Msc matematika tanárszak, Elemi matematika 5. kitűzött feladatok 2010

Algebra és számelmélet

1. Egy asztalon van 10 nagy papírlap. Egyet 5 darabra vágunk, majd egy másikat vágunk 9 darabra, és így tovább. Olyan lapot is darabolhatunk, amely már egy nagyobbnak része volt, és az 5 illetve 9 részre osztások tetszőleges sorrendben követhetik egymást, tehát pl. 5 részre osztás után jöhet újra 5 részre osztás is. Lehet-e egy ilyen eljárás végén 2000 papírlapunk?
2. Gondoltam egy számot, hozzáadtam jegyei összegét és 2000-t kaptam - mondja Alex.
   Gondoltam egy számot, kivontam belőle jegyei összegét és 2000-t kaptam - mondja Berci. Szerinted jól számoltak? És 2001-et kaphattak?
3. Adjuk össze a természetes számokat 1-től 77-ig! Mekkora lesz az összeg? Meg lehet-e változtatni az összeadásban néhány tag előjelét úgy, hogy az összeg 2000 legyen?
4. A 2, 2+4, 2+4+6, 2+4+6+8, ... , 2+4+6+ .... +2000 számok között hány négyzetszám van?
5. Kiválasztottunk 21 szomszédos természetes számot és összeadtuk őket, de egyet kifelejtettünk az összeadásból, így az összeg 2000 lett. Melyik számot felejtettük ki?
6. Írjuk fel a páratlan pozitív egész számokat a következő háromszög alakú táblázatba úgy, hogy minden sorban eggyel több szám szerepeljen mint az előzőben!

   1,
   3, 5,
   7, 9, 11,
   13, 15, 17, 19,
   21, 23, 25, 27, 29,
   ......

   Folytatva a táblázatot, mennyi lesz a számok összege abban a sorban, amelyben a 2001-es szám szerepel?
7. Egy téglalap oldalainak mértékszámai páros természetes számok. A kerület és terület mértékszámainak összege 2000. Mekkora a téglalap átlója?
8. Oldjuk meg a következő egyenletet a természetes számok halmazán!
   $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 2000$
9. Össze lehet-e állítani 1x1-es és 2x2-es négyzetekből egy nagyobb négyzetet úgy, hogy a felhasznált kétféle négyzet együttes száma
   a) pontosan 2000;
   b) pontosan 2001 ?
10. A 2000-nél nem nagyobb pozitív egész számok között hány olyan van, amely sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható?
11. 2000 súly úgy van sorba állítva, hogy bármely két szomszédos különbsége 1 g. Mutassuk meg, hogy a 2000 súly elosztható egy mérleg két serpenyőjébe úgy, hogy azok egyensúlyban legyenek!
12. Egy dobozban 2000 golyó van. Tömegük rendre 1 g, 2 g, 3 g , ... , 1999g, 2000 g.
    a.) Valaki kivett a dobozból 500 golyót. Biztosan ki tudunk-e még 500-at venni úgy, hogy a kivett 1000 golyó tömegének összege megegyezzen a dobozban maradt 1000 golyó tömegének összegével?
    b.) És ha 501-et vett ki valaki, akkor biztosan ki tudunk-e még 499-et venni úgy, hogy a kivett 1000 golyó tömegének összege megegyezzen a dobozban maradt 1000 golyó tömegének összegével?
13. Az asztalon van 2000 halom, amelyekben rendre 1, 2, 3, ..., 2000 kavics van. Egy lépésben kiválaszthatunk tetszőleges számú halmot, és azokból szabad elvenni azonos számú kavicsot. Legalább hány lépés kell ahhoz, hogy el tudjuk venni az összes kavicsot?
14. Egy halomban van 2000 kavics. A halmot két részre osztom, és a két részben levő kavicsok számát összeszorzom. Ezután az egyik halmot megint két részre bontom, és a két részben levő kavicsok számát összeszorzom. Folytatom ezt addig, amíg minden halomban egy kavics lesz. Mutassuk meg, bárhogy végzem a részekre osztást, a kapott szorzatok összege mindig ugyanannyi lesz. Mekkora lesz ez az összeg?

15. a) Van-e olyan köbszám, amelynek első négy jegye 2000 ?
b) Van-e olyan köbszám, amelynek utolsó négy jegye 2000 ?
c) Van-e olyan négyzetszám, amelynek első négy jegye 2000 ?
d) Van-e olyan négyzetszám, amelynek utolsó négy jegye 2000 ?

16. Az $\frac{1}{2002}, \frac{2}{2001}, \frac{3}{2000}, ..., \frac{2001}{2}, \frac{2002}{1}$ számok közül kiválasztható-e három úgy, hogy szorzatuk 1 legyen?

17. Mutassuk meg, hogy ha $\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}$, akkor p osztható 2003-mal!

18. Képezzük az 1, 2, 3, 4, . . . ,1999, 2000 számokból az összes két különböző tényezőből álló szorzatot. (Összesen $\frac{2000 \cdot 1999}{2} = 1999000$ szorzat.) Mutassuk meg, hogy ezen szorzatok reciprokainak összege nem lehet egész!

19. Adottak a 2, 3, 4, . . . , 2000, 2001 számok és a belőlük képzett összes különböző tényezőkből álló két, három, . . . , kétezer tényezős szorzat. (Összesen 2^{2000} -1 szám.) Mutassuk meg, hogy ezen számok reciprokainak összege egész!

20. Bontsuk fel az n=19994 + 41999 számot két, ezernél nagyobb szám szorzatára!

21. Egy konvex négyszöget átlói négy háromszögre bontanak. Mind a négy háromszög területének mértéke egész szám. Igazoljuk, hogy ennek a négy egész számnak a szorzata nem végződhet 2000-re!

22. Van-e olyan háromszöglapokkal határolt konvex test, amelynek
a) 2000,
b) 200l éle van?

23. Adott a síkban 2000 általános helyzetű pont, fele pirosra, fele kékre van színezve. Mutassuk meg, hogy felvehető 1000 szakasz úgy, hogy mindegyiknek egyik vége egy piros, a másik vége egy kék pont a fentiek közül, és semelyik két szakasz nem metszi egymást!

24. Megadható-e a síkon 2000 pont úgy, hogy semelyik három nincs egy egyenesen, és bármely kettő távolsága racionális szám?

25. Határozzuk meg 11088-nak azt a legkisebb, illetve azt a legnagyobb többszörösét, amelyikben mind a tíz számjegy pontosan egyszer fordul elő!

26. Keressük meg azt a legkisebb egész kitevőjű kettőhatványt, amelyik két, három, illetve négy megegyező számjegyre végződik!

27. Egy pozitív egész szám osztóinak összegét osztjuk az osztók reciprokainak összegével, mennyit kapunk?
a) Legyen a pozitív egész szám 6,majd 12.
b) Legyenek az n pozitív szám osztói $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Oldjuk meg a feladatot!

28. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész számot, amelynek 4 pozitív egész osztója van, és ezen osztóinak összege 108.

Egyenletek, egyenlőtlenségek

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 &= -y(x+z) \\ x^2 + x + y &= -2yz \\ 3x^2 + 8y^2 + 8xy + 8yz &= 2x + 4z + 2 \end{aligned}\right\}$$

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $x \geq 0$ esetén
$$\frac{2x}{x+2} \leq \ln(x+1) \leq \frac{x(x+2)}{2(x+1)}\ !$$

3. Megoldható-e a valós számok körében a következő egyenlőtlenségrendszer:
$$x_1x_2 + y_1y_2 < 0,\quad x_1x_3 + y_1y_3 < 0,\quad x_1x_4 + y_1y_4 < 0,$$
$$x_2x_3 + y_2y_3 < 0,\quad x_2x_4 + y_2y_4 < 0,\quad x_3x_4 + y_3y_4 < 0\,?$$

4. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:
$$x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$$

5. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenlőtlenséget:
$$\frac{x}{x+1} + \frac{2x}{(x+1)(2x+1)} + \frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)} + \ldots + \frac{2001x}{(x+1)(2x+1)\ldots(2001x+1)} > 1\ !$$

6. Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:
$$x\sqrt{1+x} + \sqrt{3-x} = 2\sqrt{x^2+1}$$

7. Határozd meg a következő összeg értékét:
$$\left\{\frac{2003+25}{777}\right\} + \left\{\frac{2003\cdot 2+25}{777}\right\} + \ldots + \left\{\frac{2003\cdot 777+25}{777}\right\}$$

8. Oldd meg az alábbi egyenletrendszert:
$$\begin{cases} x + [y] = \dfrac{11}{2} \\ y - [x] = \dfrac{10}{3} \end{cases}$$

9. Igazold, hogy ha a; $b \in \mathbf{R}$ és $a+b=1$, akkor bármely valós x-re:
$$\left|[x+a] + [x+b] - [2x]\right| \leq 1$$

10. Melyek azok a p pozitív prímszámok, melyekre a $2p+1$, $3p+2$, $4p+3$, $6p+1$ számok mindegyike prím?

11. Melyek azok a pozitív p prímszámok, melyekre $4p+1$ négyzetszám?

12. Melyek azok a pozitív p prímszámok, melyekre $2p+1$ köbszám?

13. Igazoljuk, hogyha n egész szám, akkor $\frac{7n-1}{4}$ és $\frac{5n+3}{12}$ nem lehet egyszerre egész számok!

14. Hány olyan 2003-nál kisebb n természetes szám van, amelyre a $\frac{4n+3}{13n+2}$ tört egyszerűsíthető?

15. Bizonyítsuk be, hogy $2001x^2 + 2002x + 2003$ semmilyen x egész szám esetén nem lesz négyzetszám!

16. "Ismeretes", hogy 35!=10333147966381449 29ab66513375232 00000000. Milyen számjegyek állnak a és b helyén?

17. Oldd meg az alábbi egyenleteket
$$\frac{x-1998}{2003} + \frac{x-1999}{2004} + \frac{x-2000}{2005} = \frac{x-2001}{2006} + \frac{x-2002}{2007} + \frac{x-2003}{2008}$$
$$\frac{x-13}{1990} + \frac{x-11}{1992} + \frac{x-9}{1994} = \frac{x-2000}{3} + \frac{x-1998}{5} + \frac{x-1996}{7}$$

18. Az x, y, z 0-tól különböző számokra: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Mutassuk meg, hogy: $\frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} + \frac{x+y}{z} + 3 = 0$

19. Határozzuk meg az: $\frac{a+b}{c+d}+\frac{a+c}{b+d}+\frac{a+d}{b+c}+\frac{b+c}{a+d}+\frac{b+d}{a+c}+\frac{c+d}{a+b}$ kifejezés értékét, ha a, b, c, d olyan - páronként különböző - valós számok, amelyekre teljesül, hogy $\frac{a}{b+c+d}=\frac{b}{a+c+d}=\frac{c}{a+b+d}=\frac{d}{a+b+c}$!

20. Bizonyítsuk be, hogy
$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3996001}\right)=\left(\frac{1000}{999}\right)$$

21. Az x > 0 valós számra $x^2+\frac{1}{x^2}=7$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $x^5+\frac{1}{x^5}$ is egész szám!

22. Határozzuk meg az alábbi kétváltozós függvények minimumát:
$$F(x;y)=x^2+y^2+8x-10y+66$$
$$F(x;y)=2x^4+12x^2-3y^2-6y+2003$$

23. Legyen n>2, n∈N. Határozzuk meg a K szám utolsó jegyét, ha $K=n^5-5n^3+4n+7$!

24. Vannak-e olyan m és n pozitív egész számok, amelyekre $m^2=n^4+2n^3+2n^2+2n+1$?

25. Vannak-e olyan m és n pozitív egész számok, amelyekre $m^3=n^3+4n^2+3n+2$?

26. Legyen $P(x)=x^2+x$ polinom, és a, b pozitív egész szám. Bizonyítsuk be, hogy 4P(a)=P(b) nem állhat fenn.
Keressük meg az x(x+y) szorzat legkisebb és legnagyobb értékét, ha x és y olyan számokat jelöl, amelyekre teljesül az $y^2=(1-x)(1+x)$ egyenlőség!

27. Határozzuk meg az $\frac{a+b+ab}{a^2+b^2+1}$ tört legnagyobb értékét, ha a és b valós számokat jelölnek!

28. Hány olyan hatodfokú racionális együtthatós polinom van, amelynek a $\sqrt[3]{2}$ kétszeres gyöke?

29. Bizonyítsuk be, hogy az a, b, c és d pozitív valós számokra
$$\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\le\sqrt{(a+d)(b+c)}$$

30. Mutassuk meg, hogy minden olyan $x_1; x_2; \ldots; x_n;$ számokra melyek a $\left]0;\frac{1}{2}\right]$ intervallumból valók teljesül a következő egyenlőtlenség:
$$\frac{\prod_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^n}\le\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)}{\left[\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\right]^n}$$

31. Bizonyítsuk be az alábbi egyenlőtlenségeket:
$$\frac{5}{4}a^2+3ab+2b^2\ge 0$$
$$a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$$
$$\sum_{i=1}^{5} x_i\ge x_1\sum_{i=2}^{5} x_i$$

32. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok egész n-re (n természetes szám) teljesül, hogy az első n egész szám összege négyzetszám!

33. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan egymás utáni három egész szám van, amelyek felbonthatók 2 egész szám négyzetösszegére!

34. Keressük meg az összes olyan háromszöget, melynek oldalai egymás utáni egész számok és a területe is egész szám.

35. Keressük meg az összes olyan k és m egész számokat (k<m), melyre
$1+2+\cdots+k=(k+1)+(k+2)+\cdots+m$

36. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok egész megoldása van a $x^2+y^3=z^4$ egyenletnek.

37. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán az $x^3+4x=y^4$ egyenletet!

38. Létezik-e olyan egész együtthatós egyenlet, aminek gyöke a következő szám:
$\left[\frac{\cos 7{,}5^\circ}{2}-\frac{\sqrt{3}\sin 7{,}5^\circ}{2}\right]^{-1}$?

39. Keressünk olyan k, l, m valós számokat, amelyekre $19^k-5^l=2^m$.

40. Oldjuk meg az egész számok halmazán az $y^k=x^2+x$ egyenletet, ahol k 1-nél nagyobb egész szám!

41. Oldjuk meg a valós számok halmazán az $(x^2+y^2)^3=(x^3-y^3)^2$ egyenletet!

42. Milyen x,y,z valós számok elégítik ki a köv.egy.rendszereket?

a) $x+y+z=6$
$x^2+y^2+z^2=14$
$x^3+y^3+z^3=36$

b) $x^3+y^3+z^3=8$
$x^2+y^2+z^2=22$
$1/x+1/y+1/z+z/xy=0$

Függvények

1. Oldjuk meg a következő függvény-egyenleteket!

a) $2f(x)+3f(x-1)=4x-1$

b) $f(x)-f(-x)=x^2$

c) $(x+1)f(1-x)+(x-1)f(x+1)=2x(x^2-1)$

d) $f(1-x)+2f(1+x)=x+3$

e) $f(x^2+x+1)+2f(x^2-x+1)=3x^2-x+6$

f) $f(x-1)-f(1-x)=x$

g) $2f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2, \quad x\neq 0$

h) $xf\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=x-1, \quad x\neq 0$

i) $f(x)+\left(x+\frac{1}{2}\right)f(1-x)=1$

j) $2f(x)+f(1-x)=x^2$

k) $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1, \quad x\neq 0, x\neq 1$

l) $f\left(\frac{1}{x}\right)+f(1-x)=x, \quad x\neq 0, x\neq 1$

m) $x^2f(x)+f(1-x)=2x-x^4$

n) $(1-x)f(x)+2xf(1-x)=-3x^2+4x+1$

o) $f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f(x)=\frac{1}{x}-x+1, \quad x\neq 0, x\neq 1$

p) $f(x+y)-f(x-y)=4xy$

q) $f(xy)+x+y=xy+f(x)+f(y)$

r) $f(x)f(y)=f(x+y-xy), \quad f(1)\neq 0$

s) $f(x)f(y)=f(x-y)$

t) $f(x+1)\leq x\leq f(x)+1$

u) $f(x)-x\leq x^2\leq f(x-1)+x$

v) $f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$,

2. Határozzuk meg az alábbi sorozatok explicit alakját!

a) $\begin{cases} a_1=2,\ a_2=8 \\ a_n=4a_{n-1}-3a_{n-2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_1=1,\ a_2=5 \\ a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2} \end{cases}$

c) $\begin{cases} a_1=1,\ a_2=9 \\ a_n=9a_{n-1}-20a_{n-2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} a_1=3,\ a_2=15 \\ a_n=5a_{n-1}-4a_{n-2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} a_1=29, \quad a_2=85 \\ a_n=5a_{n-1}-6a_{n-2} \end{cases}$

f) $\begin{cases} a_1=1,\ a_2=3, \quad a_3=7 \\ a_n=6a_{n-1}-11a_{n-2}+6a_{n-3} \end{cases}$

3. Adott az $\{x_n\}$ sorozat a következő rekurzív képlettel:

$x_1=0; \quad x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}; \quad n=1;2;\ldots$

Mutassuk meg, hogy a sorozat minden tagja egész szám!

4. Az $\{a_n\}$ és $\{b_n\}$ sorozatokat a következőképpen definiáljuk: $a_1>0$; $b_1>0$ és $n=1;2;\ldots$ esetén

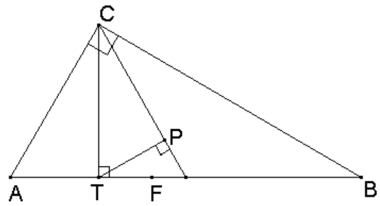
$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{b_n}; \quad b_{n+1}=b_n+\frac{1}{a_n}$. Mutassuk meg, hogy $a_{50}+b_{50}>20$!

Geometria

1. Az ABC háromszögben ABC $\angle=60°$. Az AD és CE szögfelezők O-ban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy OE=OD!
2. Az ABC háromszög γ szöge 60°. A beírható kör középpontja K, magasságpontja M, a köré írható kör középpontja O. Igazoljuk, hogy
   a) OK=KM,
   b) A, O, K, M, B egy körön van!

3. O középpontú körbe olyan húrnégyszöget írunk, amelynek átlói merőlegesek egymásra. Igazoljuk,hogy az O pont távolsága valamelyik oldaltól,egyenlő a szemközti oldal felével!
4. a) Egy körben adott az ABCD húrnégyszög úgy, hogy AC merőleges BD. Mutassuk meg, hogy az A,B,C,D pontokban húzott érintők húrnégyszöget határoznak meg!
b) Az ABCD húrnégyszög AB, BC, CD, DA oldalai feletti ívek felezőpontjai rendre P,Q,R,S. Mutassuk meg, hogy PR merőleges QS!
c) Mutassuk meg, hogy egy húrnégyszög szemközti oldalegyeneseinek szögfelezői merőlegesek egymásra. Igaz-e az állítás megfordítása?
5. Egy hegyesszög egyik szárán adott két pont A és B. A másik száron szerkesszük meg az M pontot úgy, hogy AM=BM teljesüljön, az N pontot pedig úgy, hogy AN+BN a lehető legkisebb legyen! Igazoljuk, hogy A, B, M, N egy körön vannak!
6. A k1 kör O középpontján átmenő k2 kör A-ban és B-ben metszi k1-et. Az A-ra illeszkedő e egyenes C-ben metszi k2 rövidebb OB ívét és D-ben a k2 kört.
a) Igazoljuk, hogy BC=CD!
b) Igazoljuk, hogy OC merőleges BD!
c) Egy O-ból induló f félegyenes E-ben metszi k1 -et, F-ben k2 -t. Igazoljuk, hogy E az ABF háromszögbe írható kör középpontja!
d) Az ABC háromszögbe írt kör középpontja O. Az AO egyenes D-ben metszi a háromszög köré írt kört. Mutassuk meg, hogy OD=DB!
e) Az ABC háromszög C csúcsnál levő külső szög felezője D-ben metszi a háromszög köré írt kört. Igazoljuk, hogy AD=BD!
7. Egy kör illeszkedik az ABC háromszög A és B csúcsára, az AC és BC oldalakat pedig P és Q pontokban metszi. R és S az AB oldal pontjai úgy, hogy QR párhuzamos AC és PS párhuzamos BC. Mutassuk meg, hogy P,Q,R,S egy körön vannak!
8. Az ABCD téglalapban B-ből az AC átlóra állított merőleges talppontja K. M és N az AK és CD szakasz felezőpontja. Mutassuk meg, hogy BMN $\angle = 90°$!
9. a) Egy körben adott az ABCD húrnégyszög úgy, hogy AC merőleges BD. Mutassuk meg, hogy az átlók metszéspontjából az oldalakra állított merőlegesek talppontjai húr- és érintőnégyszöget határoznak meg!
b) Mutassuk meg, hogy ha egy húrnégyszög átlói merőlegesek, akkor az oldalfelező pontok és az átlók metszéspontjából az oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai egy körön vannak!
10. Két kör E-ben kívülről érinti egymást. Az egyikhez egy A pontjában húzott érintő B-ben és C-ben metszi a másik kört. Igazoljuk, hogy PA a PBC háromszög külső szögfelezője.
11. Az AB átmérőjű O középpontú félkör AB átmérőjén adott egy A-tól, B-től és O-tól különböző C pont. C-ből induló két félegyenes ugyanakkora szöget zár be az AB egyenessel, és D-ben, ill. E-ben metszi a félkört. A CD szakaszra merőleges egyenes K-ban metszi a félkört. Mutassuk meg, hogy ha K nem E, akkor KE párhuzamos AB!
12. Az ABCD húrtrapéz alapjai AD és BC, átlóinak metszéspontja M, a köré írt kör középpontja O. Mutassuk meg, hogy az ABM és CDM háromszögek köré írt körök O-ban metszik egymást!
13. a) Az ABC nem egyenlő szárú háromszögben az A szög felezőjének és a BC oldal felező merőlegesének metszéspontja A_1. Hasonlóan megszerkesztjük a B_1 és C_1 pontokat is, majd letöröljük az ábrát és csak az A_1, B_1 és C_1 pontok maradnak. Szerkesszük újra az ABC háromszöget!
b) Az ABC hegyesszögű háromszögben az ma magasság A_1 -ben metszi a háromszög köré írt kört. Hasonlóan megszerkesztjük a B_1 és C_1 pontokat is, majd letöröljük az ábrát, csak az A_1, B_1 és C_1 pontok maradnak. Szerkesszük újra az ABC háromszöget!
14. Az ABCD rombuszban B-nél 40°-os szög van. E a BC oldal felezőpontja, A-ból a DE egyenesre állított merőleges talppontja F. Mekkora a DFC szög?
15. Az ABC háromszög BC, CA, AB oldalait a beírt kör az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. Legyen K a körnek C_1-gyel szemközti pontja, és D a B_1C_1 és A_1K egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $CD=CB_1$.

16. Az ABC háromszög AC oldalán van olyan D és E pont, hogy AB=AD és BE=EC. (Az E pont A és D között van.) F az ABC háromszög köré írt kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontja. Mutassuk meg, hogy B, E, D, F egy körön van!



17. Az ABCD paralelogramma átlóinak metszéspontja O. Mutassuk meg, hogy ha a BC egyenes érinti az ABO háromszög köré írt kört, akkor a DC egyenes érinti a BCO háromszög köré írt kört!

18. Az ABC háromszögben AC=BC, az oldalakat a beírt kör A',B', C' pontokban érinti. AA' a beírt kört D-ben, a B'D egyenes az AB oldalt E-ben metszi. Mutassuk meg, hogy AE=EC'!

19. ABCD az O sugarú körbe írt húrnégyszög, amelynek átlói merőlegesek egymásra. Mutassuk meg, hogy az AOC törött vonal felezi a négyszög területét!

20. Adott két kör k1 és k2, amelyek két pontban (A és B pontban) metszik egymást. A k2 kör átmegy a k1 kör középpontján. A B pontban a k2 körhöz húzott érintő a k1 kört a (B-től különböző) C pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy AB=BC!

21. Az ABC háromszög köré írt kör csúcsot nem tartalmazó AB, BC, CA ívének felezőpontja L,M,N. Az LN és MN szakaszok D és E pontokban metszik az AB és BC oldalt. Mutassuk meg, hogy a háromszögbe írt kör O középpontja illeszkedik a DE szakaszra!

22. Az ABC háromszög köré írt kört a BAC szög felezője K-ban metszi. K vetülete az AC egyenesen K_1. Mutassuk meg, hogy AK_1 az AB és AC oldalak számtani közepe!

23. Az ABC szabályos háromszög AC oldalával párhuzamos egyenes az AB és CB oldalt P-ben és Q-ban metszi. Az AQ szakasz felezőpontja E, a PQB háromszög középpontja D. Hány fokos a DEC háromszög legkisebb szöge?

24. H legyen a sík legalább négyelemű véges ponthalmaza, amelyben nincs az összes pont egy egyenesen. Mutassuk meg, hogy H-nak van 3 olyan pontja, hogy a rájuk illeszkedő kör nem tartalmaz H-nak más pontját a belsejében.

25. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 37,5°. Bizonyítsa be, hogy AB szakasz = 8·TP szakasz.

26. Derékszögű háromszög egyik hegyesszöge 15°, az átfogóhoz tartozó magassága m. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $T\triangle=2m^2$.

27. Az ABCD négyzet mindegyik oldalára befelé egyenlőszárú háromszöget rajzolunk. Ezeknek a háromszögeknek a harmadik (X,Y,Z,U) csúcsnál levő szöge 150°. Bizonyítsa be, hogy a négy háromszög területének összege egyenlő az X,Y,Z,U négyszög területével.

28. Az ABC háromszögben a C-csúcsnál derékszög van. Az XYZC téglalap X,Y,Z csúcsai rendre a háromszög AC, AB, BC oldalán helyezkednek el. Bizonyítsa be, hogy a téglalap területe nem lehet nagyobb az ABC háromszög területének felénél.

29. Írjunk egy derékszögű háromszög átfogójára (kifelé) egy négyzetet. Kössük össze a derékszög csúcsát a négyzet középpontjával. Bizonyítsuk be, hogy ez az összekötő szakasz felezi a derékszöget!

30. Egy téglalap átlójának felezőmerőlegese a hosszabbik oldalt 1:2 arányban osztja. Mekkora a két átló által bezárt szög?

31. Az ABCD téglalapban a B csúcsnál az AC átlóra állított merőleges talppontja K. M az AK szakasz, N pedig a CD szakasz felezőpontja. Igazoljuk, hogy BMN szög derékszög!

32. Jelölje P az ABC háromszög a AC oldalának egy belső pontját. Szerkessz olyan P-re illeszkedő egyenest, mely az ABC háromszög területét felezi.

33. Határozzuk meg azokat a derékszögű háromszögeket, amelyek oldalai egész számok és területének mérőszáma háromszorosa a kerülete mérőszámának!

34. Egy derékszögű trapézba érintő kör írható. A trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és c, a rájuk merőleges szár hossza b. Igazoljuk, hogy

$$b = \frac{2ac}{a+c}$$

35. Határozzuk meg a háromszögben a három súlyvonal négyzetösszegének és a három oldal négyzetösszegének az arányát!
36. Az ABC háromszög S súlypontján át tetszőlegesen húzott egyenes a háromszög köré írt kört P és Q pontokban metszi. Fejezzük ki az SP és SQ szorzatát a háromszög oldalainak segítségével!
37. Biz. be, hogy az ABC háromszög S súlypontjának a körülírt körre vonatkozó hatványa a súlyvonalak négyzetösszegének 4/27-szerese!
38. Egy 10 egység oldalú ABCD négyzet minden csúcsát kösse össze a csúcsot nem tartalmazó két oldal felezőpontjával. E nyolc szakasz mindegyikén 4-4 belső metszéspont keletkezett. Ezen metszéspontok közül a 2-2 középső egy nyolcszöget határoznak meg. Mekkora ennek a nyolcszögnek a területe?
39. Lehetséges-e két tömör fakocka közül az egyikben akkora lyukat fúrni, hogy azon a másik átférjen?
40. Létezik-e olyan korlátos síkbeli alakzat (ponthalmaz), amelyiknek van önmagával egybevágó valódi részhalmaza?
41. Hány részre oszthatja és hány részre nem oszthatja a síkot öt, páronként különböző egyenes?
42. Bizonyítsuk be, hogy a tetraéder oldallapjai területének a négyzetösszege kisebb, mint a felszín négyzetének a fele, illetve nem kisebb, mint a felszín négyzetének a negyedrésze!
43. Az ABC szabályos háromszög belsejében vegyünk fel egy P pontot. P-ből bocsássunk merőlegeseket az oldalakra, a merőleges vetületek a D, E és F pontok. Biz.be, hogy AF+CE+BD=s , ahol s a háromszög kerületének felét jelöli.
44. Az ABC háromszögön belül tetszőlegesen felvett O ponton át húzzunk párhuzamosokat a háromszög oldalaival. Ezek az egyenesek a háromszöget hat részre osztják, ezek közül három háromszög. Mutassuk meg, hogy e háromszögekbe írt körök sugarainak összege egyenlő az ABC háromszögbe írt kör sugarával!
45. Az ABC háromszög tetszőleges belső pontján keresztül húzzunk párhuzamosokat az oldalakkal. Ezek az egyenesek a háromszöget hat részre osztják, amelyek közül három háromszög.Fejezzük ki ezen háromszögek területének segítségével az ABC háromszög területét!
46. Az AB szakaszra a C felezőpontjában merőlegest állítunk, ezen D, E, F pontokat úgy jelöljük ki, hogy CD=DE=EF=AC legyen. Számítsuk ki az ADB=α, AEB=β, AFB=χ esetén az $\alpha+\beta+\chi$ szögösszeget!
47. Az ABCD konvex négyszöget egy-egy átlója két háromszögre bontja fel. Igazoljuk, hogy az ABC, ADC és BDC, BDA háromszögek súlypontjai által meghatározott négyszög hasonló az eredetihez!
48. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalai kielégítik a háromszög-egyenlőtlenségeket!
49. Legyen az ABC háromszög területe T, a súlyvonalaiból alkotott háromszög területe t. Határozzuk meg a T : t értékét!
50. Az egységnyi oldalú ABC szabályos háromszög AB oldalának meghosszabbításán vegyük fel a P pontot úgy, hogy a BCP szög 15 fokos legyen. Számítsa ki a BP pontos értékét!
51. Az ABCD négyzet belsejében elhelyezkedő P pontnak az A,B,C csúcsoktól mért távolságai rendre 1, 2, 3 hosszúságegységek. Számítsa ki az APB szög nagyságának pontos értékét!
52. Legyen P az ABC háromszög belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy a PAB, PBC, PCA szögek közül legalább az egyik nem nagyobb 30°-nál. (NMD. 1991/5.)
53. Mutassuk meg, hogy az *ABCO* négyzet *T* területére fennáll a $4-2\sqrt{3}<T<3-\sqrt{6}$ egyenlőtlenség, ahol *O* a koordinátarendszer kezdőpontja, az *A* és a *C* pontok a koordinátatengelyeken, a *B* pont pedig az $y = \cos x$ függvény grafikonján van!

Logika, kombinatorika, valószínűség

1. Egy dobozban 10 piros, 8 fehér, 6 zöld golyó van. Hányat kell véletlenszerűen kivenni, hogy biztosan legyen köztük
   a) két egyszínű,
   b) két különböző színű,
   c) három egyszínű,
   d) n egyszínű,
   e) piros,
   f) piros vagy zöld,
   g) piros és zöld,
   h) valamelyik színből mind.
2. Egy dobozban 10 piros, 20 fehér, 30 zöld és 40 kék golyó van. Hányat kell véletlenszerűen kivenni, hogy biztosan legyen köztük
   a) két egyszínű,
   b) két különböző színű,
   c) három egyszínű,
   d) három különböző színű,
   e) n azonos színű,
   f) piros vagy zöld,
   g) két piros,
   h) n piros,
   i) piros és zöld,
   j) két piros és két zöld,
   k) n piros és n zöld,
   l) n piros és 2n zöld,
   m) valamelyik színből mind,
   n) több kék mint piros,
   o) több kék mint zöld,
   p) kékből legyen a legtöbb.
3. Egy dobozban 25 golyó van. Közöttük ugyanannyi piros van, mint kék, és van valamennyi zöld golyó is. Legalább 21-et kell kivennem ahhoz, hogy biztosan legyen a kivettek között mindhárom színből. Hány zöld golyó van a dobozban?
4. Egy dobozban van k db piros, k+1 db fehér és k+2 db zöld golyó. Ha 14 golyót kiveszünk, a kivettek között biztosan lesz három különböző színű. (Kevesebb golyó között még nem biztos.) Mekkora k értéke?
5. 2001 papírlapra ráírtunk egy-egy számot. Mutassuk meg, hogy kiválasztható 45 lap úgy, hogy vagy mindegyikre azonos, vagy mindegyikre különböző szám van írva!
6. Bizonyítsd be, hogy ha 52 különböző pozitív egész szám egyike sem nagyobb, mint 100, akkor kiválasztható a számok közül három úgy, hogy közülük kettőnek az összege egyenlő legyen a harmadikkal!
7. Bizonyítsd be, hogy 69 különböző, 100-nál nem nagyobb pozitív egész szám között van 3 olyan, amelyek összege is ezen számok között található!
8. Bizonyítsd be, hogy 101 különböző, 100-nál kisebb abszolút értékű egész szám közt van három olyan, melyek összege 0!
9. Egy papírlapra felírtuk 1-től 20-ig az egész számokat. Igaz-e, hogy bárhogyan is veszünk ki 10-et a felírt számok közül, ezek közül mindig kiválasztható 4 szám úgy, hogy közülük kettő különbsége egyenlő a másik kettő különbségével?
10. Legyen d egy adott távolság. A sík minden pontját vagy kékre, vagy pirosra színeztük be. (Mindkét színű pont van.)
    a) Igazoljuk, hogy lesz két egyszínű pont, amelyek távolsága d!
    b) Igazoljuk, hogy lesz két különböző színű pont, amelyek távolsága d!

11. Poligoniában egyetlen út van, egy kör alakú, 120 km hosszú út. Az országban két nemzetiség él a penták és a hexák. A penták öt faluban élnek, és ez az öt falu a körút mentén helyezkedik el egy szabályos ötszöget csúcsaiban. A hexák hat faluban, szintén a körút mentén és ez a hat falu szabályos hatszöget határoz meg. Mutassuk meg, hogy van a körút mentén a 11 falu között van két olyan, amelyet legfeljebb két km hosszú út köt össze.
12. Adott a síkon végtelen sok pont. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok különböző távolság lép fel közöttük!
13. Adott egy négyzet. 9 egyenes mindegyike két olyan négyszögre vágja a négyzetet, amelyek területének aránya 2:3. Mutassuk meg, hogy a 9 egyenes közül legalább három egy pontra illeszkedik.
14. Egy hatszög éleit két színnel színezve lesz-e mindig egyszínű háromszög?
15. Egy 17-szög három színnel színezve lesz-e mindig egyszínű háromszög?
16. **De Mére lovag kockái:** Ha egy szabályos dobókockával 4-szer dobunk, akkor több mint 50% az esélye annak, hogy valamelyik dobás 6-os lesz. Ha viszont két kockával dobunk 24-szer, akkor kevesebb, mint 50% lesz az esélye annak, hogy legalább egyszer dupla 6-ost dobunk. Hogyan lehetséges ez, amikor a dupla 6-osnak éppen hatodannyi az esélye, mint az egyes 6-osnak, és a 24 éppen 6-szor annyi, mint a 4?
17. **Igazságos osztozkodás:** Két játékos egy igazságos játékot játszik. Abban állapodnak meg, hogy az nyeri az egész kitűzött pénzdíjat, aki először nyer 6 játszmát. Az A játékos 5:3-as vezetésénél valami miatt abba kell hagyniuk a játékot, és később sincs lehetőség annak folytatására. Hogyan méltányos osztozkodniuk a téten?
18. **Monthy Hall probléma:** Egy televíziós vetélkedő végén az addig kiválóan produkáló játékos a siker kapujához érkezett. Azonban ezúttal három ajtó áll előtte, az egyik mögött egy álomautó, a másik kettő mögött pedig a kijárat, amin üres kézzel lehet távozni. A játékos megjelöli az egyik ajtót. A műsorvezető, az előzetes tervnek megfelelően, ekkor a másik két ajtó közül az egyiket kinyitja, és mindenki láthatja, hogy a kinyitott ajtó mögött nincs autó. Ekkor felajánlja a játékosnak: ha akarja, most még meggondolhatja magát, és átpártolhat a másik zárt ajtóhoz. Érdemes-e váltani?
19. **Fiú vagy lány:** Egy kétgyerekes családban az egyik gyerek fiú. Mennyi a valószínűsége, hogy a másik lány?
20. **Orvosi teszt:** Egy bizonyos gyógyíthatatlan betegségben szenved átlagosan minden tízezredik ember a Földön. A betegség felismerésére használatos laborteszt 99%-os megbízhatóságú: ha valaki beteg, akkor 99% valószínűséggel a teszt is betegnek mutatja, míg ha egészséges, akkor 99% valószínűséggel a teszt is egészségesnek találja. János most kapta meg a teszt eredményét, mely szerint betegnek találtatott. Mennyi a valószínűsége, hogy tényleg az?
21. **Pétervári paradoxon:** Valaki a következő szisztéma szerint játszik a ruletten. Feltesz a pirosra 1 eurot, és ha nyer, befejezi a játszmát. Ha nem, akkor megduplázza a tétet. Eddig 3 eurot tett fel, a nyereménye 4 euro, tehát megint csak 1 eurot nyert, befejezi a játszmát. Ha megint vesztett, akkor ujra megduplázza a tétet, és így tovább, amíg nem nyer. Ha nyert 1 játszmát, kezdi a következőt. Miért nem gazdagodtak meg már sokan ezzel a szisztémával?
22. **Ajándékozási probléma:** Mikulás előtt az osztályból minden gyerek nevét felírták egy-egy cetlire, és mindenki húzott egy-egy nevet. Akit húzott, annak vásárolt valami kis ajándékot. Persze, ilyenkor senki nem szeretné a saját nevét húzni. Mennyi a valószínűsége, hogy tökéletesen sikerül a sorsolás?
23. **Csőd vagy siker:** Anna 1 euroval kezd el játszani a kaszinóban. Elhatározza, hogy mindig a piros színt fogja játszani. Ha elfogy a pénze, vagy eléri a 4 eurot a vagyona, abbahagyja a játékot. Bár ha pl. 5 játékot vizsgálunk, akkor kisebb a siker, mint a csőd valószínűsége, mégis igazságos a játék. Hogy lehetséges ez?
24. **Születésnap probléma:** Legalább hány embernek kell lenni a terembe, hogy 50%-nál nagyobb legyen annak a valószínűsége, hogy a teremben lévők között van két olyan, akik ugyanazon a napon ünneplik a születésnapjukat?
25. **Szinbád és a háremhölgyek:** Szinbád jutalma, hogy választhat feleséget magának a kalifa gyönyörű háremhölgyei közül. A hölgyek sorban vonulnak el előtte, és Szinbádnak rá kell mutatni arra, akit

választ. Milyen stratégiát válasszon, hogy minél nagyobb legyen a valószínűsége annak, hogy a legszebbet választja?

26. Egy 20 x 25-ös „sakktáblában” 120 egységnégyzetet helyeztünk el. Bizonyítsuk be, hogy elhelyezhető még egy egységnyi átmérőjű kör, amely nem metsz bele egyik egység négyzetébe sem!

27. Az ABCD egységnégyzetbe elhelyeztünk egy ½-nél nagyobb területű M konvex sokszöget. Bizonyítsuk be, hogy található a négyzet AB oldalával párhuzamos olyan egyenes, amelynek az M sokszögbe eső szakasza ½-nél hosszabb!

28. A (8; 9) és (288; 289) egymás utáni természetes számokból álló számpárok rendelkeznek azzal a tulajdonsággal, hogy a számpár mindkét tagja valamennyi prímosztójának legalább a második hatványával osztható. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok ilyen számpár van!

29. Mutassuk meg, hogy az 1! 2! 3!... 99! 100! szorzat száz tényezőjéből el lehet hagyni egyet úgy, hogy a megmaradtak szorzata négyzetszám legyen!

30. Határozzuk meg a következő összeget:
$$\left\{\frac{2003+25}{777}\right\}+\left\{\frac{2003\cdot 2+25}{777}\right\}+\ldots+\left\{\frac{2003\cdot 777+25}{777}\right\}$$

31. Igazold, hogy ha a, b $\in$R és a+b =1, akkor bármely valós x-re:
$$\left|[x+a]+[x+b]-[2x]\right|\le 1$$

32. Egy kör kerületére n db (n≥3) pozitív egész számot írtunk úgy, hogy bármely két másodszomszédos szám összegének és a köztük lévő számnak az aránya egész. Bizonyítsuk be, hogy az összes ilyen arány összege 2n-nél nem kisebb és 3n-nél nem nagyobb!

33. A síkon adott véges sok pont, amelyek közül semelyik három nincs egy egyenesen. A pontok között néhány összekötő szakaszt berajzoltunk. Ha valamely két szakasz- legyen AC és BD- metszi egymást, akkor őket le lehet törölni, és helyettük berajzolni az AB és CD éleket. (Ha az újonnan meghúzandó szakasz már be van rajzolva, akkor nem kell még egyszer berajzolni.) Elképzelhető-e, hogy néhány ilyen csere után visszatérünk az eredeti helyzetbe?

34. Igazoljuk, hogy egy tetszőleges konvex sokszög átlói hosszának számtani közepe nagyobb az oldalak hosszának számtani közepénél!

35. Adott a síkon 2002 általános helyzetű pont úgy, hogy bármely három nincs egy egyenesen. Ezek fele pirosra, fele kékre van színezve. Mutassuk meg, hogy felvehető 1001 szakasz úgy, hogy mindegyiknek egyik vége egy piros, a másik vége egy kék pont a fentiek közül és semelyik két szakasz nem metszi egymást.

36. Az ABC háromszög AC illetve BC oldalaira AA_1C_1C illetve BB_2C_2C paralelogrammákat szerkesztünk úgy, hogy vagy mindkettő a háromszögön kívül, vagy mindkettő - legalább részben - a háromszögön belül legyen. Az A_1C_1 és B_2C_2 oldalakat meghosszabbítjuk úgy, hogy messék egymást (P pontban). Szerkesszünk egy harmadik AP_1P_2B paralelogrammát úgy, hogy AP_1 párhuzamos legyen CP-vel és legyen egyenlő is vele. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az AA_1C_1C és a BB_2C_2C paralelogrammák területének összege megegyezik az AP_1P_2B paralelogramma területével. (Pappos tétele)

37. Alakítsuk szorzattá az $f(x;y;z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ polinomot.

38. Alakítsuk szorzattá:
a) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$
b) $(a+b)^3(a-b)^3+(b+c)^3(b-c)^3+(c+a)^3(c-a)^3$

39. Oldjuk meg az alábbi egyenletet: $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

40. Egy kupacban 25 kavics van. Ketten a következő játékot játsszák: felváltva vesznek el a kupacból 1, 2 vagy 3 kavicsot mindaddig, míg a kupac el nem fogy. Az nyer aki utoljára vesz el egyszerre két kavicsot. Tud-e nyerni a kezdő az ellenfél bármely játéka esetén?

41. Ketten játszanak: Károlynak egy k cm-es, Lajosnak egy l cm-es szakasza van. Mindkettőjük három részre osztja saját szakaszát úgy, hogy először Károly, majd Lajos végzi el a felosztást. Ha a kapott hat

szakaszból össze lehet állítani két háromszöget, akkor Lajos győz, ha pedig nem, akkor Károly. k-tól és l-től függően kinek van nyerő stratégiája?

42. Egy sportversenyen páros mérkőzéseket vívtak a résztvevők. Bármelyik két versenyző csak egyszer játszott egymással. A végső sorrend kialakulásakor kiderült, hogy a második versenyzőtől kezdve az utolsó előttiig mindenki ugyanannyi mérkőzést játszott a sorredben őt megelőzőkkel, mint a sorrendben utána következőkkel. Az első vagy az utolsó versenyző játszott több mérkőzést?

43. Tíz egyforma érmét elhelyeztünk egy körvonal mentén úgy, hogy mindegyik érmén a "fej" van felül. A következő két mozgás megengedett: (1) négy szomszédos érmét megfordítunk; (2) öt szomszédos érme közül a középsőt változatlanul hagyjuk, a másik négyet megfordítjuk. A fenti változtatások véges sokszori alkalmazásával elérhető-e, hogy mind a tíz érmén az "írás" legyen felül?

44. Egy táblára felírtuk a természetes számokat 1-től 4n-1-ig. (n≥1). Egy lépésben a táblán levő számok közül letörlünk kettőt és helyettük a különbségük abszolútértékét írjuk. Biz.be, hogy 4n-2 lépés után egy páros szám marad a táblán!

45. Bizonyítsuk be, hogy 2001 egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyre igaz, hogy számjegyeinek összege osztható 27-tel!

46. A budapesti telefonszámok hétjegyűek. Gyakran előfordul, hogy valaki tárcsázás közben két szomszédos számjegyet felcserél, ezért téves a hívása. Adjunk minél egyszerűbb eljárást arra, hogy a hétjegyű számok végére még egy ellenőrző számot téve, a központ ilyen jellegű számcsere esetén jelezni tudja, hogy a szám téves! (Pálvölgyi Dömötör feladata)

47. Hét hajótörött Ungabunga szigetén az emberevők fogságába esik. Tudják, hogy másnap reggel az emberevők leültetik őket egymás mögé, és mindegyikük fejére egy piros vagy egy kék sapkát tesznek. Mindenki csak az előtte ülők fején lévő sapkát látja. A leghátsó embertől kezdve mindenki mondhat majd egy színt: pirosat vagy kéket. Aki a saját színét mondja, az szabad, aki hibázik, azt a kannibálok bizony megeszik. A foglyok ma este még összebeszélhetnek, és holnap jön a nagy próbatétel. Dolgozzunk ki olyan módszert, amellyel minél többen biztosan megszabadulnak!
Mi a helyzet 3 szín esetén? És ha n a hajótöröttek, k pedig a színek száma? (Róka Sándortól hallottam.)

48. Újabb két hajótörött esik Ungabunga szigetén az emberevők fogságába. Ők is különös feladatot kapnak. Egyiküknek holnap el fogják árulni, hogy a király 16 leánya közül hányadik fog az apja mellett ülni a sapkás próba alatt. Ezután ennek a hajótöröttnek kell a másik 7 fejére tenni a sapkákat. A királylány az egyik sapkát, ha úgy tartja kedve, kicserélheti ellenkező színűre. Ekkor vezetik be a társát, akinek meg kell mondani, hogy hányadik leány ül a papa mellett, hogy volt-e sapkacsere, és ha igen, melyiket cserélték ki. Ma este még összebeszélhetnek, és holnap jön a nagy próbatétel.

49. A bergengóc kosárlabda-bajnokságon vasárnap 7 mérkőzésre kerül majd sor. A kosártotón ezekre a mérkőzésekre lehet tippelni. Hány szelvényt kell vásárolnunk, hogy azokat ügyesen kitöltve biztosan legyen legalább egy 6-találatos szelvényünk?

50. A bergengóc focibajnokságban vasárnap 4 mérkőzésre kerül majd sor. A bergengóc totón ezekre a mérkőzésekre lehet tippelni. Hány szelvényt kell vásárolnunk, hogy azokat ügyesen kitöltve biztosan legyen legalább egy 3-találatos szelvényünk? (Bergengóc példatár)

51. Egy sakktáblára pénzérméket raktunk, minden mezőre legfeljebb egyet. Ketten a következő játékot játsszák: Egy lépésben a soron következő játékos kiválaszthat egy fejet, és megfordíthatja azt és a tőle jobbra lévő érmék közül bármelyiket. Az nyer, aki eléri, hogy minden érme fej legyen. Kinek van nyerő stratégiája?
Oldjuk meg a feladatot úgy is, ha a megfordított fejjel együtt kötelező minden tőle jobbra lévőt is megfordítani!

52. Három kupac mindegyikében van tetszőleges számú kavics. Ketten a következő játékot játsszák: Egy lépésben bármelyik, de csak egyik kupacból vehetünk el tetszőleges számú kavicsot. Az nyer, aki utoljára tud lépni. Kinek van nyerő stratégiája?

53. Újra a 7 hajótörött esetét vizsgáljuk. Ezúttal azonban nem beszélhetnek, de mindenki lát mindent, és írásban kell megtippelniük saját sapkaszínüket. Legalább egyiküknek tippelnie kell, a többiek akár passzolhatnak is. Akkor lesznek szabadok, ha mindannyian jól tippelnek, különben megeszik őket.

Dolgozzunk ki olyan módszert, amellyel minél nagyobb valószínűséggel megszabadulnak! (Prisoner Problem, New York Times 2001.04.10.)

54. Kém Elek a parkban összefutott a királyfival, és megtudta tőle, mitől olyan szomorú. A királyfi kérve kérte a törpéket, hogy hadd legyen övé Hófehérke üvegkoporsója. A törpék azonban próba elé állították a királyfit. Holnap reggel be kell mennie a szobába, és ki kell választania Hófehérke tányérját. Az asztalon egymás mellett 8 egyforma tányér áll majd, a tányérok mellett jobbról vagy balról pedig a kanál, aszerint, hogy gazdája jobb- vagy balkezes. A királyfi persze még azt sem tudta, hogy hányan jobbkezesek. Kém Elek gondolkodott, majd arra kérte a királyfit, hajnalban vigye magával, útközben majd elmondja tervét. Másnap a törpék megengedték, hogy Elek bemehet a próbatétel előtt a szobába, és megmutatják neki a keresett tányért, hogy ellenőrizhesse, jól választott-e a királyfi. A szobában, miután megtudta, melyik Hófehérke tányérja, valamelyik tányér melletti kanalat felemelte és nézegetni kezdte. Amikor a törpék rászóltak, hogy azonnal tegye le, visszatette a kanalat, vagy ugyanoda, ahonnan elvette, vagy a tányér másik oldalára. Ezután bejött a királyfi, és némi tanakodás után határozottan rámutatott Hófehérke tányérjára. Hogyan csinálták?

55. A Bergengóc Televízióban az adás előtt mindig egy 8×8-as táblázatot sugároznak, melynek minden mezőjét véletlenszerűen a nemzeti színeknek megfelelően sárgára vagy kékre színeznek. Az aznapra tervezett színezés mindenki számára ismeretlen. Kém Elek annyit tud megtenni a lebukás veszélye nélkül, hogy mielőtt a monoszkóp adásba menne, esetleg a táblázat bármelyik, de csak egy mezőjének a színét megváltoztathatja. Cukrászdia határvidékén az előre megbeszélt napon figyelték a Bergengóc Televízió adását, és a monoszkópból megfejtették az üzenetet. Hányféle üzenetet továbbíthatott Kém Elek, és hogyan működhetett a kódrendszer? (Pósa Lajostól hallottam.)