Bevezető matematika dolgozat (Matematika BSc szakosok számára)
feladatainak megoldása
2006. október 27.

1. *a)* Az a valós paraméter mely értéke mellett lesz két egyenlő gyöke az alábbi egyenletnek: $$x^2 - ax + 4 = 0$$

Megoldás: Ha a diszkrimináns 0: $|a| = 4$. (4 pont)

b) A pozitív valós p paraméter mely értékeire oldható meg az egyenlet? Adjuk meg az egyenlet megoldáshalmazát! $$2\lg x - \lg(x-1) = \lg p$$

Megoldás: A bal oldalnak csak akkor van értelme, ha $x > 0$, illetve ha $x > 1$. A bal oldal $\lg\frac{x^2}{x-1}$. Ez $\lg p$. (2 pont) Vagyis (a logaritmus monotinitása miatt) a p értékét megkapjuk, ha a tört értékkészletét keressük $x > 1$ feltétel mellett. (2 pont) Az $\frac{x^2}{x-1} = 2 + x - 1 + \frac{1}{x-1}$ kifejezés minimumának kiszámításához felírjuk az $x-1$ és az $\frac{1}{x-1}$ kifejezésekre a számtani és mértani közepek között fennálló összefüggést. Eszerint az $x - 1 + \frac{1}{x-1}$ kifejezés akkor minimális, ha $x = 2$, erre az eredeti kifejezés 4-gyel egyenlő.
Az értékkészlet (vagyis a paraméterre kapott megoldáshalmaz) a $(4;\infty)$ intervallum. (2 pont)

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet és egyenlőtlenséget: *a)* $\sqrt{1-\cos^2 x} = 1 - \sin|x|$ *b)* $\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1} \geq 1 - x$

Megoldás: *a)* A bal oldal $|\sin x|$. (2 pont) Vizsgáljuk a $[0;2\pi]$ intervallumot. A jobb oldal itt $1 - \sin x$. (2 pont) A bal oldal a $[0;\pi]$ intervallumban $\sin x$-szel, a $[\pi;2\pi]$ intervallumban $-\sin x$-szel egyenlő. Az utóbbi nem ad megoldást, az előbbiből viszont $\sin x = \frac{1}{2}$, azaz $x = \frac{\pi}{6}$ vagy $\frac{5\pi}{6}$ ($+2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{N}$). (2 pont)

Mivel mind a két függvény páros, a megoldáshalmaz: $x = \pm\frac{\pi}{6}$ vagy $\pm\frac{5\pi}{6}$ ($+2k\pi$, ahol $k \in \mathbf{N}$, tehát nem negatív!). (2 pont)
b) A bal oldal $|x^2 - 1|$. Ez a $[-1;1]$ intervallumban $1 - x^2 = (1-x)(1+x)$, ahol (az adott intervallumban) $1 - x$ nem negatív. Tehát az egyenlőtlenség megoldása itt $x \geq 0$, azaz $0 \leq x \leq 1$. (2 pont)
Ezen az intervallumon kívül a bal oldal $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$-gyel egyenlő. Átrendezve az egyenlőtlenséget $(x-1)(x+2) \geq 0$ adódik, amelynek megoldása az adott intervallumon az $x > 1$ és $x \leq -2$ valós számok. A megoldás tehát: $x \leq -2$ és $x \geq 0$. (4 pont)

3. Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left(\sqrt{27}-4\right)x+\left(\sqrt{12}-3\right)y=\sqrt{48}-5$$

Megoldás: Az egyenletet átalakítva $3\sqrt{3}x-4x+2\sqrt{3}y-3y=4\sqrt{3}-5$ adódik (2 pont). A $\sqrt{3}$ -at tartalmazó tagok nem lehetnek racionálisak, ezért szétválasztható az egyenlet egy racionális és egy irracionális részre. (6 pont) Ebből következik, hogy $3x+2y=4$ és $4x+3y=5$. (2 pont) Ezek szerint $x=2$ és $y=-1$. (2 pont)

4. Bizonyítsuk be, hogy az x minden valós értéke mellett:

$$\cos^4 x+\sin^2 x\cos^2 x+\sin^2 x=1$$

Megoldás: Az egyenletet ekvivalens átalakítással a $\cos^4+(\cos^2 x+1)(1-\cos^2 x)=1$, (4 pont) azaz $\cos^4 x-\cos^4 x+1=1$ alakra hozhatjuk, ami azonosság. (4 pont)

5. Egy sorozat első n tagjának összege $3n^2$ minden pozitív n egész számra. Igaz-e, hogy ez egy számtani sorozat? Ha igen, határozzuk meg a sorozat n -edik tagját n függvényében!

Megoldás: Ha a sorozat első n tagjának az összege $3n^2$, akkor az első tag 3, a második $3\cdot 2^2-3=9$, a harmadik $3\cdot 3^2-9-3=15$. (2 pont) Eszerint csakis az $a_n=6n-3$ képzési szabállyal kapható számtani sorozatról lehet szó. (4 pont) Ennek a sorozatnak az első n tagjának az összege valóban $3n^2$. (2 pont) Más sorozatnak pedig nem lehet $3n^2$ a tagjai összege minden pozitív egész n -re, mert két egymást követő tag különbsége éppen $3n^2-3(n-1)^2=3\cdot(2n-1)=6n-3$. (4 pont)

6. Lehet-e négyzetszám az a pozitív egész szám, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában 510 darab 1-es és valahány 0 szerepel?

Megoldás: A szám osztható 3-mal, (3 pont) de nem osztható 9-cel, (3 pont) tehát nem lehet négyzetszám. (2 pont)

7. Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak! Állítását indokolja!
a) Ha egy hatszögnek a szemköztes oldalai párhuzamosak, akkor szabályos.
b) Ha egy csoportban 14 tanuló van, akkor biztosan van köztük legalább 3, akiknek ugyanabban a hónapban van a születésnapja.
c) Ha egy hatszög szabályos, akkor vannak párhuzamos oldalai.
d) Ha egy csoportban 2 tanulónak ugyanabban a hónapban van a születésnapja, akkor legalább 13 tanuló van a csoportban.

Megoldás:
a) Nem igaz. Vegyük ellenpéldának azt a hatszöget, amelynek minden oldala egyenlő, szögei pedig 90, 135, 135, 90, 135, 135 fokosak. 3 pont
b) Nem igaz. Ellenpélda: 2-2 tanuló januárban és februárban, a többi mind további más-más hónapban ünnepli a születésnapját. 3 pont
c) Igaz. Minden szemközti oldalpárja egyenlő és párhuzamos a szabályos hatszög szimmetriái

miatt. 3 pont

d) Nem igaz. Lehet, hogy csak két tanuló van, de mindkettő ugyanabban a hónapban ünnepli a születésnapját. 3 pont

8. Számítsuk ki az $y-10^{-9}x=10^{-6}$, az $y=10^{-6}$ és a $2y=10^{-9}x+10^{-6}$ egyenesek által közrezárt háromszög területét!

Megoldás: Az egyenesek egyenletei $y=10^{-9}x+10^{-6}$, $y=10^{-6}$ és $y=\frac{10^{-9}}{2}x+\frac{10^{-6}}{2}$.
Mindhárom egyenest ugyanannyival eltolva a közbezárt terület nem változik. Az y tengely irányában -10^{6}-nal eltolva a kapott egyenletek: $y=10^{-9}x$, $y=0$ és $y=\frac{10^{-9}}{2}x-\frac{10^{-6}}{2}$.
Két egyenes átmegy az origón, az egyik maga az x tengely. A harmadik egyenes a két másik egyenest (az x tengelyt) az $(1000;0)$, illetve a $(-1000;-10^{-6})$ pontban metszi.
A háromszög egyik oldalának (amely az x tengelyre illeszkedik) hossza 1000, a hozzá tartozó magasság 10^{-6}. Ezért a közrezárt háromszög területe $\frac{10^{-3}}{2}$.
Pontozás: az egyenesek egyenletének meghatározása 2 pont, a metszéspontok meghatározása 6 pont, a háromszög területének kiszámítása 4 pont.

9. Egy lóversenyen 3 lóra fogadnak. Ha az első nyer, akkor a rá tett összeg kétszeresét; ha a második nyer, az erre tett összeg négyszeresét, ha a harmadik, az erre tett összeg nyolcszorosát kapják. Mekkora összeget kell tenni egy-egy lóra, hogy bármelyik fusson is be elsőnek, 100 Ft nyeresége legyen a fogadónak?

Megoldás: Ha a lovakra tett összegek rendre x, y, z, akkor az egyes elérhető nyereségek az alábbiak szerint írhatók fel:
$x+y+z+100=2x=4y=8z$
Ebből egyrészt $2x=8z$, illetve $4y=8z$, vagyis $x=4z$, $y=2z$, másrészt viszont
$4z+2z+z+100=8z$, amiből $z=100$, tehát $y=200$, $x=400$.

Pontozás: A helyes összefüggés felírása 8 pont, a megoldás 4 pont.