Matematika záródolgozat a Matematik Bsc szakon.

2006. 12. 16.
Megoldások

1. *a)* $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ azonosság. 2 pont

b) $\log_{10}^2 x = 2\log_{10} x$ nem azonosság. (Csak $x = 1$ és $x = 100$ esetén egyenlő, nevezetesen 0, illetve 2 a két kifejezés.) 4 pont

2. *a)* $(x-2)^2 |\cos x| = \cos$, ha $\cos x = 0$, azaz $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. 2 pont

Ha $\cos x \neq 0$, akkor

vagy $(x-2)^2 = 1$ és $\cos x > 0$; 2 pont

vagy $(x-2)^2 = -1$, ez viszont nem lehetséges. 2 pont

$(x-2)^2 = 1$ csak úgy lehet, ha $x - 2 = 1$, azaz $x = 3$ vagy $x - 2 = -1$, azaz $x = 1$.

De $\cos 3 < 0$ nem megfelelő. 2 pont

$\cos 1 > 0$, ez az egyetlen megoldás. 2 pont

b) $\{x\} = \frac{1}{5}x$.

A $\{x\}$ függvény minden értékre nemnegatív, tehát az egyenletnek nincs negatív megoldása. 1 pont

Egy lehetséges megoldása $x_1 = 0$ 1 pont

Egy megoldás van az $1 < x < 2$ intervallumban. Ekkor ugyanis az egyenlet $x - 1 = \frac{1}{5}x$ alakba írható, amelynek megoldása: $x_2 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$. 3 pont

A $2 < x < 3$ intervallumban az egyenlet az $x - 2 = \frac{1}{5}x$ egyenlettel ekvivalens. Itt megoldás az $x_3 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2} = 2{,}5$. 3 pont

A $3 < x < 4$ intervallumban az egyenlet az $x - 3 = \frac{1}{5}x$ egyenlettel ekvivalens. Itt megoldás az $x_4 = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$. 3 pont

Az $x \geq 4$ számokon nincs több megoldás. 1 pont

3. *a)* $x < x^3 < x^4 < x^2$, ha $|x| > 1$, akkor $x < x^2 < x^3 < x^4$. 2 pont

Ha $0 < x < 1$, akkor például $x^3 < x$. 3 pont

Ha pedig $-1 < x < 0$, akkor teljesül az egyenlőtlenség. 3 pont

Másik megoldás: x nyilván nem lehet 0. 1 pont

Az $x < x^3 < x^4 < x^2$ egyenlőtlenséget két részre bonthatjuk: $x < x^3$ és $x^4 < x^2$, ez utóbbi
$x \cdot x^3 < x \cdot x$ alakban írható. 4 pont

A másodikat x-szel osztva csak úgy kaphatjuk az elsőt, ha $x < 0$. 2 pont

Ekkor viszont $1 > x^2$, vagyis $1 > |x|$. Eszerint csak $-1 < x < 0$ lehetséges. 1 pont

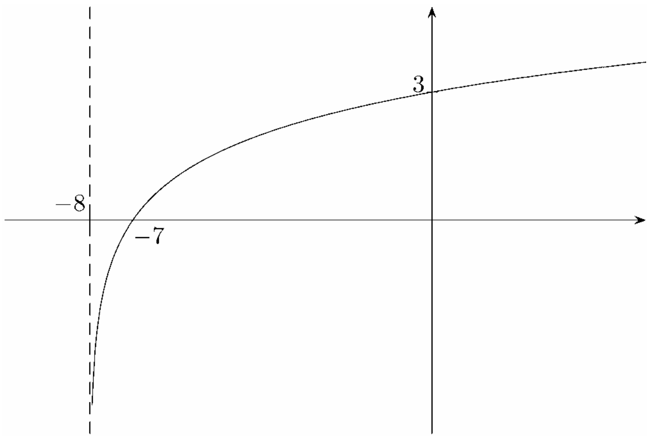
b) $x^2 - 100 < 0$, ha $-10 < x < 10$. 2 pont

A legkisebb egész szám az intervallumban a -9. 2 pont

c) A metszéspontok: $(-7;0)$ és $(0;3)$. 3 pont

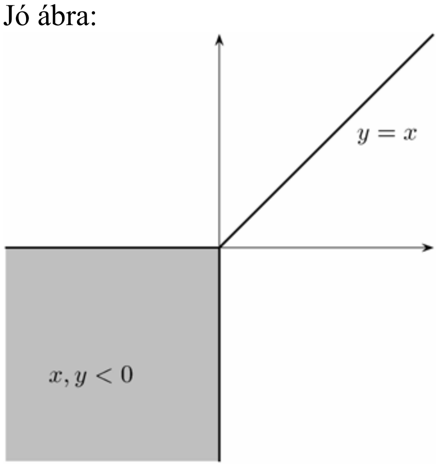
Ábra

3 pont



4. $x + |x| = y + |y|$, ha $y = x$ vagy $x, y < 0$, ekkor ugyanis $x - x = y - y = 0$. 3 pont

Jó ábra: 6 pont



5. Legalább $\frac{1}{5}$ valószínűségű húzások: p, p, p; marad 2 piros, 8 kék: $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. 5 pont

Legfeljebb $\frac{1}{2}$ valószínűségű húzások: k, k, k; marad 5 piros, 5 kék: $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. 5 pont

6. A számtani sorozat: 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 2 pont

Az esetleges mértani sorozat első két tagja: 6, 18. 2 pont

A harmadik tag eszerint $18 \cdot \frac{18}{6} = 54$. 2 pont

54 valóban tagja a számtani sorozatnak, mégpedig a 10-edik. 2 pont

7. $n^3 - n^2 + n - 1 = n^2(n-1) + (n-1) = (n^2+1)(n-1)$. $n^2 + 1 > 1$, ha $n \in \mathbf{N}^+$. 3 pont

Tehát $n-1=1$, azaz $n=2$, és ez jó is, mert $(2-1)(4+1)=5$ prím. 5 pont

8. *a)* Igaz. Legyen például a deltoid egy négyzet vagy egy rombusz. 3 pont

b) Igaz, az az átló, amely nem szimmetria-tengely. 3 pont

c) Igaz. A húrnégyszög körbe írható, a deltoid egyik átlója a kör átmérője. Thalesz tétele alapján az átmérővel szemben fekvő szögek derékszögek. 3 pont

d) Nem igaz. Lehet a négyszög pl.nem négyzet téglalap is, ez nem deltoid. 3 pont