I. MINTAPÉLDA

1. Probléma: Egy utazási iroda úgy szervez utakat n úticélhoz, hogy minden helység minden helységből közvetlenül elérhető. Hány kapcsolat szükséges?

A megoldás lépései

- *Stratégiaválasztás („Finding a pattern"):* kis számú célállomás és mindig egyet hozzáveszünk vagy az n szögpontú teljes gráfot vizsgáljuk.
- *A probléma stratégia-orientált vizsgálata:* Kis számú célállomások mellett a probléma könnyen kezelhető. A kapcsolatok számát természetes módon növeljük egy-egy újabb állomás hozzávételével – egy új helyről minden előzőbe kell kapcsolat (a régiek már össze vannak kötve).
- *A megoldás lépéseinek összekapcsolása:* 0 + 1 + 2 + … + n-1.
- *A megoldás elemzése:* A kiegészítés által kapott eredményt ellenőrizzük valamilyen konkrét számra (pl. n=10) és az adott számra kapunk egy második megoldást, amelyből az n(n-1)/2 képlet is megsejthető. A kiegészítés kevesebb absztrakciós készséget igényel, mint a gráf lokális és globális vizsgálata (a csúcsnál n-1 él találkozik, minden élt kétszer számolunk), ugyanakkor a kész eredményt így is érdemes interpretálni.

2. Probléma: Hány tartományra darabolható a sík n egyenessel?

A megoldás lépései

- *Stratégiaválasztás:* Kipróbáljuk az előző sikeres eljárást (stratégiát): Megnézzük, hogy egy újabb egyenes hozzávételével hogyan változik a tartományok száma.
- *A probléma stratégia-orientált vizsgálata:* A tartományok száma függ az egyenesek kölcsönös helyzetétől. Azt sejtjük, hogy az ideális eset akkor áll elő, amikor minden egyenespár különböző metszéspontot hoz létre.
- *Szabályszerűség keresése:* Az első egyenes felezi a síkot. A második egyenes szét tudja vágni mindkét félsíkot. Az n-edik egyenes az előző tartományokból n tartományt tud két részre vágni. (Ideális esetben az n-edik egyenes mind az n-1 régi egyenest metszi és ezáltal az n-edik egyenes n darabra lesz vágva. A 2 félegyenes és az n-2 darab szakasz kettévágnak egy-egy előző tartományt.)
- *A megoldás lépéseinek összekapcsolása:* 2 + 2 + 3 + … + n = 1 + (1 + 2 + 3 + … + n)
- *A megoldás elemzése: A kiegészítéses eljárás intuitív átvitele* egyszerű és elvezet a megoldáshoz. A kész konfigurációk összehasonlítása ezzel szemben még zavart is okozhat a szükséges nézőpontváltás (helység – egyenes, kapcsolat – tartomány) miatt.

II. MINDENNAPI PROBLÉMA MATEMATIKAI MODELLJÉNEK KERESÉSE ANALÓGIA ALAPJÁN

Vízöntögetés és diofantoszi egyenletek – problémamegoldás konkrét tevékenységgel

3.a Probléma: Egy kiránduláson a leveshez pontosan 5 liter vizet akarunk hozni a forrástól. Csak egy 4 literes és egy 7 literes edényünk van. Hogyan oldható meg a probléma?

Megoldási ötlet: A 4 literes edénnyel megtöltjük a 7 literes edényt. Ehhez kétszer megtöltjük a 4 literes edényt, Másodszor 1 liter marad benne. Kiürítjük a 7 literes edényt, beleöntjük az 1 liter maradékot és még 4 litert. Meg/lejegyezzük a sikeres eljárást: 4 + 4 – 7 + 4 = 5.

3.b Probléma: Hány liter vizet tudunk egy 4 és egy 7 literes edény segítségével kimérni?

Megoldási ötlet: Az előző megoldási ötletet alkalmazzuk és eredményünket rögzítjük.

ADAG [LITER]	4-LITERES EDÉNY	7-LITERES EDÉNY
1	4 + 4 – 7	
2	4 + 4 – 7 + 4 + 4 –7	
3		7 – 4
4	4	
5		4 + 4 – 7 + 4
6		4 + 4 – 7 + 4 –7 + 4 + 4
7		7

3.c Probléma: Hány liter vizet tudunk egy 3 és egy 9 literes edény segítségével kimérni?

Megoldási ötlet: Az előző megoldási ötletet vizsgálva észrevesszük, hogy az eredménytábla 4 és 7 összegeit és különbségeit tartalmazza. Ezt a felfedezést a (4,7 és 3,9) analógia szemszögéből átvisszük, és azt sejtjük, hogy 3, 6 és 9 liter mérhető ki.

3.d Probléma: Hány liter vizet tudunk egy a és egy b literes edény segítségével kimérni?

***Megoldási ötlet*:** A (4 - 7 és 3 - 9) analógiával nyert felfedezést átvisszük az új szituációra. Azt sejtjük, hogy az összegek és különbségek (tehát a legnagyobb közös osztó többszörösei) mérhetők ki.

4. Probléma: Hány vendéget tudunk egy 4+1 és egy 7+1 üléses autóval elszállítani, ha csak „telekocsi" indulhat?

Megoldási ötlet: Szisztematikus próbálkozással az alábbi értékeket kapjuk

$4, 4 + 4 = 8, 4 + 4 + 4 = 12, 4 + 4 + 4 + 4 = 16, \ldots$
$7, 7 + 7 = 14, 7 + 7 + 7 = 21, \ldots$
$4 + 7 = 11, 4 + 2\cdot 7 = 18, 4 + 3\cdot 7 = 25, \ldots$
$2\cdot 4 + 7 = 15, 2\cdot 4 + 2\cdot 7 = 22, 2\cdot 4 + 3\cdot 7 = 29, \ldots$
és ebből megsejthető a $4m + 7n$ megoldásrendszer.

5. Probléma: Melyek a $4x + 7y = 5$ egyenlet egész megoldásai?

Megoldási ötlet: Valamilyen megoldásunk már van, 5 liter vizet 4- és 7-literes edénnyel úgy mértünk ki, hogy háromszor megtöltöttük a 4-literes edényt és ebből a 12 literből 7 litert kiborítottunk, azaz $x = 3$, $y = -1$.

További megoldásokat keresve

5 liter	$4 + 4 + 4 – 7$
2 liter	$(4 + 4 + 4 – 7) + 4 – 7$
3 liter	$((4 + 4 + 4 – 7) + 4 – 7) + 4 + 4 – 7$
0 liter	$(((4 + 4 + 4 – 7) + 4 – 7) + 4 + 4 – 7) + 4 – 7$
0+5 liter	$((((4 + 4 + 4 – 7) + 4 – 7) + 4 + 4 – 7) + 4 – 7) + (4 + 4 + 4 – 7)$
…	
$k\cdot 0$+5 liter	$4(3 + 7k) + 7(-1 – 4k)$

Végtelen sok $x = 3 + 7k$ és $y = –1 – 4k$, (k pozitív egész) alakú megoldást találtunk. A 3.a probléma megoldása éppen a $k = 0$ eset realizációja. Negatív k értékekre behelyettesítéssel ellenőrizhetjük a megoldást. A megoldások alakja így: $x = 3 + 7k$ és $y = –1 – 4k$, (k egész).

Megmutatandó még, hogy minden megoldást felsoroltunk. Legyen x^*, y^* egy tetszőleges, és $x = 3$, $y = –1$ egy megtalált megoldás. A $4x + 7y – 5 = 0$ egyenletbe behelyettesítve, egyenlővé téve és átrendezve $4(x^* – 3) = 7(–1 – y^*)$ adódik, azaz x^*, y^* is szerepel a felsoroltak között.

6. Probléma: Milyen c értékre megoldható az $ax + by = c$ diofantikus egyenlet?

Megoldási ötlet: A 3.d problémával való összevetésből nyerhetjük a sejtést: Az egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha a és b legnagyobb közös osztója osztja c-t.

7. Probléma: Egy 8 literes edény tele van vízzel. Hogyan lehet a vizet egy 3 és egy 5 literes edény segítségével megfelezni?

Megoldási ötlet: Úgy is értelmezhetjük a problémát, hogy egy 3 és egy 5 literes edény segítségével 4 liter vizet kell kimérni.

Megjegyzések:

- A szerény matematikai érdeklődésűek is probléma-megoldási élményhez juthatnak, hiszen a vízöntögetés konkrét adatokkal könnyen végiggondolható és komoly eséllyel sikerhez vezet. Részmegoldás is lehetséges.
- Ezek az analógiák egyfelől elvezetnek a matematikai modellhez (diofantikus egyenletek), másfelől a modell és a valóság kapcsolatának vizsgálatához is példaként szolgál (pl. negatív megoldások).
- Amint a példák mutatják, a matematikai tartalomnak sem kell csorbát szenvednie.

III. A KÖRMÉRKŐZÉSTŐL AZ IRÁNYÍTOTT GRÁFIG – SZITUÁCIÓHOZ KAPCSOLÓDÓ (ÁLTALÁNOSÍTHATÓ) MEGOLDÁSOK

1894 óta létezik az érettségizők számára az Eötvös-, később Kürschak Matematikaverseny, amelyen 3 versenytételt kapnak a versenyzők. A 3 probléma megoldására 4 óra áll rendelkezésükre és minden segédeszközt használhatnak. A következő problémák közül több is szerepelt versenytételként, vagy analógia útján kapcsolatba hozható az ott szereplő feladatokkal. Az évszámot zárójelben közöljük (vö. [3]).

8. Probléma (1954/3)**:** Egy körmérkőzéses bajnokságon mindenki mindenkivel egyszer játszott és nem született döntetlen. Van-e olyan résztvevő, aki minden játékost megnevez, miközben felsorolja azokat, akiket vagy ő, vagy az általa legyőzöttek győztek le?

Megoldási ötlet I: *(hétköznapi indoklás)*: Minden játékos bemegy egy terembe. Egy játékos elhagyja a termet és mindazok, akiket ő legyőzött (esetleg senki). Ha van még játékos a teremben (aki az összes előzőt legyőzte), akkor kimegy valaki és az általa legyőzöttek. Ezt az eljárást folytatjuk mindaddig, amíg a terem kiürül. A terem kiürítője legyőzte mindazokat, akik vele együtt kimennek és azokat is, akik már korábban kimentek (különben nem maradhatott volna a teremben). A kiürítő tehát mindenkit felsorol, ha az általa, vagy az általa legyőzöttek által legyőzötteket felsorolja.

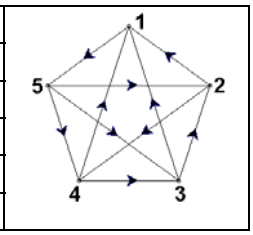
Megoldási ötlet II: *(indirekt indoklás)*: Kiválasztunk egy játékost úgy, hogy senkinek nincs több győzelme, mint neki. Ha A nem felelne meg a feladat feltételeinek, akkor lenne egy B játékos, akit sem A, sem az A által legyőzöttek nem győztek le. Így azonban B-nek legalább 1-gyel több győzelme lenne, mint A-nak. Ez lehetetlen, tehát A megfelel a feladat kirovásainak.

A megoldási utak elemzése:

a) A győztes, vagy a győztesek egyike megfelel a feladat feltételeinek.

b) Nem igaz, hogy csak a győztes ilyen, hiszen lehet, hogy a vesztes is, vagy minden játékos megfelelő (lásd a táblázatot és a gráfot, 8. ábra).

	1	2	3	4	5
1		+	+	+	–
2	–		+	–	+
3	–	–		+	+
4	–	+	–		+
5	+	–	–	–	



8. ábra

c) A problémát gráfokkal a következőképpen fogalmazhatjuk meg (A játékosokat a szögpontok, a győzelmeket az irányított élek reprezentálják.):

9. Probléma: Bizonyítandó, hogy egy véges, irányított, teljes gráfban létezik olyan szögpont, amelyből bármely szögpont elérhető az irányításnak megfelelően haladó, legfeljebb 2 hosszú úttal.

Megjegyzés: Az állítás végtelen gráfra nem igaz. Legyenek például P_l, P_2, P_3, … egy végtelen gráf szögpontjai és az éleket irányítsuk a kisebb indexű pont felé. Így csak véges sok pont érhető el az irányításnak megfelelően.

Aritmetika – egy furcsa könyvtár és a gráfok

10. Probléma (1952/2): Az 1-től 3n-ig terjedő egész számok közül kiválasztunk n+2 darabot. Bizonyítandó, hogy a kiválasztott számok között van kettő, amelyek különbsége n és 2n között van (n > 1).

***Megoldási ötlet I*:** Elegendő azokat az eseteket vizsgálni, amikor 3n a kiválasztott számok között van, mert ha 3n nincs kiválasztva, akkor minden kiválasztott számot egységesen megnövelünk úgy, hogy 3n legyen a legnagyobb kiválasztott szám. (Ez a növelés nem változtatja meg a különbségeket.)

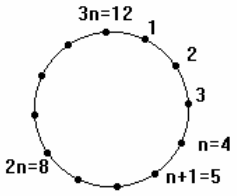
a) Ha n+1, n+2, …, 2n-1 valamelyike a kiválasztott számok között van, akkor ennek és 3n-nek a különbsége n és 2n között van.

b) Ha n+1, n+2, …, 2n-1 egyike sincs a kiválasztottak között, akkor a szóbajövő számokból n darab olyan párt képezünk úgy, hogy a tagok közötti különbség 2n-1 legyen: 1, 2n; 2, 2n+1; 3, 2n+2; …, n, 3n-1. Egy

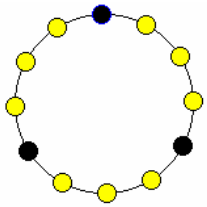
szám már ki van választva (3n), a további n+1 szám közé mindenképpen bekerül valamelyik pár mindkét tagja. (*Skatulyaelv*)

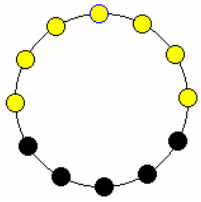
***Megoldási ötlet II*:** A 12. Probléma általánosításának megoldása.

***Megoldási ötlet III*:** Felírjuk a 3n természetes számot növekvő sorrendben, egyenlő távolságra egy körvonalra. Egy óra számlapja az n=4 esetet szemlélteti. Két szám akkor felel meg a feltételnek, ha (növekvő irányban) összekötő ív hossza a körvonal hosszának egyharmada és kétharmada között van. A kiegészítő ív a körvonal egyharmada és kétharmada között van. Ha egy ív egyharmadnál hosszabb, akkor a kiegészítő ív automatikusan kétharmadnál rövidebb. Az kell tehát, hogy az ív és a kiegészítő ív egyszerre legyen egyharmad körívnél hosszabb. Ezzel visszavezettük a problémát a (következő,) 11. Problémára.



11. ábra


12.a ábra


12.b. ábra

11. Probléma: Egy körvonalon 3n pont fekszik egyenlő közökben. Bizonyítandó, hogy akárhogyan választunk ki n+2 pontot, a kiválasztott pontok között mindig van egy pár, amely a körvonalat két 1/3-nál nagyobb ívre osztja.

Megoldási ötlet: Megpróbálunk néhány pontot úgy kiválasztani, hogy ne keletkezzen 1/3-nál hosszabb ív. A feltétel azt a tilalmat jelenti, hogy egy kiválasztott pont társa nem feküdhet a szemközti harmadíven. Azt mondjuk, hogy egy ív „szabad”, ha két kiválasztott pont határolja és további kiválasztott pontot nem tartalmaz. A tilalom értemében nem létezhet egyharmadnál hosszabb szabad ív. Ugyancsak a tilalom értelmében nem létezhet olyan szabad ív, amelynek hossza egyharmad és kétharmad között van. Következésképpen egy megengedett kiválasztásnál a maximális szabad ív vagy egyharmad, vagy legalább kétharmad.

a) Ha a legnagyobb szabad ív 1/3, akkor csak a kiegészítő 2/3 ív felezőpontja választható ki. Ezt a pontot ki is kell választani, különben nem lenne a kiindulási ív a leghosszabb szabad ív (12.a ábra).

b) Ha a legnagyobb szabad ív a körvonal kétharmada, vagy hosszabb, akkor a kiválasztott pontok egy egyharmadnyi (zárt) köríven fekszenek (12.b ábra). Ebből az n+1 pontból választhatunk (akár mindegyiket). Mivel n+2 nagyobb, mint n+1 és n > 1 esetén n + 2 nagyobb, mint 3, a tilalom megszegése nélkül nem választható ki n+2 pont.

A 10. Probléma n = 60 esetén a következő humoros formában (12. Probléma) is megfogalmazható.

12. Probléma: Egy könyvtár déli 12 órakor nyit és 15 órakor zár. A látogatók egész perckor, egyenként léphetnek be, először 12 órakor, utoljára 14 óra 59 perckor. Minden könyvtárlátogató elalszik 1 órával az érkezés után és egy órán át alszik, hacsak a könyvtár be nem zár közben. Alvó könyvtárlátogatót tilos belépéssel zavarni. Bizonyítandó, hogy emellett a szabályozás mellett nem tud 62 vagy annál több látogató egy nap a könyvtárba belépni.

Megoldási ötlet: Felülről akarjuk becsülni a látogatók számát, ezért feltesszük, hogy a portás az első látogató érkezésekor 12 órára állítja vissza az órát, azaz azt a szituációt vizsgáljuk, amelyben az első látogató 12 órakor jön. Három részesetet vizsgálunk aszerint, hogy 1 és 2 órakor jön-e valaki.

a) 1 órakor és 2 órakor is jön 1-1 látogató. Ha valaki 12 és 1 jönne, ő 2 órakor aludna és ez 2 órakor belépési tilalmat jelentene. A 12 órai látogató 1 és 2 között alszik, az 1 órai látogató 2 és 3 között alszik, emiatt ebben az időszakban nem léphet be újabb látogató.

b) 1 órakor jön 1 látogató és 2 órakor nem jön senki. 1 óra után senki nem léphet be, mert a 12 órai látogató 1 és 2 között alszik, az 1 órai látogató pedig 2 és 3 között. Minden lehetséges látogatónak 12 és 1 között kell tehát belépni, ami legfeljebb 61 látogatót jelent.

c) 1 órakor nem jön látogató. Kiválasztjuk azt a látogatót, aki 1 óra előtt utolsóként érkezett (ez lehet esetleg a 12 órai látogató). A kiválasztott látogató érkezésétől számított két órán belül senki sem érkezhet, hiszen csak az ő alvása előtt érkezhetne valaki, de az ő érkezése után 1 óráig és 1 órakor nem jön senki. 1 órától a kiválasztott látogató elalvásáig nem jöhet senki, mert alszik a 12 órai látogató, amennyiben a két látogató nem azonos. A kiválasztott látogató érkezésétől számított két órán belül a lehetséges belépések közül 119 kihasználatlanul marad, tehát az elvileg lehetséges 180 belépésből legfeljebb 61 eset realizálódik.

Összefoglalva: Legfeljebb 61 látogatója lehet ennek a különös könyvtárnak.

Általánosítás: Megállapításaink akkor is érvényben maradnak, ha az órát 60 perc helyett n részre osztjuk. Ekkor 61 belépő helyett n+1 belépőt kapunk felső becslésnek, és ez a szám 3-nál kisebb nem lehet, azaz n > 1.

A 10 – 12. Problémák közös matematikai modellje a gráfok nyelvén a következőképpen fogalmazható meg:

13. Probléma: Legyen n egy 1-nél nagyobb adott természetes szám. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan 3n szögpontú gráf, amelyben bármely három szögpontból kettő össze van kötve, és nem tartalmaz n+2 szögpontú teljes részgráfot.

Megjegyzés:
Egy ilyen gráfot a következőképpen állíthatunk elő: 3n darab pontot kiválasztunk a körvonalon és megszámozzuk 1-től 3n-ig. Minden pontot összekötünk a megelőző és a rákövetkező n ponttal. Két pont tehát akkor nincs összekötve, ha sorszámaik közötti különbség n és 2n között fekszik. Az állítjuk, hogy bármely n+2 kiválasztott pont között van két olyan, amelyek nincsenek összekötve, és hogy bármely három szögpontból kettő össze van kötve (a > b > c és c – a < 2n számozásnál b-a vagy c-b kisebb, mint n).

IV. AZ ÓRAREND ÉS AZ ÜTÉSMENTES BÁSTYAELHELYEZÉS

Diákok, tanárok, igazgatók vágynak egy „igazán jó“ órarendre. Az iskola i darab szaktantermének k osztály közötti elosztása 1, 2, 3, 4, 5 napra (esetleg adott napi és heti óraszámmal) olyan komplex feladat, hogy ebben az általános formában nem is tudjuk megoldani. A speciális esetek vizsgálatával azonban egy sor analóg feladatra és sok szép megoldásra bukkanhatunk.

14. Probléma: Hányféleképpen lehet egy iskola 8 osztályát a 8 szaktanterembe egy órára beosztani?

Megoldási ötlet: Tekintsük az iskola és a 8×8-as sakktábla között azt az analógiát, amelyben egy szaktantanteremnek egy sor, egy osztálynak egy oszlop felel meg, és ha egy osztály egy terembe be van osztva, akkor a megfelelő sor és oszlop közös mezőjére egy bástyát állítunk. Egy teljes terembeosztás 8 bástya ütésmentes felállításának felel meg a sakktáblán.

15. Probléma: Hányféleképpen lehet egy 8×8-as sakktáblára 8 bástyát ütésmentesen felállítani?

Megoldási ötlet I: Egy felállított bástya lefoglal egy sort és egy oszlopot. Ebből megállapíthatjuk, hogy egy 8×8-as sakktáblára 8-szor annyi bástya állítható ütésmentesen, mint egy 7×7-es sakktáblára.

Megoldási ötlet II: Minden oszlopba fel kell egy bástyát állítani. Az 1. oszlopban 8, a másodikban 7, a harmadikban 6, stb. mezőre állíthatjuk a bástyát. Ha valahol eltérő mezőt választunk, más-más ütésmentes elrendezést kapunk, így az ütésmentes bástyaelhelyezések száma $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = = 8! = 40320$.

16. Probléma: Sorfolytonosan megszámozzuk egy 8×8-as sakktábla mezőit 1-től 64-ig, és 8 bástyát felállítunk a sakktáblára. Minden elrendezéshez hozzárendeljük azon mezők sorszámának összegét, amelyeken bástya áll. Mekkora ennek az összegnek a minimuma ütésmentes elrendezés esetén?

Megoldási ötlet: A mező sorszáma 8a+b alakba írható, ahol a 0 és 7, b pedig 1 és 8 közötti egész szám. Egy ütésmentes elrendezést jellemezhetünk azzal, hogy a és b minden megengedett értéket pontosan egyszer vesz fel. A mezőkhöz rendelt 8 érték összege minden ütésmentes bástyaelhelyezéskor $8(0+1+2+3+4+5+6+7) + (1+2+3+4+5+6+7+8) = 8x28 + 36 = 260$.

17. Probléma: Hányféleképpen lehet egy iskola m osztályát az n szaktanterembe egy órára beosztani (n legalább akkora, mint m)?

Megoldási ötlet: Lásd az analóg sakktáblás probléma megoldását.

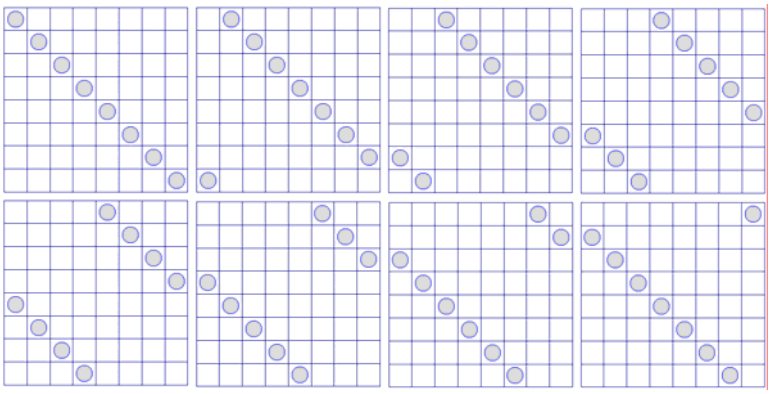
18. Probléma: Legfeljebb hány bástyát lehet egy n×m-es sakktáblára ütésmentesen felállítani? Hányféle elrendezés szerint lehet a maximális számú bástyát ütésmentesen elhelyezni?

Megoldási ötlet: A bástyák maximális száma m. Az elrendezések száma a 15. probléma második megoldás ötlete alapján: $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(m-1))$.

19. Probléma: Hogyan lehet egy iskolában a 8 szaktantermet egy napra beosztani, ha az iskola mind a 8 osztályának napi 8 (különböző) órája van?

Megoldási ötlet: A tanterem-sor, osztály-oszlop analógia szerint minden tanítási óra beosztása 8 bástya ütésmentes felállítását jelenti egy 8x8-as sakktáblán. A napi órarend elkészítése 64 bástya (mindhárom irányban) ütésmentes elhelyezését jelenti egy térbeli 8x8x8-as sakktáblán (20. Probléma). A lehetőségek száma 108776032459082956800 (lásd [11] és [12].

20. Probléma: Legfeljebb hány bástyát lehet egy 8×8×8-as térbeli sakktáblára ütésmentesen felállítani?



20. ábra: A 8×8×8-as sakktábla 8 síkja

Megoldási ötlet: 64 bástya állítható fel ütésmentesen, mert minden oszlopban legfeljebb egy bástya állhat. Egy ütésmentes térbeli elrendezést nyerhetünk úgy, ha első síkon felállítunk 8 bástyát ütésmentesen és a következő síkra való áttéréskor minden oszlopot ciklikusan eggyel jobbra tolunk (20. ábra).

Megjegyzés: Tekintsük 64 bátya ütésmentes elrendezését egy térbeli sakktáblán. Ha az 1. sík bástyáit 1-gyel, a 2. síkét 2-vel, …, az utolsóét 8-cal helyettesítjük és ezeket az átlátszó síkokat egy síkra vetítjük, akkor egy 8x8-as négyzetet kapunk, amelynek mezői az 1, 2, …, 8 számokkal vannak kitöltve úgy, hogy minden szám minden sorban és minden oszlopban pontosan egyszer fordul elő (latin négyzetek és téglalapok). Fordítva is áll az analógia, egy 8-adrendű latin négyzetből a sorrendtől eltekintve egyértelműen rekonstruálható 64 bástya ütésmentes elrendezése egy térbeli sakktáblán.

Az ütésmentes bástyaelhelyezés ilyen átfogalmazásával a kombinatorika és a gráfelmélet egy aktuális kutatási és alkalmazási területére értünk (titkosírás, elektronikus aláírás, permutációmátrix, stb.)

V. ÚT A MAGASABB MATEMATIKA FELÉ – MODELLALKOTÁS ANALÓGIA SEGÍTSÉGÉVEL

Az analógia segítségével különböző hétköznapi problémák közös matematikai modelljét is megtalálhatjuk.

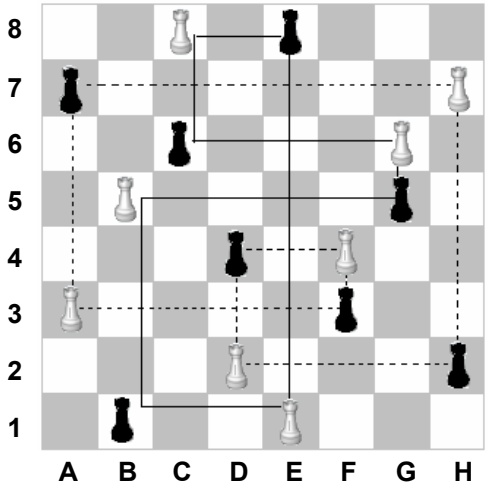
21. Probléma (Táncpartnerkeresés): Egy tánctanfolyamon 8 nő és 8 férfi vesz részt. Minden hölgy két urat, minden úr 2 hölgyet ismer. A táncmester szeretne (vegyes) párokat alakítani úgy, hogy mindenki ismerőssel táncoljon. Lehetséges ez?

Megoldási ötlet: A résztvevők (egy vagy több) kört alkotnak úgy, hogy minden személy mindkét szomszédját ismeri: egy (tetszőlegesen kiválasztott) úr kiválaszt egy ismerős hölgyet, a hölgy az ő második férfiismerősét, a kiválasztott férfi a második hölgyismerősét, és így tovább mindaddig, amíg vagy minden résztvevő ki van választva, vagy a választó hölgy második férfiismerőse a kört megnyitó úr. Ha kell, újabb kört nyitunk mindaddig, amíg minden résztvevő bekerül valamelyik körbe. A párokat egy-egy körön belül képezzük: pl. minden hölgy kiválasztja a jobboldali szomszédját.

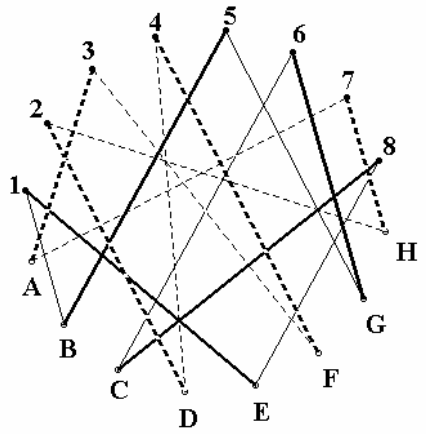
22. Probléma (A szerkesztő dilemmája): A KÖMAL-ban 8 problémát tűztek ki. A szerkesztő mindegyikre 2-2 közölhető megoldást talált és észrevette, hogy a közlésre kiválasztott megoldások közül 2-2 ugyanattól a beküldőtől származik. Elhatározza, hogy úgy közöl problémánként 1-1 megoldást, hogy minden beküldőnek jelenjen meg megoldása. Meg lehet ezt csinálni?

Megoldási ötlet: A 21. probléma megoldási ötlete alapján a feladat számát és az adott feladat beküldőinek nevét (esetleg több) körbe rendezzük úgy, hogy minden szám a két beküldő közé és minden név a két beküldött feladat sorszáma közé kerüljön. Minden sorszámhoz (például) a jobboldalán lévő beküldőt választjuk.

23. Probléma (1933/2)**:** Egy sakktábla 64 mezőjéből kiválasztunk 16-ot úgy, hogy minden sor és minden oszlop 2-2 kiválasztott mezőt tartalmaz. Bizonyítandó, hogy a kiválasztott mezőkre felállítható 8 fehér és 8 fekete bábu, hogy minden sorba és minden oszlopba jusson 1-1 fehér és 1-1 fekete bábu.



23. ábra: A két ciklus



24. ábra: A kiválasztott 8 él

Megoldási ötlet: Egy kiválasztott mezővel indulunk, és vízszintesen megyünk az adott sor másik kiválasztott mezőjéig. Függőlegesen megyünk tovább, az adott oszlop második kiválasztott mezőjéig, majd tovább felváltva vízszintesen és függőlegesen. Egyszer biztosan a kiinduló mezőre jutunk. Az útra felfűzött (irányváltó) mezők száma páros, hiszen az úton függőleges és vízszintes szakaszok váltakoznak. A kiindulási mezőre és minden másodikra fekete bábút, a másodikra (és minden másodikra) fehéret állítunk. Ha még van üres kiválasztott mező, akkor valamelyik üres mezővel indulva addig megismételjük az előző eljárást, amíg minden kiválasztott mezőre kerül bábu (23. ábra).

Az utóbbi három probléma egymáshoz analóg és ezt az analógiát a három probléma közös matematikai modelljével tudjuk legjobban megmutatni.

24. Probléma (a 21-23. problémák matematikai modellje): Rajzolunk 8 pontot és megszámozzuk őket 1-től 8-ig, majd rajzolunk még nyolc pontot és elnevezzük őket az ABC nagybetűivel. Minden számozott pont 2 betűjeles és minden betűjeles 2 számozott ponttal van összekötve. Bizonyítandó, hogy ki lehet választani a 16 összekötő szakaszból 8-at úgy, hogy mind a 16 pont előfordul a szakaszok végpontjai között.

Megoldási ötlet: A (páros) gráfot diszjunkt körökre osztjuk. Minden körbe páros sok szögpont kerül. Kiválasztunk minden körben minden második összekötő szakaszt. Ezáltal a 23. probléma esetében azokat a mezőket választottuk ki, amelyekre azonos színű bábúk kerülnek.

Példáinkban (23. és 24. ábra) két körből állnak a gráfok: E-8-C-6-G-5-B-1-E és A-7-H-2-D-4-F-3-A. A párok, közölt megoldások, fehér sakkfigurák mezője, azaz a kiválasztott élek lehetneek például E1, B5, G6, C8 és A3, F4, D2, H7.

Megjegyzés: A probléma általánosítható n párra, n feladatra, n mezőre, n+n pontra, a megoldás lényegében változatlan marad.

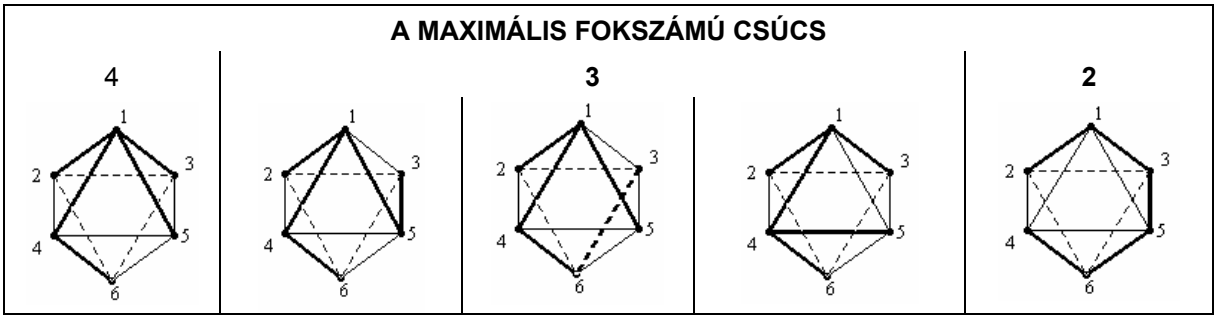
VI. AZ ANALÓGIÁS PROBLÉMAMEGOLDÁS HATÁRAI – A KOCKA HÁLÓZATAI ÉS AZ OKTAÉDER FESZÍTŐFÁI

25. Probléma: a) A szabályos oktaéder élvázas modelljébe hány élt kell mindenképpen beépíteni, hogy a modell ne essen szét?

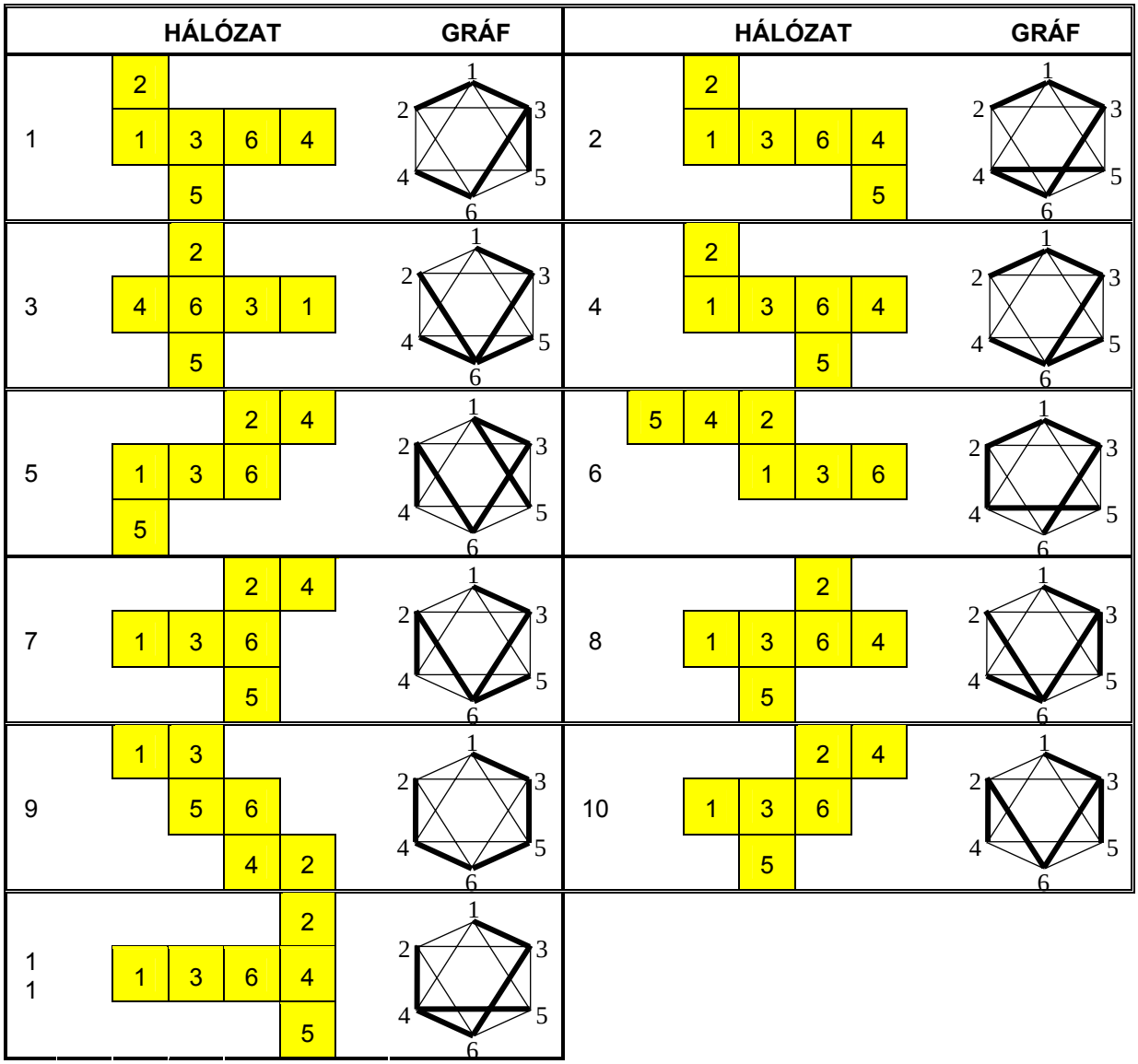
b) Hányféle ilyen modell lehetséges?

26. Probléma: a) Mekkora a kocka hálózatának kerülete, ha a négyzetek teljes éllel csatlakoznak?
b) Hány olyan kockaháló létezik, amelyben a négyzetek teljes éllel csatlakoznak?

Megoldási ötlet: A kocka lapközéppontjai egy oktaédert alkotnak. Az oktaéder két csúcsát akkor kötjük össza éllel, ha a kocka megfelelő lapjai szomszédosak. Az oktaéder élvázas modelljét olyan gráfnak tekinthetjük, amelynek szögpontjai a kocka lapjait ábrázolják és az élek a lapok szomszédos voltát jelzik.
Az oktaéder egy élének elhagyása a kocka két lapjának egy él menti elvágását jelenti.
Minden minimális élszámú összefüggő oktaédergráf reprezentál egy kockahálót, amelyben a négyzetek teljes oldallal csatlakoznak egymáshoz.



25.b ábra: Az oktaéder feszjtőfái



26. ábra: A kockahálók és a feszítőfák

Ez az analógia hasznos a 25a és a 26a Probléma megoldásánál: 7 élet kell törölni ahhoz, hogy feszítőfát kapjunk, ami azt jelenti, hogy a kockaháló kerülete 14 élhossznyi. Ez az eredmény segítség a 11 különböző kockaháló megkeresésében.

Az oktaéder 5 feszítőfáját gyorsabban megtaláljuk, mint a 11 kockahálót, hiszen egyszerübb struktúráról van szó és a lehetséges esetek száma is kisebb, de ez nem segít a 26.b probléma megoldásában (25.b ábra). Bár minden kockahálóhoz rendelhető feszítőfa, ezek között izomorfa gráfok is vannak. Példánkban az 1 és 7 kockahálóhoz ugyanaz a feszítőfa tartozik, de a 2,5,6,9, illetve 4,10,11 kockahálókhoz tartozó feszítőfák is izomorfak. Ha a kockát a 3-as és 6-os lapok szögfelezősíkjára tükrözzük, akkor az 1-es és 7-es kockahálóhoz tartozó feszítőfák egymásba mennek át, de a kockahálók nem szimmetrikusak (26. ábra).

Ez egyben ennek az analógiának a korlátait is mutatja.

Irodalom

[1] BRUNER, J. S. (1966). Studies in cognitive growth. New York: Wiley

[2] DUNCKER, K. (1935). Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin: Springer (Neudruck 1963).

[3] HAJÓS, Gy., NEUKOMM, Gy. & SURÁNYI J.(1957). Matematikai versenytételek. Tankönyvkiadó

[6] HERBER, H.-J.&VÁSÁRHELYI, É. (2002): Das Unterrichtsmodell „Innere Differenzierung einschließlich Analogiebildung“ – Aspekte einer empirisch veranlassten Modellentwicklung. Salzburger Beiträge zur Erziehungswissenschaft 6, Nr. 2, 5-19.

[7] MAUS, P. (2005). Problem solving in mathematics and in everyday life. In: Parisot, K. J. & Vásárhelyi, É.: Positionen - Mathematikdidaktik in Entwicklung, Salzburg: Abakus Verlag, im Druck

[8] MILLER, G.A., GALANTER, E.&PRIBRAM, K.H. (1960): Plans and the Structure of Behavior. New York: Holt, Rinehart & Winston.

[9] PIAGET, J. (1980): Psychologie der Intelligenz. Stuttgart: Klett-Cotta

[10] PÓLYA, G. (1949). Schule des Denkens, Bern: A. Franke AG. Verlag

[11] WELLS, M. B. (1967). The number of Latin squares of order 8, J. Combin. Theory, 3, 98-99.

[12] http://mathworld.wolfram.com/LatinSquare.html

Szerzők

MAUS, Pál & VÁSÁRHELYI, Éva
ELTE TTK Matematikai Intézet
Matematikatanítási és Módszertani Központ
H-1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C