgy illesztenék egymás mellé, hogy a közös nagy emlékműnek kívülről mindegyik oldallapja ugyanolyan legyen. Lehetséges-e ez?

Megoldás:
a) Az *ABCDE* piramis kiterített vázát szerkesztjük meg. Az *ABCD* alapnégyzetet könnyen megrajzolhatjuk, majd emellé kell megkeresnünk az *ABE*, *DAE*, *CDE*, *BCE* oldallapok ABE_1, DAE_2, CDE_3, BCE_4 kiterített megfelelőit.



1. Az *AB*, *AD* oldalakra egy-egy derékszögű, egyenlő szárú háromszöget szerkesztünk: BAE_1 és DAE_2.

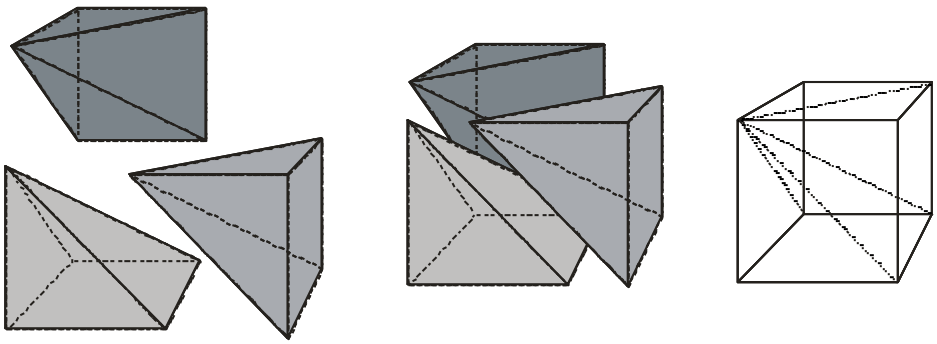
2. Az E_3 csúcs a *CD* él körüli forgatáskor (felhajtáskor) *A* fölötti *E* csúcsba kerül, ezért E_3 az *AD* egyenesen van, *D*-től *A*-val ellenkező irányban. Másrészt $DE = DE_2 = DE_3$, tehát E_3 a *D* középpontú DE_2 sugarú körre is illeszkedik. A kör és a félegyenes metszéspontjaként kapjuk az E_3 pontot.

3. Hasonlóan szerkeszthető az E_4 pont.

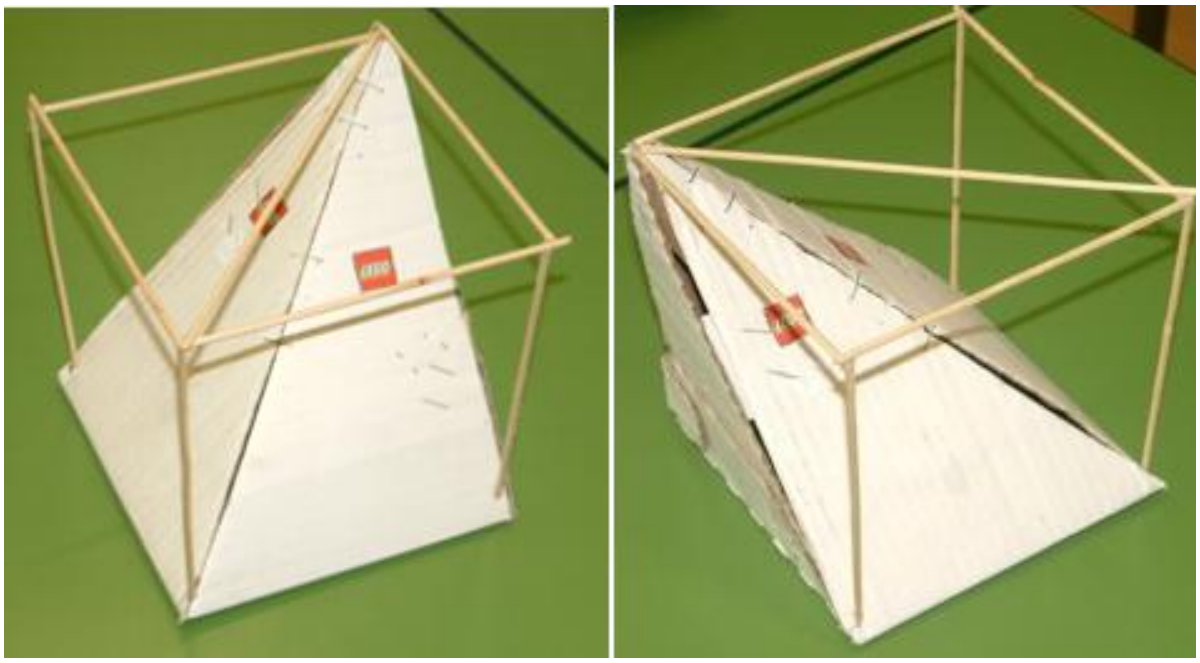
b) Lehetséges, a három piramisból kaphatunk egy kockát. Ehhez úgy kell összeilleszteni őket, hogy a három piramisban a négyzetlappal szemközti csúcs (fent *E*) ugyanott legyen.

Karsa Anita

Tanári megjegyzés
Nagyon nehéz lenne pontosan megindokolni, hogy a három gúlából miért rakható ki a kocka. Elfogadtunk egy-egy szép ábrát, vagy az elkészített modelleket az egymáshoz illeszkedő lapok jelölésével.
Egy tanári ábra a Coreldraw rajzolóprogrammal:

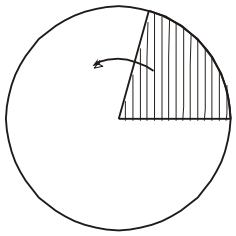


Kalló Bernát modellje kemény csomagolóanyaggal és hurkapálcikákkal:



Előzmény: 20.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 30.

26. Az ábrán látható 75º-os körcikket elforgatjuk 75º-kal az óra járásával ellenkező forgásirányban. A kapott körcikket újból elforgatjuk 75º-kal, stb. Hányszor kell a forgatást elvégezni, hogy visszajussunk az eredeti körcikkhez?



I. Megoldás
Képzeljük a kört egy teljes szögmérőnek, amelyben az adott körcikk eredetileg úgy áll, hogy – középről nézve – jobb oldali szára a 0°-felé áll. Ha felírjuk, hogy az egyes forgatások után a szögmérőn leolvasható mely szög felé áll a jobb oldali szár (a „°” fok jeleket lehagyjuk), akkor az egymást követő számok között mindenütt 75 lesz a különbség, illetve ez időnként elromlik, mert a 360-nál nagyobb vagy egyenlő értékekből 360-at le kell vonnunk. Csak addig kell nézni a sorozatot, amíg újra 0-hoz érünk, hiszen ekkor áll vissza az eredeti pozíció.

0, 75, 150, 225, 300,
15, 90, 165, 240, 315,
30, 105, 180, 255, 330,
45, 120, 195, 270, 345,
60, 135, 210, 285, 0

Mivel az kiindulási helyzet nem számít bele a forgatások számába, ezért az a kérdés, hogy a 75-től kezdődően hányadik szám lesz ismét 0. Jelen esetben a 24. szám lesz ismét 0, tehát a 24. forgatás után áll vissza ugyanez a kiinduló helyzet.

Blázsik Zoltán dolgozata alapján

Megjegyzés
Az előző bizonyításból az is kiderül, hogy nem lényeges a körcikk szöge. Ha egy 17º-os körcikkből indulunk ki és azt minden lépésben 75º-kal forgatjuk, akkor is épp 24 lépés után érünk vissza az eredeti helyzethez.

Kornis Kristóf

II. Megoldás
A feladatot így fogalmazhatjuk át:

26'. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel 75-öt megszorozva 360-nal osztható számot kapunk?

Azt kell tehát megnéznünk, hogy 360 és 75 legkisebb közös többszörösében hányszor van meg a 75. 75 és 360 prímtényezős alakja:

$$75 = 3\cdot 5^2, \qquad 360 = 2^3\cdot 3^2\cdot 5,$$

tehát legkisebb közös többszörösük $2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, amelyben 75 épp $2^3\cdot 3 = 24$-szer van meg.

Kupcsik Réka

Forrás: Mathematics Teachers Calendar.

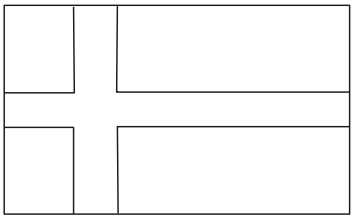
27. Egy edény és a benne lévő víz együttes tömege 2000 gramm. Ha kiöntjük a víz 20%-át, akkor az edény és a víz együttes tömege az eredetinek 88%-ára csökken. Számítsd ki az edény tömegét!

Megoldás
Ha a víz 20%-ának kiöntése után 12%-kal csökken a teljes súly, akkor a víz 100%-ának kiöntése után 12·5% = 60%-kal csökken a teljes súly, mert 100%:20%=5. Tehát a 2000g 60%-a a víz és 40%-a az edény. 2000g 60%-a 1200g és 40%-a 800g, tehát az edény súlya 800g.

Petz Tamás

Előzmény: 17. feladat.

28. A finnek nemzeti zászlója: fehér téglalap alapon fekvő kék kereszt (lásd az ábrát!). A kék kereszt hosszabbik sávjának a területe 8800 cm^2, a rövidebbik sáv területe pedig 5400 cm^2. Mekkora a zászló területe, ha a kék kereszt 12600 cm^2 területű?



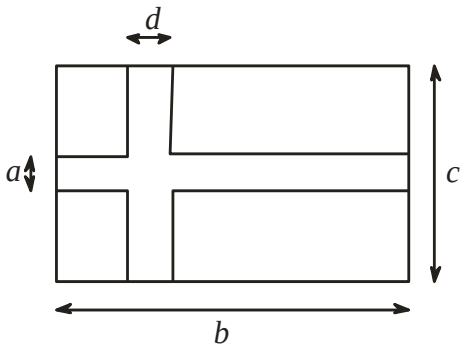
I. megoldás
Először kiszámolom annak a résznek a területét, ahol a két csík összeér.
Ha a két csík területét összeadom, akkor pontosan ezzel a területtel kapok többet a kék kereszt területénél. Tehát a közös rész területe: 8800+5400 -12600=1600 cm^2. Ez a rész egy négyzet, amelynek oldala

$$\sqrt{1600}$$

azaz 40cm. A két sáv egy-egy oldala 40 cm hosszú, tehát a másik oldal 8800:40=220 cm-es, illetve 5400:40=135 cm-es. A zászló területe 220·135 = 29700 cm^2.

Selmeczy Péter

II. (általános) megoldás
Nem kell kihasználni, hogy a közös rész négyzet, akkor is megoldható a feladat, ha csak annyit teszünk fel róla, hogy téglalap.



Az ábra jelöléseivel az I. megoldásban a sávok közös részére vonatkozó eredmény így írható:

$$a \cdot d = 1600 \text{ cm}^2.$$

Most pedig számoljuk ki, hogy a hányad része c-nek, valamint, hogy d hányad része b-nek.

$c \cdot d = 5400$ cm^2, $a \cdot d = 1600$ cm^2, így $c/a = 5400/1600 = 3{,}375$.
$b \cdot a = 8800$ cm^2, $d \cdot a = 1600$ cm^2, így $b/d = 8800/1600 = 5{,}5$.

Ennek alapján a zászló területe
$b \cdot c = (3{,}375 \cdot a) \cdot (5{,}5 \cdot d) = 3{,}375 \cdot 5{,}5 \cdot (a \cdot d) = 3{,}375 \cdot 5{,}5 \cdot 1600$ cm^2 = 29700 cm^2.

Tehát a finn zászló területe 29700 cm^2.

Blázsik Zoltán és Marsal Béla

III. (általános) megoldás
Az előző megoldás lényegretörőbben (cm^2-rel számolva):

$$b \cdot c = \frac{(b \cdot a) \cdot (c \cdot d)}{a \cdot d} = \frac{8800 \cdot 5400}{1600} = 29700.$$

Grósz Dániel és Véges Márton

Előzmény: 18. feladat.
Forrás: Varga Tamás Matematikai Versenyek

29. Osztójáték 24-gyel
Ketten felváltva mondhatják 24 pozitív osztóit. A 24-et, továbbá már kimondott osztó osztóját nem lehet mondani. Az veszt, aki már nem tud mondani osztót. Kinek van nyerő stratégiája, Kezdőnek vagy Másodiknak? Hogyan játsszon?

Megoldás
24 osztói: 1, 2, 3, 4, 6, 8 és 12. Ezeket a számokat csoportosítsuk így:

1| 2, 3 | 4, 6 | 8, 12.

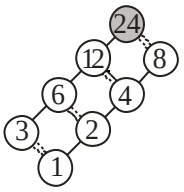
Kezdő először húzza ki az egyest! Utána bármit húz Második, Kezdő annak a számnak a párját húzza (pl. ha 2-est húzott Második, akkor Kezdő 3-ast húz), ezt folytatják még nincs több osztó. Így Kezdő biztosan nyer.

Selmeczy Péter

Variációk (egyben segítség és kiegészítés a feladat megoldásához)

29.1. Rajzolj táblát a játékhoz! Minden osztó legyen egy mező.
Az *a* osztó mezője kerüljön a *b* osztó mezője fölé, ha *a* a *b* többszöröse. Tehát legalulra az 1 kerüljön. Közvetlen föléje mik? Azok fölé?

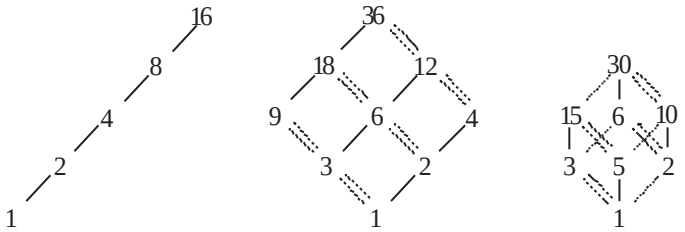
Megoldás
A mellékelt ábrán látható a tábla. A 24-es mező tiltott arra nem lehet lépni. A 29. feladat megoldásában szereplő csoportosításban az azonos szinten, „magasságban” levő számok kerültek egy csoportba. Kezdő a fenti taktika alapján úgy játszik, hogy minden lépése után megszűnik egy teljes szint és az összes alatta levő. Így Második mindig kénytelen egy magasabb szinten levő számot mondani, amelynek csoportbeli párja még biztosan szabadon mondható. Tehát Kezdő taktikája valóban tartható.



Az ábrán látható elrendezést a 24 osztóhálójának is nevezik. Érdekes benne, hogy minden jobbra-fölfelé lépés (sima vonal) 2-vel való szorzásnak, minden balra-fölfelé lépés (dupla szaggatott vonal) 3-mal való szorzásnak felel meg.

29.2. Rajzoljuk meg 16, 36 és 30 osztóhálóját!

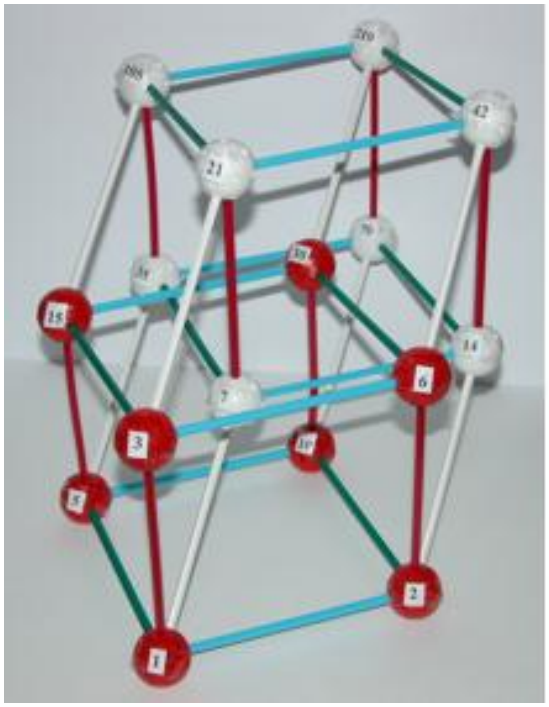
Megoldás



Tanári megjegyzés
A diákok meg szoktak lepődni mikor felismerik milyen térbeli testet formáz a 30 osztóhálója. Természetes módon szokott adódni az alábbi feladat.

29.3. Rajzold meg 210 osztóhálóját! Próbáld a térben elkészíteni az ennek megfelelő négydimenziós kockát!

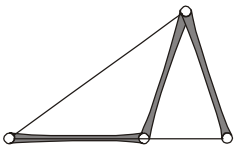
Megoldás
Alább balra Károlyi Gergely, jobbra Kalló Bernát térbeli szerkezetének fényképe látható.



Előzmény: 24., **Kapcsolódó feladatok, folytatás:** 34.
Forrás, ajánlott olvasmány: Varga Tamás: Osztójáték, az „Élő matematika” című kötetben (Tankönyvkiadó, Budapest, 1968)

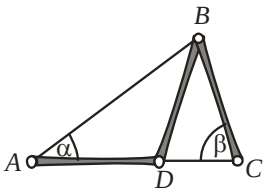
30. V. Berangesz fáraó olyan piramist szeretne építtetni magának, amelynek alapja szabályos ötszög (minden oldala egyenlő és minden belső szöge is egyenlő), oldallapjai pedig szabályos háromszögek. V. Berangesz és mesterei a szabályos ötszög megszerkesztésével bajlódnak. A fáraó apja hagyatékában egy három egyenlő hosszú rúdból álló eszközt, egy pár egyenlő hosszú kampós végű drótot, és egy levelet talál.

Drága fiam!
Hagyományunk nehéz feladat elé állít, de ne rettenj meg tőle. A csodakígyó segítségével célt érhetsz, ha a drótokkal az ábra szerint béklyózod meg. Az egyforma drótokat legkedvesebb mesterem olyan hosszúra vágta, hogy egyikük a kígyó testén halad annak harmadáig, majd a fejénél fogja meg azt. Járj sikerrel! A csodakígyód ne feledd el továbbadni gyermekeidnek, egy Berangesznek még szüksége lehet rá!
Atyád

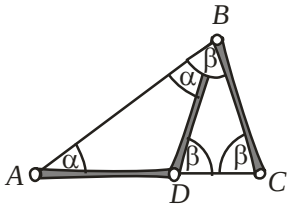


Hogyan lehet a csodakígyó segítségével megszerkeszteni a szabályos ötszöget?

I. megoldás (a csodakígyó vizsgálata)



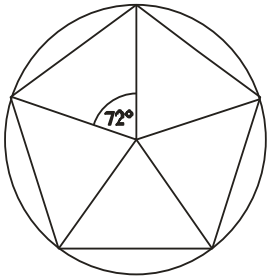
Számoljuk ki az ábrán látható szögeket! A mellékelt ábra jelöléseivel *AD* = *BD*, valamint *BD* = *BC*, így nem csak a *BAD* szög α, hanem az *ABD* szög is, valamint nem csak a *BCD* szög β, hanem a *BDC* szög is. Mivel *AB* = *AC*, ezért az *ABC* szög is megegyezik az *ACB* szöggel, β-val.



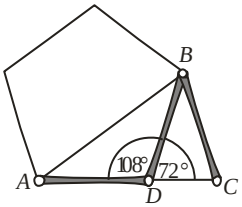
Az *ADB* háromszögben az *ADB* szög nagysága kifejezhető: 180-2α; ennek és a *BDC* = β szögnek az összege 180°, ezért β = 2α. Az *ABC* háromszög belső szögeinek összege 180° = α + β + β = 5α, amiből α = 36°, β = 72°.

Blázsik Zoltán

II. megoldás (a szabályos ötszög szerkesztése I.)



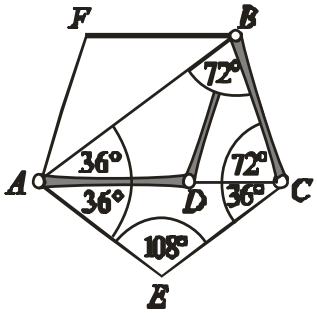
Szabályos ötszöget úgy szerkeszthetünk, hogy egy körbe a középpontból öt sugarat indítunk úgy, hogy az egymás melletti sugarak szöge mindig ugyanakkora legyen (lásd az ábrát). Egy ilyen szög nagysága épp 360°/5 = 72°. Ez a szög megjelenik a csodakígyón, ami a kör középpontjába átmásolható, így a kígyóval könnyen szerkeszthető az ötszög.



A szabályos ötszög belső szögei 108°-osak, ami épp az *ADB* szöggel egyezik meg, ennek alapján is szerkeszthető az ötszög.

Fazekas Barbara

III. megoldás (a szabályos ötszög szerkesztése II.)

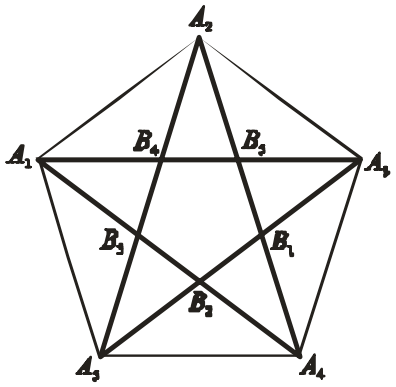


A szabályos ötszög belső szögei (az ábrán pld. *AEC*) 108°-osak. Egy-egy átló által az ötszögből levágott háromszög (az ábrán pld. *AEC* és *AFB*) egyenlő szárú, így szögei: 108°, 36°, 36°. Az ábrán látható *ABC* háromszög. Ezekből adódnak a *BAC* háromszög szögei: 72°, 36°, 72°. Ugyanilyen szögei vannak a csodakígyó *A*, *B*, *C* pontjai által alkotott háromszögnek.
Az *AFBCE* szabályos ötszög tehát úgy is megszerkeszthető az *ADBC* csodakígyóból, hogy *BC* szakasszal körívezünk *C*-ből és *A*-ból (megfelelő metszéspontjuk lesz *E*), illetve *A*-ból és *B*-ből (megfelelő metszéspontjuk *F*).

Blázsik Zoltán

Variációk

30.1. A III. megoldás ábráján úgy tűnik, hogy a *BD* egyenes épp átmegy az *E* csúcson. Döntsük el, hogy ez tényleg így van-e!

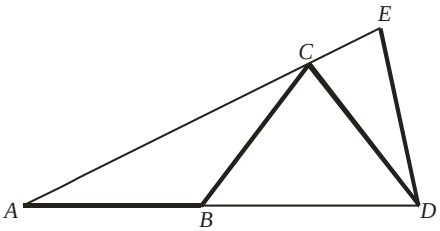


Megoldás
A *CBE* háromszög egybevágó az *ECA* háromszöggel, így a *CBE* szög 36°-os. A 30. feladat I. megoldásából kiderül, hogy a *CBD* szög is 36°-os, így *B, D, E* egy egyenesen vannak.

Ha a szabályos ötszögbe berajzoljuk az összes átlót, akkor 15 egyforma hosszúságú szakaszt is láthatunk: A_1B_2, B_2A_3, A_3B_4, B_4A_5, A_5B_1, B_1A_2, A_2B_3, B_3A_4, A_4B_5, B_5A_1, továbbá A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_1.

Szőke Nóra

30.2. Szuper csodakígyó
A mellékelt ábrán $AB = BC = CD = DE$, továbbá $AE = AD$. Határozd meg az *EAD* szög pontos értékét!



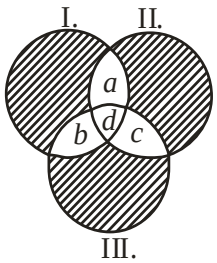
Megoldás
Legyen $CAB = \alpha$. $AB = BC$, így $ACB = \alpha$.
CBD az *ABC* háromszög külső szöge, tehát $CBD = 2\alpha$.
$CB = CD$, ezért $CDB = 2\alpha$, $BCD = 180° - 4\alpha$. $ECD = 180° - BCD - BCA = 3\alpha$.
$CD = DE$, így $CED = 3\alpha$. $AE = AD$, így $EDA = 3\alpha$.
Az *ADE* háromszög szögei α, 3α, 3α, így $\alpha = 180°/7$.

Tanári megjegyzés
Felmerül a kérdés, hogy IV. Berangesz miként jutott hozzá a csodakígyóhoz. Később visszatérünk rá, hogy megmutassuk, a csodakígyó, így a szabályos ötszög (és a tízszög is, miért?) megszerkeszthető körzővel és vonalzóval. Ezzel ellentétben nem létezik olyan eljárás, amellyel - csupán körző és vonalzó segítségével – előállítható lenne a 30.2. feladat szuper csodakígyója.

Előzmény: 25. (csak formai kapcsolat),
2002. évi hatodikos szakkör 17. foglalkozás 4. feladat, 21. foglalkozás 4. feladat.

Kapcsolódó feladatok, folytatás: 35.
31. Egy osztály a tanév folyamán három kirándulást szervezett. Az elsőn az osztály tanulóinak 70%-a, a másodikon 80%-a, a harmadikon 90%-a vett részt. Így 12 tanuló háromszor, a többi pedig kétszer kirándult. Hányan voltak az osztályban?

I. megoldás
Jelöljük *x*-szel az osztály létszámát, jelöljük továbbá azon gyerekek számát, akik mind a három kiránduláson részt vettek *d*-vel, azokét, akik az I. és II. kiránduláson vettek részt *a*-val azokét, akik az I. és III. kiránduláson vettek részt *b*-vel, és azokét, akik a 2. és 3. kiránduláson vettek részt *c*-vel!



Írjuk fel az összes olyan összefüggést, amelyek a szövegből felírhatóak!

$a+b+d = 0{,}7x$; $a+c+d = 0{,}8x$; $b+c+d = 0{,}9x$; $a+b+c+d = x$; $d = 12$.

Mivel $a+b+d = 0{,}7x$, így $c = 0{,}3x$;
mivel $a+c+d = 0{,}8x$, így $b = 0{,}2x$;
mivel $b+c+d = 0{,}9x$, így $a = 0{,}1x$.
Tehát $x-a-b-c = d = x - 0{,}3x - 0{,}2x - 0{,}1x = x - 0{,}6x = 0{,}4x = 12$, így $12/0{,}4 = 30$-an járnak ebbe az osztályba.

Blázsik Zoltán

II. megoldás
Ha összeadjuk azoknak a számát, akik részt vettek az első, akik részt vettek a második, és akik részt vettek a harmadik kiránduláson, akkor azokat a diákokat, akik csak egy kiránduláson voltak jelen (ilyen most nincs) egyszer számoljuk, azokat a kettőn voltak kétszer vesszük és azokat, akik mindegyiken jelen voltak háromszor is figyelembe vesszük.

Ha most összeadjuk a három százalékértéket (70%+80%+90%), akkor 240%-ot kapunk. Ebben minden diákot kétszer számoltunk (200%), és azokat, akik mindhárom kiránduláson jelen voltak ehhez képest még egyszer figyelembe vettük. Tehát a 40% felel meg a 12 embernek. Így a 100%, azaz az osztály létszáma 30.

Nagy Márton dolgozata alapján

Előzmény: 23, 28.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 33., 37.

32. Megkértünk valakit, hogy gondoljon egy tetszőleges többjegyű számra, majd számítsa ki a jegyek összegét, és ezt vonja ki a gondolt számból. A kapott különbségből egy tetszőleges, 0-tól különböző számjegyet töröl, és a megmaradt jegyek összegét megmondja (vagy magukat a megmaradt jegyeket). Ebből ki tudjuk találni a törölt számjegyet. Hogyan?

Didaktikai megjegyzés
Szakkörön szórakoztató és hasznos a következőképpen eljátszani a feladatot. A tanár megkér minden diákot, hogy gondoljon egy ötjegyű pozitív egész számra, vonja ki belőle jegyeinek összegét, és a kapott számot egy jegy kihagyásával írja le egy cetlire. A tanár körbemegy és a cetlikre pillantva mindenkinél kitalálja a kihagyott számot.

A gyerekek ezután összebeszélhetnek, megnézhetik kapott számaikat, ezek összegyűjtése után megkereshetik közös tulajdonságaikat. Gyakran maguk is rájönnek miképp lehet kitalálni a gondolt számot, mielőtt még a szükséges bizonyításokat látnák. Ezután jöhet az állítások közös megfogalmazása, majd a bizonyítás. Végül el lehet rajta gondolkodni, hogy tényleg szükség van-e a maradék jegyek értékeire, kiderül, hogy már elégséges az összegük ismerete is.

Megoldás
Rögtön azt a feladatot taglaljuk, amely esetben csak a megmaradt szám számjegyeinek összegét adják meg. Írjuk fel a feladatot általánosan! Legyen a szám pl. négyjegyű: $\overline{xyzv}$, ekkor a számjegyek levonása utáni különbség:

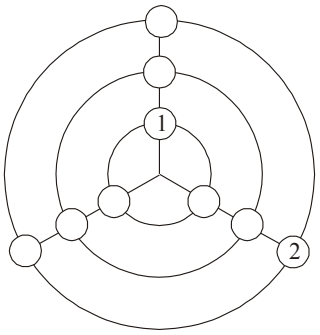
$$\overline{xyzv}-(x+y+z+v)=1000x+100y+10z+v-x-y-z-v=999x+99y+9z.$$

A fent írtakból kiderül, hogy az a szám, amelyből törlünk egy számjegyet az osztható 9-cel. Ám ha ez a szám osztható 9-cel, akkor – a 9-cel való oszthatóság szabálya szerint – számjegyeinek összege is osztható 9-cel. Tehát a megmaradt jegyek összegét a kihagyott szám egy 9-cel osztható számra növeli fel. Ezen az elven gyorsan és egyértelműen határozható meg a kihagyott szám.

Ha pl. 1256-ra gondoltak, akkor 1256-13 =1233-ot kaptak. Amennyiben ebből kihagyják a 2-est, akkor a megmaradt számok összege 1+3+3=7 lesz, amelyet (1-től 9-ig terjedő számmal) csak 2-vel megnövelve kapható 9-cel osztható szám, tehát kitalálhatjuk, hogy a 2 maradt ki.

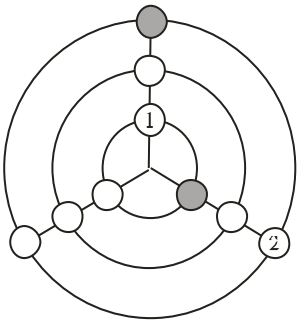
Blázsik Zoltán, Selmeczy Péter és Horváth Eszter

Kapcsolódó feladatok, folytatás: 39.



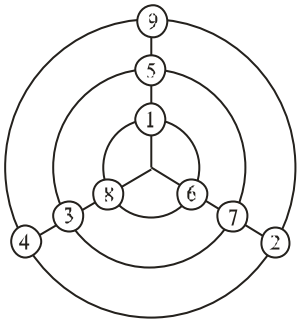
33. Mágikus céltábla
Hogyan kell beírni a hiányzó helyekre 3-tól 9-ig a természetes számokat úgy, hogy a számok összege minden sugár és kör mentén ugyanaz legyen? Hány megoldás van?

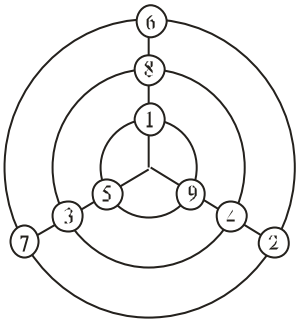
Megoldás



Jelölje a közös összeget B. A három körön a számok összege egyrészt $3B$, másrészt egyenlő a kilenc szám összegével, azaz 1+2+...+8+9 = 45-tel. Ebből B = 15. Az 1-et 15-re kiegészítő összegek: 1+9+5 és 1+8+6. Ennek a két számhármasnak kell az 1-et tartalmazó körbe és sugárra kerülnie.
Az ábrán szürkével jelölt két hely az 1-es és a 2-es valamely vonalának kereszteződésében áll. Ezeken nem állhat az 5-ös, mert akkor a 2-vel közös vonalára kellene elpazarolni a 8-ast, pedig az az 1-eshez kell. Ha 8-as lenne valamelyik szürke mezőn, akkor az 5-ösre lenne két helyen szükség.

Tehát a szürke mezőkön csak a 9-es és a 6-os állhat. Ha ezeket beírjuk, akkor már egyértelmű a céltábla kitöltése. Az alábbi két megoldást kapjuk:





Szőke Nóra, Heusinger Ádám

Előzmény: 13, 18.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 41.

34. Osztójáték, 36-tal
Ketten felváltva mondhatják 36 pozitív osztóit. A 36-ot, továbbá már kimondott osztó osztóját nem lehet mondani. Az veszt, aki már nem tud mondani osztót. Kinek van nyerő stratégiája, Kezdőnek vagy Másodiknak? Hogyan játsszon?

I. megoldás
Írjuk fel a 36 pozitív osztóit: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 (ebből a 36-ot nem lehet választani!).

A következőkben Kezdő lépéseit vizsgáljuk egészen addig, amíg nem tud olyat lépni, amivel mindenféleképpen megnyerné a játékot!

- *ha a 18-at választja:* a számok, amelyek közül választhat Második: 12 és 4. Ha a 12-t választja, akkor nyer is Második. Tehát ez nem jó Kezdőnek.

- *ha a 12-t választja:* a számok, amelyek közül választhat Második: 18 és 9. Ha a 18-at választja, akkor nyer is Második. Tehát ez nem jó Kezdőnek.

- *ha a 9-et választja:* a megmaradt osztók: 18, 12, 6, 4, 2. Ha valamelyik játékos a 18 és a 12 egyikét mondja, akkor a másik játékos a másik számot mondja és nyer. Ezért Második a 2 választásával nyerni tud: Kezdő a 4 és 6 egyikét mondja, ha nem akar rögtön veszteni, de erre Második a 4 és 6 közül megmaradtat választja ki és a következő körben nyer. Tehát ez sem jó Kezdőnek.

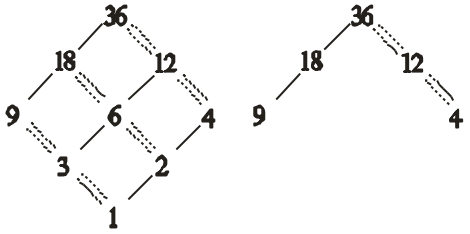
- *ha a 6-ot választja:* a megmaradt osztók:18, 12, 9, 4. Ha Második a 18 és a 12 egyikét mondja, akkor Kezdő a másik számot mondja és nyer. Ha Második a 9 és a 4 egyikét mondja, akkor Kezdő a másik számot mondja és a következő körben nyer.

Nem is kell tovább néznünk Kezdő így biztosan nyer, ha a 6-ossal kezd, majd pedig az előbb leírt módon játszik.

Blázsik Zoltán

II. megoldás

Figyeljük meg 36 osztóhálóját! Szimmetrikus a „36-6-1 tengelyre”. Ha Kezdő kiválasztja a 6-ot, akkor a maradék tábla szimmetrikus marad, de szimmetria-tengelyén már nem lesz választható szám, így Kezdő mindig fog tudni ellenfele lépésével szimmetrikusan lépni, ezért nem kaphat ki. Legkésőbb a harmadik lépésével nyer is.



Kalló Bernát, Selmeczy Péter

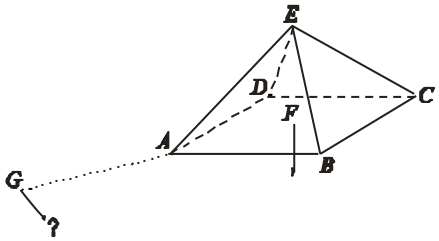
Kérdés

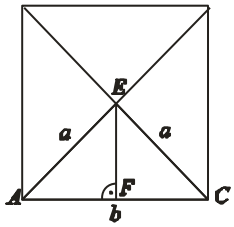
36 mellett milyen számokra általánosítható a fent leírt stratégia? Hogyan?

Előzmény: 29.

35. VII. Berangesz fáraó piramisa négyzet alapú, oldallapjai szabályos háromszögek, magassága pedig 70 cvimedli. A piramis belsejébe csak a középpontja alatt fúrt függőleges kútból fölmászva lehet eljutni. A kútba egyenes alagút vezet le, melynek iránya a vízszintessel 60º-ot zár be, felső bejárata pedig a piramis egyik sarkától 77 cvimedli távolságra található a szemközti sarokkal épp ellenkező irányban.

Milyen hosszú az alagút?

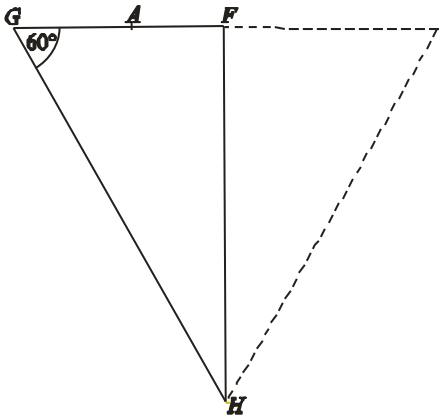




Megoldás

Nézzük úgy a piramist, hogy az alapja egyszerű szakasznak látszódjék, és az alja az alap négyzet átlója legyen. Feltűnik, hogy az így külön lerajzolt *ACE* háromszög kiegészíthető egy olyan négyzetté, amelynek oldala az eredeti négyzet átlója (*AC*). Ebből következik, hogy az *AEC* szög derékszög, az *EAC*, *ECA*, *AEF*, *CEF* szögek értéke 45°-45°. Hogyha ez igaz, akkor tudjuk azt is, hogy *AF* = *FE* = 70 cvimedli.

Tudjuk, hogy az alagút, a kút és a piramis alapjának közepétől a kút bejáratáig húzódó szakasz egy háromszöget alkot (az ábrán *GFH*). Ha ezt a háromszöget tükrözzük a kút vonalára, akkor egy szabályos háromszöget kapunk, amelynek oldalai egyenlők egymással és a *GF* szakasz kétszeresével. *GF* = 77 + 70 = 147 cvimedli, tehát 294 cvimedli hosszú az alagút.



Karsa Anita

Kiegészítés (*Az AEC háromszög jellemzése*)

Az *AEC* és *ABC* háromszögek oldalai páronként megegyeznek egymással, tehát ezek a háromszögek egybevágók. *ABC* nyilván egyenlő szárú és derékszögű, így az *AEC* háromszög is ilyen.

Kupcsik Réka

Előzmény: 25., 30.

Folytatás: 40., 47.

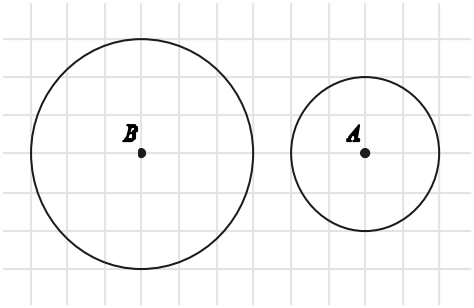
36. Adott a síkon az A és a B pont. Tudjuk, hogy a következő állítás nem igaz:

A sík bármely olyan P pontjára, amelyre teljesül a $PA < 2$ egyenlőtlenség, teljesül a $PB > 3$ egyenlőtlenség is.

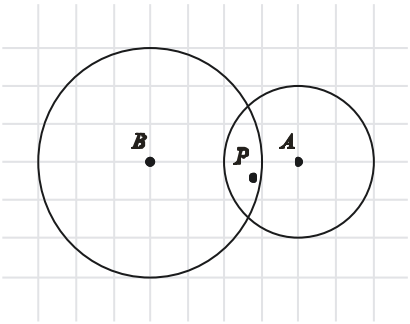
Mit állíthatunk az AB távolságról?

Megoldás
Az állítás pontosan akkor hamis, ha van a síknak olyan P pontja, amelyre $PA < 2$ és $PB \leq 3$. Ha $AB \geq 5$, akkor ilyen P pont a PAB háromszögre vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség alapján nincs. **Tehát $BA < 5$.** Ilyen esetben az A körüli 2 egység sugarú körvonalon belüli és a B körüli 3 egység sugarú körvonalon lévő vagy azon belüli P pontokra $PA < 2$ és $PB \leq 3$.

Az alábbi ábrán pld $BA = 6$, így a megadott állítás igaz: minden olyan P pontra, amelyre teljesül a $PA < 2$ egyenlőtlenség, teljesül a $PB > 3$ egyenlőtlenség is.



A következő ábrán $BA = 4{,}3$. Itt van olyan P pont, amelyre teljesül a $PA < 2$ egyenlőtlenség, de $PB \leq 3$.



Grósz Dániel és Kalló Bernát

37. A 32-fős 12.c osztály osztályfőnökének az osztály nyelvtanulásával kapcsolatos statisztikát kell készítenie. A statisztikai kérdőív a következő kérdésekből állt:

1. Hányan járnak az osztályba?
2. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája angol nyelvből?
3. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája francia nyelvből?
4. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája német nyelvből?
5. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv mindegyikéből?
6. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv közül pontosan kettőből?
7. Hány tanulónak van középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv közül pontosan egyből?
8. Hány tanulónak nincs középfokú nyelvvizsgája a fenti három nyelv egyikéből sem?

Az utolsó két kérdés az osztályfőnök szerint felesleges.
a) Határozzuk meg a rájuk adandó választ, ha az első hat kérdésre adott válasz rendre 32, 20, 15, 6, 2, 9!
b) Jelölje az i-edik kérdésre adott választ x_i. Fejezzük ki x_7 és x_8 értékét x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, és x_6 segítségével!

I. megoldás
Jelölje azon emberek számát, akiknek

- csak angolból van középfokú nyelvvizsgája: x_A;
- csak franciából van középfokú nyelvvizsgája: x_F;
- csak németből van középfokú nyelvvizsgája: x_N;
- angolból is és franciából is, de németből nincs középfokú nyelvvizsgája: x_{AF};
- angolból is és németből is, de franciából nincs középfokú nyelvvizsgája: x_{AN};
- franciából is és németből is, de angolból nincs középfokú nyelvvizsgája: x_{FN};
- angolból, franciából és németből is van középfokú nyelvvizsgája: x_{AFN};= x_5;
- nincs középfokú nyelvvizsgája: x.

Írjuk fel azon adatokat, amelyek a szövegből leolvashatóak!

x_1: $x + x_A + x_F + x_N + x_{AF} + x_{AN} + x_{FN} + x_{AFN} = 32$;
x_2: $x_A + x_{AF} + x_{AN} + x_{AFN} = 20$;
x_3: $x_F + x_{AF} + x_{FN} + x_{AFN} = 15$;
x_4: $x_N + x_{AN} + x_{FN} + x_{AFN} = 6$;
x_5: $x_{AFN} = 2$;
x_6: $x_{AN} + x_{FN} + x_{AF} = 9$;
x_7: $x_A + x_F + x_N = ?$;
x_8: $x = ?$.

Ebből a sok összefüggésből sok további egyenlet írható fel, ám ezek közül csak azokat írom le, amelyek számunkra fontosak.

(1) $x_7 + x_8 = x_A + x_F + x_N + x =$
$= x + x_A + x_F + x_N + x_{AF} + x_{AN} + x_{FN} + x_{AFN} - (x_{AF} + x_{AN} + x_{FN}) - x_{AFN} = x_1 - x_6 - x_5 =$
$= 32 - 1 = 21$;

(2) $x_A + x_{AF} + x_{AN} = x_A + x_{AF} + x_{AN} + x_{AFN} - x_{AFN} = x_2 - x_5 = 20 - 2 = 18$;

(2') $x_F + x_{AF} + x_{FN} = x_F + x_{AF} + x_{FN} + x_{AFN} - x_{AFN} = x_3 - x_5 = 15 - 2 = 13$;

(3) $x_A = (x_A + x_{AF} + x_{AN}) - (x_{AN} + x_{FN} + x_{AF}) + x_{FN} = x_{FN} + x_2 - x_5 - x_6 = x_{FN} + 9$;

(3') $x_F = (x_F + x_{AF} + x_{FN}) - (x_{AN} + x_{FN} + x_{AF}) + x_{AN} = x_{AN} + x_3 - x_5 - x_6 = x_{AN} + 4$;

Írjuk fel az (1)-est, majd írjuk át a (3)-asnak, (3')-nek megfelelően!

$x_A + x_F + x_N + x = 21;$
$x_{FN} + 9 + x_{AN} + 4 + x_N + x = 21;$
$x_{FN} + 9 + x_{AN} + 4 + x_N + x + x_{AFN} = 23;$
$x_{FN} + x_{AN} + x_N + x_{AFN} + x + 13 = 23;$
$x_4 + x = 10;$
$x = 4.$

Innen $x_8 = x = 4$ és $x_7 = x_7 + x_8 - x_8 = 21 - 4 = 17$. Tehát a 12.c osztályban 4 olyan gyerek van, akinek nincs középfokú nyelvvizsgája sem angolból, sem németből, sem franciából. És összesen 17 olyan gyerek van, akinek pontosan egy középfokú nyelvvizsgája van a fenti három nyelvből.

b) Az utolsó egyenletek az általános esetben így írhatók:

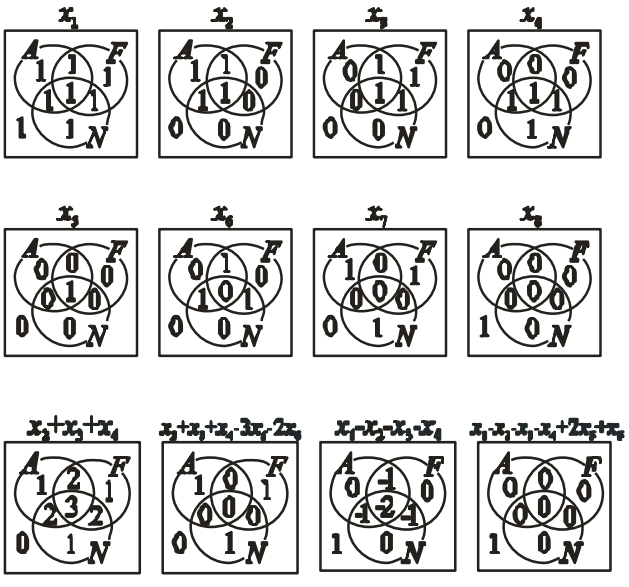
$x_A + x_F + x_N + x = x_1 - x_6 - x_5;$
$x_{FN} + (x_2 - x_5 - x_6) + x_{AN} + (x_3 - x_5 - x_6) + x_N + x = x_1 - x_6 - x_5;$
$x_{FN} + x_{AN} + x_N + x_{AFN} + x + (x_2 - x_5 - x_6) + (x_3 - x_5 - x_6) = (x_1 - x_6 - x_5) + x_5;$
$x_4 + x_8 = (x_1 - x_6 - x_5) + x_5 - (x_2 - x_5 - x_6) - (x_3 - x_5 - x_6);$
$x_8 = (x_1 - x_6 - x_5) + x_5 - (x_2 - x_5 - x_6) - (x_3 - x_5 - x_6) - x_4;$

$x_8 = x_1 + x_6 + 2x_5 - x_2 - x_3 - x_4;$
$x_7 = x_7 + x_8 - x_8 = x_1 - x_6 - x_5 - (x_1 + x_6 + 2x_5 - x_2 - x_3 - x_4) = x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 - 2x_6.$

Blázsik Zoltán megoldása alapján

II. megoldás

Ábrázoljuk Venn-diagramon az osztály tanulóit, feltüntetve az angolból, franciából, németből középfokú nyelvvizsgát letevők részhalmazait! A mellékelt ábrán az olvasható, hogy az egyes kérdésekre adandó válaszban az ábra egyes részeibe tartozó diákokat hányszor kell megszámolni.



Az x_i változók kifejezéseihez új ábrák tartoznak. Ezek segítenek a megfelelő kifejezések megtalálásában. Hasznos észrevenni, hogy csak az x_2, x_3, x_4 kifejezések aszimmetrikusak a nyelvek tekintetében, így ezeket érdemes összevonni, hogy megmaradjon a szimmetria. A megoldások leolvashatók a mellékelt ábrasorozatokról.

Selmeczy Péter megoldása alapján

Előzmény: 31.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 41., 48.

38. Egy szultánnak 143 felesége volt. 1000 napon keresztül szeretett volna adót szedni. Az első napon 144 aranyat, a többi napon pedig mindig egy arannyal többet szedett, mint az azt megelőző napon. Az így beszedett adót egyenlően akarta szétosztani feleségei között. Sajnos 1000 napnál hamarabb meghalt. A kincstárnok mégis úgy találta, hogy a beszedett pénz egyenlően eloszthatóa feleségek között. Hányadik napon halhatott meg a szultán?

Megoldás
Mivel a szultánnak 143 felesége volt, elég csak a beszedett pénz 143-as maradékával dolgozni. Így az első napon 1, a második napon 2, a harmadik napon 3, ... az n-edik napon n aranyat szedett be. Az n napig beszedett adó tehát $n\cdot(n + 1)/2$, ennek oszthatónak kell lenni 143-mal. 143 prímtényezős alakja 11·13, így az összeg pontosan akkor osztható 143-mal, ha
I. vagy n; II. vagy n +1 osztható 143-mal;
III. vagy n osztható 11-gyel, n + 1 pedig 13-mal;
IV. vagy n osztható 13-mal, n + 1 pedig 11-gyel.
Az egyes eseteknek megfelelő számok:

esetek	(n, n + 1)
I. 143|n	(**143**, 144), (**286**, 287), (**429**, 430), (**572**, 573), (**715**, 716), (**858**, 859)
II. 143|n + 1	(**142**, 143), (**285**, 286), (**428**, 429), (**571**, 572), (**714**, 715), (**857**, 858)
III. 11|n, 13|n+1	(**77**, 78), (**220**, 221), (**363**, 364), (**506**, 507), (**649**, 650), (**792**, 793), (**935**, 936)
IV. 13|n, 11|n+1	(**65**, 66), (**208**, 209), (**351**, 352), (**494**, 495), (**637**, 638), (**780**, 781), (**923**, 924)

Mindegyik esetben csak a legkisebb számpár megtalálása okoz nehézséget. Ha a számpár tagjait 143-mal növeljük, akkor a 143-mal, 11-gyel, 13-mal való oszthatósági tulajdonságok nem változnak, így újabb jó megoldást kapunk (, ha nem mentünk túl az 1000-en). Ha 143-nál kisebb számmal növelünk, akkor a 143-mal való oszthatóság biztosan változik, és a 11-gyel és 13-mal való oszthatóság közül legalább az egyik, így biztosan nem kapunk ugyanannak az esetnek megfelelő másik megoldást.

Tehát a szultán a 65., a 77., a 142., a 143., a 208., a 220., a 285., a 286., a 351., a 363., a 428., a 429., a 494., az 506., az 571., az 572., a 637., a 649., a 714., a 715., a 780., a 792., a 857., a 858., a 923. vagy a 935. napon halt meg.

Bartha Zsolt és Selmeczy Péter

Előzmény: 8.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 45.

39. Hét gazfickó a sötét erdő mélyén megbúvó kunyhóban sajátos módon osztozkodott a rabolt aranyakon. Körbe ültek és egyikőjük megszámolta a zsákmányolt aranytallérokat. Nosza, el is vett magának annyit, amennyi a tallérok száma számjegyeinek összege. Erre biza' jobboldali szomszédja is nekiállt megolvasni a maradék aranyakat és ő is épp annyit tett el magának, mint az aranytallérok száma számjegyeinek összege. Így ment ez sorban, két körön át, mígnem elfogyott az utolsó aranytallér is. Csudálkoztak is fenemód, hogy nem ám csak mindőjük éppen kétszer vett, de egyformán is jutott mindegyik gonosznak, csupáncsak hírhedett vezérük Sobri Jóska lett náluknál gazdagabb.

Hétpróbás kisdiák, ebadta kölyke, meg tudod-é mondani hányadiknak vett az aranyból a leggazabb gazfickó, a legbetyárabb betyár, az ezerszer átkozott, már tízszer megfogott és tízszer megugrott labancnyúzó, kurucverő rablóvezér, Sobri Jóska?

Megoldás: Az első elvétel után az aranyak száma 9-cel osztható, mert a számjegyek összegének 9-es maradéka mindig annyi, mint a szám 9-es maradéka, tehát különbségük 9-cel osztható. Az utolsó elvételkor a rabló az összes aranyat elvette, tehát a maradék egyjegyű és 9-cel osztható, tehát az utolsó rabló a második körben 9 aranyat vett el. Mivel 9-től 90-ig a 9-

cel osztható számok számjegyeinek összege 9, az elvételek visszafelé rendre: 9; 18; 27; 36; 45; 54; 63; 72; 81. Mivel olyan szám nincs, amelyből a számjegyei összegét elvéve 90-et kapunk (99-18=81 és 108-9=99), ezután 99, majd 108; 117 és 126 marad. Így eredetileg 130 vagy 131 vagy ... vagy 139 arany lehetett. Csak úgy juthatott egy kivételével mindenkinek ugyanannyi arany, ha eredetileg 135 arany volt. Tehát az
egyes betyárok által vett összeg:

betyár	első körben		második körben		összesen
	meghagy	elvesz	meghagy	elvesz	
1.	126	9	54	9	18
2.	117	9	45	9	18
3.	108	9	36	9	18
4.	99	9	27	9	18
5.	81	18	18	9	27
6.	72	9	9	9	18
7.	63	9	0	9	18

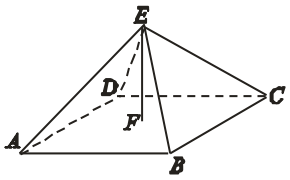
Tehát Sobri Jóska 5.-nek és 12.-nek vett.

Grósz Dániel

Előzmény: 32.

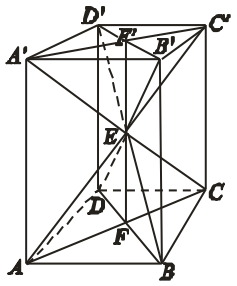
40. Össze lehet-e állítani hat, a 35. feladatban leírt piramisból egy kockát úgy, hogy a négyzetlappal szemközti csúcsuknál összeérjenek?

Kornis Kristóf kérdése



I. megoldás

Első pillanatban úgy tűnik, hogy hat ilyen testből épp egy kocka áll össze. Ez azonban tévedés.



A 35. feladat megoldásának kiegészítésében láttuk, hogy a gúla EF testmagassága egyenlő az alapnégyzet átlójának felével ($EF = FA$). Ezért, ha két ilyen gúlát E csúcsuknál összeragasztva egymással szemben helyezünk el, akkor az oldalt nem négyzetek jönnek létre, hanem olyan téglalapok (pld $ABB'A'$), amelyek egyik párhuzamos oldalpárja az alapnégyzet oldalaival egyenlő, másik két oldala azonban ennél hosszabb, az alapnégyzet átlójával egyenlő hosszú ($BB' = AA' = 2AF = AC$). Tehát hat, a 35. feladatban leírt piramis nem alkot kockát.

II. megoldás

A kocka térfogata AB^3. A gúla térfogata az alapterület és a testmagasság szorzatának harmada, tehát $AB^2 \cdot FE/3$, hat ilyen gúla térfogatának összege $2FE \cdot AB^2$. Ha a hat gúla kiadná a kockát, akkor $2FE = AB = AE$, tehát az AFE háromszög félszabályos lenne: $AEF\angle = 60°$. Így $AEC\angle = 120°$, ami ellentmond annak, hogy az AEB, BEC szögek összege is épp ennyi (60°+60°), hiszen a térbe kilépve nagyobb szöget kellene kapnunk. Tehát a hat gúla nem adhatja ki a kockát.

Előzmény: 35.
Kapcsolódó feladatok, folytatás: 55.