# Matematika a hétköznapokban febr. 19.

Appel György és Vásárhelyi Éva

**A Markov-láncok üzleti alkalmazásainak tanítása**

Mészáros Krisztina szakdolgozatából
Témavezető: Dr. Vásárhelyi Éva egyetemi docens
2002. április

# A Tesco és az Auchan versenye

A budaörsi Auchan és a törökbálinti Tesco egymással csaknem szemben helyezkedik el az M7-es autópálya Budapestre bevezető szakaszán.

Árukészletük az átlag vásárló szempontjából nagyon hasonló, így a vevők igazából a reklámfogások alapján döntik el, mikor, melyik helyen vásárolnak.

Az áruházak célja, hogy olyan marketing tevékenységet folytassanak, amellyel hosszú távon nagyobb piaci részesedéshez jutnak.

# Marketinges alaptétel,

hogy a hosszú távú siker kulcsa a hűséges vevő. Így a vevőhűség növelését a cégek elsődleges marketing-feladatnak tartják.

A marketing osztályok azon vannak, hogy vásárlóik minél nagyobb megelégedettséggel távozzanak tőlük annak reményében, hogy a következő vásárlás alkalmával ismét áruházukat választják.

A vevő megelégedettsége mérhető. Ennek egyik mutatója, hogy az utóbbi vásárláshoz képest a vásárlók hányad része tért vissza az áruházba, és hányad részük pártolt át a konkurens céghez.

# A matematikai modell - feltevések

A végzett mérések adatait feldolgozva, a Markov-lánc modell alkalmazásával információt nyerhetünk az áruházak jövőbeni piaci részesedéséről.

Budaörs, Budakeszi, Törökbálint és dél-nyugat Budapest összes lakója kéthetente egyszer a két áruház valamelyikében vásárol.

A máshonnan érkező vevők száma az említett területekről érkezőkhöz képest elenyésző, így azokat vizsgálatunk során nem vesszük figyelembe.

# Megállapíthatjuk,

hogy egy vevő áruházválasztása az időtől nem, csak attól függ, hogy az előző bevásárlását hol végezte.

Például, az egy adott alkalommal a Tesco-ban vásárlók 80%-a a legközelebbi vásárláskor is visszatér az áruházba, míg 20%-uk átpártol az Auchan-hoz.

Az Auchan vevőinek viszont 90%-a választja ismét az Auchan-t, a maradék, 10% a következő vásárlását a Tesco-ban intézi.

Másként fogalmazva: ha valaki egyszer a Tesco-ban vásárolt, akkor 0,8 valószínűséggel két hét múlva is odamegy; 0,2 valószínűséggel a konkurens áruház mellett dönt.

Az Auchan egy vásárlója pedig 0,9 valószínűséggel tér vissza; 0,1 valószínűséggel pedig a Tesco-ban végzi a következő vásárlást.

# A rendszer rendelkezik

az úgynevezett **Markov tulajdonság**gal, miszerint a jövő a múlttól csak a jelenen keresztül függ.

Vagyis annak a valószínűsége, hogy a rendszer a (t+1)-edik időpontban *j* állapotba kerül, csak attól függ, milyen állapotban volt a t-edik időpillanatban.

# Matematikai megfogalmazás

Az áruházakban egy adott pillanatban vásárlók arányát valószínűségi változóval írhatjuk le.

A mintatér az Auchan és a Tesco áruházak.

A kéthetente egymást követő vásárlások egy véletlen változók egymást követő sorozatát adják, ezzel egy sztochasztikus folyamatot definiálnak.

Egy sztochasztikus folyamat Markov tulajdonságú, ha a valószínűségi változó adott pillanatban felvett értéke csak az azt megelőző időpillanatban felvett értéktől függ.

Formálisan: $P(X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \ldots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i) =$
$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = p(t)_{ij}$

# A Markov tulajdonsággal

rendelkező sztochasztikus folyamatot Markov-láncnak nevezzük.

A $p(t)_{ij}$ értékeket egylépéses átmeneti valószínűségeknek mondjuk.

Az átmeneti valószínűségek általában függnek az időtől.

Példánkban feltettük, hogy az átmeneti valószínűségek az időtől függetlenek.

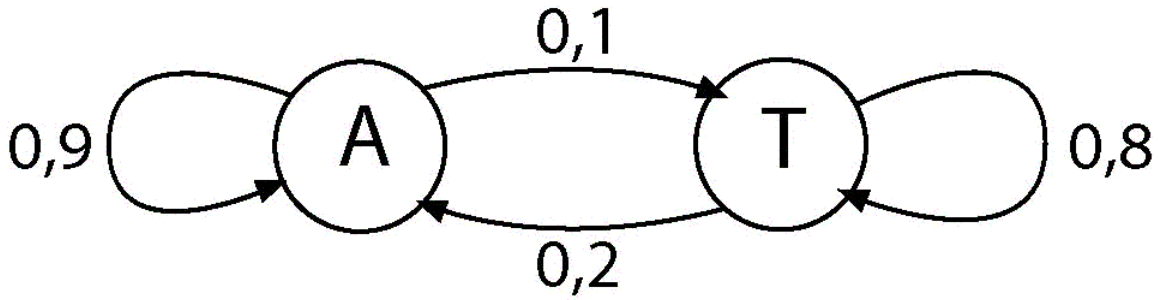
Az ilyen speciális Markov-láncokat **homogén Markov-lánc**oknak mondjuk.

Ekkor az egylépéses átmeneti valószínűségekre a $p_{ij}$ jelölést használjuk.

# Átmeneti valószínűségek, állapotdiagramm és átmeneti mátrix

Vizsgáljuk az Auchan és a Tesco áruházak vásárlóinak arányát a kéthetes időperiódusokban.

Felírjuk, hogy hogyan változik az arány periódusról periódusra:




A körök a rendszer állapotait jelölik – most a két áruházat -, a nyilakon lévő számok pedig arra vonatkoznak, milyen valószínűséggel lép a rendszer az egyik állapotból a másikba (vagy saját magába), egyik időperiódusról a másikra.

# Mátrixszal:

Az állapotváltások valószínűségét matematikai nyelven egylépéses **átmeneti valószínűségek**nek, a felírt mátrixot az egylépéses átmeneti valószínűségek mátrixának vagy röviden egylépéses **átmeneti mátrix**nak nevezzük.

Az egylépéses előtag arra vonatkozik, hogy az állapotváltás egy időintervallum alatt következik be.

A példánkban két hét számít egy időintervallumnak.

Ha arra lennénk kíváncsiak, hogy négy vagy hat hét múlva melyik áruházat választja egy adott vevő, akkor két-, illetve háromlépéses átmeneti valószínűségekről beszélnénk.

# Egylépéses átmeneti mátrix a Tesco és az Auchan vásárlóinak áruház-választásához

| | A | T |
|---|---|---|
| A | 0,9 | 0,1 |
| T | 0,2 | 0,8 |

A mátrix soraiba és oszlopaiba elhelyezzük a rendszer összes lehetséges állapotát, jelen esetben a két áruházat.

A sorokban tűntetjük fel, hogy jelenleg milyen állapotban van a rendszer, az oszlopokban, hogy a következő időpillanatban melyikben lesz.

A mátrix elemei az átmeneti valószínűségek lesznek.

# A mátrix általánosan

Itt például $p_{11}$ azt a valószínűséget jelöli, hogy az 1-es állapotból az 1-es állapotba lép a rendszer.
Írhatnánk azt is, hogy $p_{AA}$, vagyis hogy Auchanból, Auchanba.
Szokás szerint azonban a rendszer állapotait megszámozzuk, és az egylépéses átmeneti valószínűségeket $p_{ij}$-vel jelöljük, ahol i és j a lehetséges állapotok sorszámát jelölik.

| | A | T |
|---|---|---|
| A | $p_{11}$ | $p_{12}$ |
| T | $p_{21}$ | $p_{22}$ |

# Állapotvalószínűségek

Tegyük fel, hogy vizsgálódásunk kezdetekor, vagyis a kiindulási $t_0$ időpontban piackutatással felmértük, hogy a két áruház pillanatnyi piaci részesedése a következő: Auchan 40%,Tesco 60%.

Ezekből az adatokból és az egylépéses átmeneti valószínűségek ismeretében számításokat végezhetünk a piaci részesedések jövőbeni alakulására.

Számítsuk ki az Auchan részesedését 2 hét múlva, vagyis $t_1$ időpontban.

# Az egylépéses átmeneti mátrixból tudjuk,

hogy a jelenlegi Auchan vásárlók 90%-a 2 hét múlva is visszatér.

Mivel jelenleg a vásárlók 40%-a jön az Auchan-ba, így két hét elteltével a 40% 90%-át mondhatja magának az áruház.

Ez 36%-ot jelent (0,4*0,9 = 0,36).

A Tesco-ba, a vásárlók 60%-a megy.

Ezeknek az embereknek a 20%-a két hét múlva az Auchan-t látogatja. A 60% 20%-a tehát az Auchan vevője lesz.

Ez 12%-ot ad (0,6*0,2 =0,12).

Az Auchan új részesedése a fentiek összegeként számítható, vagyis 36 + 12 = 48% lesz.

(A Tesco-é nyilván a fennmaradó 52%.)