Szintfelmérő dolgozat matematika Bsc szakosoknak
2007. február
Megoldás

1. *Adjunk meg két darab olyan $\frac{a}{b}$ alakú törtet, melyek biztosan a $\frac{4}{113}$ és $\frac{5}{113}$ közé esnek (ahol a és b pozitív egészek). A választ indokoljuk!* *(5 pont)*

Megoldás: --

$\left(\frac{4}{113}+\frac{5}{113}\right):2=\frac{9}{226}$ (2 pont)

$\left(\frac{4}{113}+\frac{9}{226}\right):2=\frac{17}{452}$ (2 pont)

$\frac{4}{113}<\frac{17}{452}<\frac{9}{226}<\frac{5}{113}$ (1 pont)

Megjegyzés: lehetnek más példák is.

----

2. *Egy számtani sorozat első eleme -2, a negyedik 16. Szerepel-e a sorozat elemei között*

a) 11998;

b) 11996?

Ha igen, az hányadik eleme a sorozatnak? *(7 pont)*

Megoldás: --

a) $16-(-2)=18=3d$; $d=6$. $-2+(n-1)d=1998$; $n=201$.

Tehát a 11998 eleme a sorozatnak. (5 pont)

b) 11996 nem eleme. (2 pont)

----

3. *Oldja meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:*

a) $x-\sqrt{x}-2=0$. *(6 pont)*

Megoldás: --

Jelölje a a $\sqrt{x}$-et. $a^2-a-2=0$. $a_1=-1$ $\sqrt{x}\neq-1$. (4 pont); $a_2=2$

Ha $\sqrt{x}=2$, $x=4$. (2 pont).

----

b) $-\sin x-\cos^2 x-1=0$ *(8 pont)*

Megoldás: --

Mivel $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, ez $\sin^2 x-\sin x-2=0$, amiből $\sin x=-1$ (5 pont)

(hiszen $\sin x\neq 2$) (1 pont)

Így $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. (2 pont)

----

c) $\log_x 9-\frac{2}{\log_x 9}-1=0$ *(8 pont)*

Megoldás: ---

Az egyenletet átalakítva: $\left(\log_x 9\right)^2-\log_x 9-2=0$. (2 pont)

Vezessük be az $a=\log_x 9$ jelölést, ekkor a-ban másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldásai -1 és 2. (2 pont)

$\log_x 9=-1$ esetén a megoldás $x=\frac{1}{9}$. (2 pont)

$\log_x 9=2$ esetén a megoldás $x=3$. (2 pont)

----

4. *Hány megoldása van a* $\sin 2x=\sin x$ *egyenletnek a* $\left[0;\frac{3\pi}{2}\right]$ *intervallumon?* *(8 pont)*

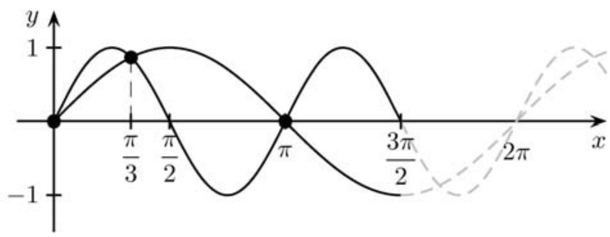
Megoldás: ---

$2\sin x\cos x=\sin x$, ha

vagy $\sin x=0$, azaz $x=k\pi$, $k=0;1$, illetve, (4 pont)

ha $\sin x\neq 0$, akkor $\cos x=\frac{1}{2}$, $x=\frac{\pi}{3}$ (4 pont)

Más megoldás:---



A megoldások száma egy jó ábráról is leolvasható. Jó ábra (6 pont)
Tehát 3 megoldás van. (2 pont)

----

5. *Öt cédulára felírtuk az 1, 2, 3, 4, 5 számokat, majd az összekevert cédulákat véletlenszerűen egymás mögé téve egy ötjegyű számot kaptunk. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az így kapott szám osztható 6-tal?* *(10 pont)*

Megoldás: ---

A számjegyek összege 15, tehát mindegyik szám osztható 3-mal. (2 pont)

Ezért csak a párosakat kell összeszámolnunk! A 2-re, illetve 4-re végződőek száma: $4!=24$ (2 pont)

Ezért a 6-tal oszthatók száma összesen 48. (2 pont)

Az összes ötjegyű szám száma: $5!=120$. (2 pont)

A valószínűség: $\frac{2\cdot 4!}{5!}=\frac{48}{120}=\frac{2}{5}$. (Vagy $0{,}4$; 40%.) (2 pont)

----

6. *Egy háromszögről tudjuk, hogy az oldalaira fennáll, hogy* $a^2b^2 + c^4 = b^4 + a^2c^2$. *Tudjuk azt is, hogy az egyik szöge* $120°$*-os. Mekkorák lehetnek a háromszög további szögei?* *(12 pont)*

Megoldás: --

Átrendezve az egyenletet, $c^4 - b^4 = a^2c^2 - a^2b^2$, azaz $\left(c^2 - b^2\right)\left(c^2 + b^2\right) = a^2\left(c^2 - b^2\right)$. (4 pont)

Ha $c^2 - b^2 = 0$, vagyis $c^2 = b^2$, akkor (az oldalak mérőszáma pozitív lévén) $c = b$.
Ebben az esetben egyenlő szárú háromszöget kapunk. Ebben a $120°$ szög csak a szárszög lehet, tehát az alapon fekvő szögek $30°$-osak. (6 pont)

Ha $c^2 - b^2 \neq 0$, akkor az $a^2 + b^2 = c^2$ összefüggéshez jutunk, amely derékszögű háromszögekre áll fenn, ez azonban nem lehet, mert akkor nem lehetne $120°$-os szöge. (2 pont)

----

7. *Az* $f(x) = x^2 + 2x + c$ *függvényt a valós számok halmazán értelmezzük. Hogyan kell megválasztani a c értékét ahhoz, hogy*

a) a függvény grafikonja érintse az x tengelyt; *(3 pont)*
b) a függvény minimuma -5 *legyen;* *(3 pont)*
c) a függvény értékkészletébe csak negatív számok tartozzanak? *(3 pont)*

A válaszokat indokoljuk!

Megoldás: --

a) $c = 1$; $x^2 + 2x + 1 = \left(x + 1\right)^2$. (A diszkrimináns 0.) (3 pont)

b) $f(x) = (x+1)^2 - 5 = x^2 + 2x + 1 - 5 = x^2 + 2x - 4$, tehát $c = -4$. (3 pont)

c) Ilyen nem lehetséges. Például $|c|$-t helyettesítve x helyébe, nem kaphatunk negatív függvényértéket: $c^2 + 2|c| + c$ a c előjelétől függően: $c^2 + |c|$ (negatív c esetén) vagy $c^2 + 3|c|$ (nem-negatív c esetén). Ezen kifejezésekben minden tag nem-negatív, az összeg soha nem lehet negatív. (3 pont)

----

8. *Melyik igaz, melyik hamis az alábbi állítások közül?*

a) Ha egy négyszögben két-két szög egyenlő, akkor az paralelogramma. *(3 pont)*
b) Van olyan paralelogramma, amelynek négy szimmetriatengelye van. *(3 pont)*
c) Ha egy paralelogramma oldalai egyenlő hosszúak, akkor átlói merőlegesek. *(3 pont)*
d) Ha egy paralelogramma átlói egyenlő hosszúak, akkor oldalai merőlegesek. *(3 pont)*

A válaszokat indokoljuk!

Megoldás: --

a) Hamis. Lehet például olyan húrtrapéz, amelynek nem párhuzamosak a szárai. (3 pont)
b) Igaz, például a négyzet. (3 pont)
c) Igaz, mert az egyenlő oldalú paralelogramma rombusz, ennek átlói merőlegesek egymásra. (3 pont)
d) Igaz, mert az egyenlő átlójú paralelogramma téglalap, ennek szomszédos oldalai pedig merőlegesek egymásra. (3 pont)

----

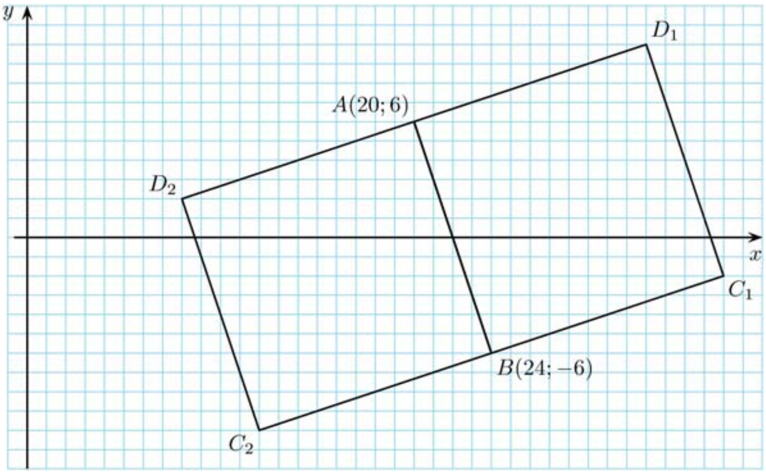
9. *Tekintsük a Descartes koordináta-rendszer* $A(20;6)$, $B(24;-6)$ *pontjait. Adjuk meg a sík összes olyan*

a) négyzete; *(6 pont)*
b) szabályos háromszöge *(9 pont)*

további csúcsainak koordinátáit, amelyben A és B is csúcsok, mégpedig szomszédosak.

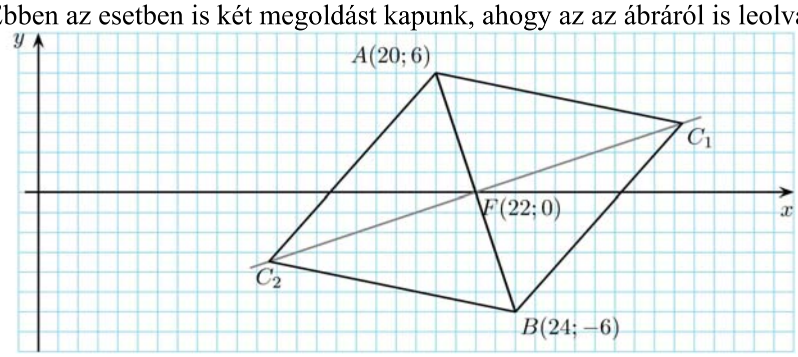
Megoldás: --

a) Az ábráról is leolvashatjuk, hogy két megoldást kapunk.



$\overrightarrow{BA} = (-4;12)$; $\overrightarrow{AD_1} = (12;4)$, illetve $\overrightarrow{AD_2} = (-12;-4)$, amiből
$D_1(20+12;6+4) = (32;10)$ és $C_1(24+12;-6+4) = (36;-2)$, valamint
$D_2(20-12;6-4) = (8;2)$ és $C_2 = (24-12;-6-4) = (12;-10)$. (6 pont)

b) Ebben az esetben is két megoldást kapunk, ahogy az az ábráról is leolvasható.



$\overrightarrow{FA} = (-2;6)$, ezt elforghatva $90°$ -kal és megnyújtva $2\sqrt{3}$ -szorosáre kapjuk:

$\overrightarrow{FC_1} = \sqrt{3}(6;2)$, (3 pont)

illetve $\overrightarrow{FC_2} = \sqrt{3}(-6;-2)$. (3 pont)

Ebből $C_1\left(22+6\sqrt{3};2\right)$, (2 pont)

továbbá $C_2\left(22-6\sqrt{3};-2\right)$. (2 pont)
