2. feladatsor

1. Adjon minél jobb becslést arra, hogy a 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből képezhető 4 jegyű számok között hány négyzetszám lehetséges, ha minden számjegy különböző!

2. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét!

$$\frac{\left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{9}}{\frac{8}{27}}.$$

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

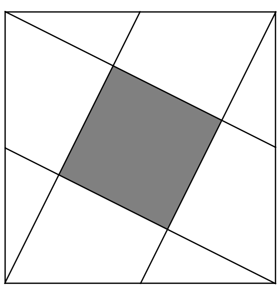
$$\sin 2x+\cos 2x=1+2\operatorname{tg} x.$$

4. Az xy derékszögű koordináta-síkon határozzuk meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre

a) $\dfrac{y-|x-4|}{(x-2)(y-2)}\geq 0;$ *b)* $\dfrac{|x|}{x}-\dfrac{y}{|y|}=0.$

5. Egy négyzet középpontjának a koordinátái $(7;-4)$. A középpontból az egyik oldal felezőpontjába mutató vektor koordinátái $(-10;4)$. Írja fel a négyzet csúcsainak a koordinátáit!

6. A négyzet oldalainak felezőpontjait az ábrán látható módon összekötöttük a csúcsaival. A négyzet területének hányadrészét színeztük be?



7. Van-e olyan tetraéder, amely minden oldalának mérőszáma különböző egész szám.

Megoldások

1. Ezekből a számjegyekből nem képezhető páratlan négyzetszám. (3, 7 nem szerepelhet négyzetszám egyesei helyén, az 5 végződésűek tízesei helyén 25 áll, de 2-esünk nincs.) A lehetséges négyzetszámok tehát oszthatók 4-gyel. Ezek 36-ra, 56-ra, 64-re vagy 76-ra végződhetnek.

A 3-mal osztható négyzetszámok 9-cel is oszthatók. Ilyen csak a 3, 4, 5, 6 számjegyekből készülhet. A lehetséges négyzetszámok: 5436, 4536; 3456, 4356; 3564, 5364. A 36-od részük: 151, 126, 96, 121, 99, 149. Ezek közül csak a 121 négyzetszám, tehát 4356 is az. $4356 = 66^2$.

A 3-mal nem osztható négyzetszámok 3-as maradéka 1. A számjegyeink 3-as maradéka rendre 0, 1, 2, 0, 1, ezért az egyik 0 maradékú számjegyet kell kihagynunk. A 6-ot nem hagyhatjuk ki, az minden lehetséges páros négyzetszám végződésben szerepel. Tehát a 3-at hagyjuk ki.

A lehetséges esetek ezért: 4756, 7456; 5764, 7564; 4576, 5476. A nagyságrendjeik, utolsó számjegyeik alapján, illetve amiatt, hogy nem oszthatók 3-mal, a következő számok négyzeteiként jöhetnek szóba: 4576: 64, de $64^2 = 4096 < 4576$; 4756: –; 5476: 74, $74^2 = 5476$; 5764: –; 7456: 86, de $86^2 = 7396$; 7564: 88, de $88^2 = 7744$.

$74^2 = 5476$, $66^2 = 4356$.

2.

$$\frac{\left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{64}{729}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{3}\right)^{9}}{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}.$$

3. $\sin 2x + \cos 2x = 1 + 2\operatorname{tg} x$ átalakítva: $2\sin x\cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\frac{\sin x}{\cos x}$.
Egyszerűsítve és $\cos x$-szel beszorozva ($\cos x \neq 0$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$):

$$2\sin x\cos^2 x = 2\sin^2 x\cos x + 2\sin x.$$

1. lehetőség: $\sin x = 0$, $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

2. lehetőség: $2\sin x \neq 0$, $\sin x$-szel osztva és átrendezve:

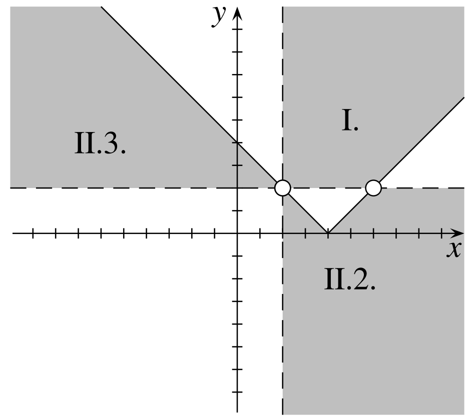
$$\cos^2 x - \sin x\cos x - 1 = 0.$$

Azaz $\cos^2 x - \sin x\cos x - \sin^2 x - \cos^2 x = 0$. Ebből $\sin x\cos x + \sin^2 x = 0$, $\sin x(\cos x + \sin x) = 0$. Mivel most $\sin x \neq 0$, $\cos x + \sin x = 0$, azaz $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

4. *a)* $\frac{y - |x-4|}{(x-2)(y-2)} \geq 0$. A kifejezés értelmetlen, ha $x = 2$ vagy $y = 2$.

A számláló (és így az egész kifejezés) akkor és csak akkor 0, ha $y = |x-4|$ ennek a függvények a pontjai $x \neq 2$, $y \neq 2$ esetén a keresett halmazhoz tartoznak.

A kifejezés egyebekben akkor pozitív, ha a három kifejezés $(y-|x-4|$, $(x-2)$ és $(y-2))$ közül páros sok negatív.



I.: Mindegyik pozitív, ha $x > 2$, $y > 2$, $y > |x-4|$.

II. Egy pozitív:

1.: $y > |x-4|$, $x < 2$, $y < 2$ (üres halmaz).

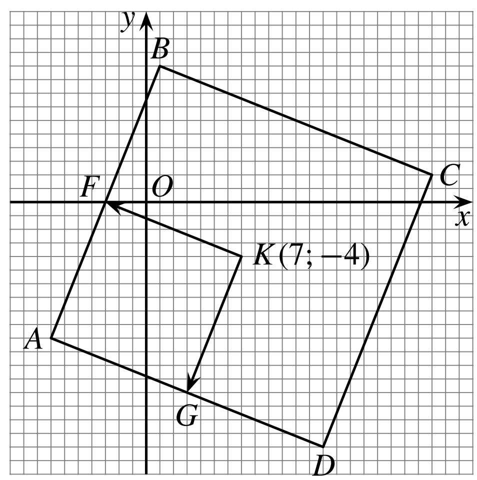
2.: $x > 2$, $y < |x-4|$, $y < 2$.

3.: $y > 2$, $y < |x-4|$, $x < 2$.

b) Minden nem nulla a valós számra $\dfrac{a}{|a|} = \dfrac{|a|}{a} = \operatorname{sgn} a$, tehát az egyenlőség azokra az (x, y) pontpárokra teljesül, amelyekre $x \neq 0 \neq y$ és $\operatorname{sgn} x = \operatorname{sgn} y$, vagyis a koordináta-rendszernek a tengelyeket nem tartalmazó I-es és III-as síknegyede.

5. *Első megoldás.* Használjuk az ábra jelöléseit. $\overrightarrow{KF}(-10; 4)$; és mivel $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KF}$, ezért $F(-3; 0)$. Az egyik szomszédos oldal felezőpontjába mutató $\overrightarrow{KG}$-t a $\overrightarrow{KF}$ vektorból $+90°$-os elforgatással kapjuk: $\overrightarrow{KG}(-4; -10)$.

Mivel $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KG}$, ezért $\overrightarrow{KA}(-14; -6)$, így az $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}$ összegből $A(-7; -10)$. Hasonló módon $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{KA}$, ebből $C(21; 2)$.



A B pont A-nak F-re vonatkozó tükörképe: $B(1; 10)$;

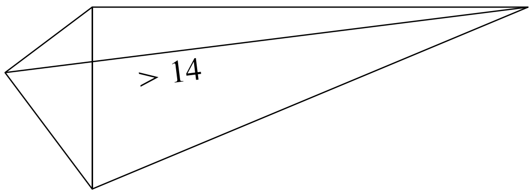
a D pont B-nek K-ra vonatkozó tükörképe: $D(13; -18)$.

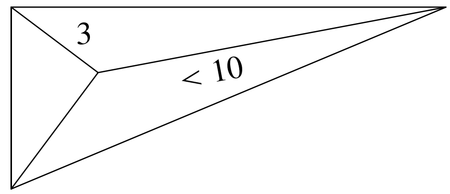
Második megoldás. A keresett négyzet AB oldalának egy $\mathbf{v}$ irányvektora merőleges a $\overrightarrow{KF}(-10; 4)$ vektorra, azaz $\mathbf{v}(4; 10)$. Mivel $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KF}$, ezért $F(-3; 0)$. Az AB oldalegyenes egyenlete $\mathbf{v}$ és F adataival $5x - 2y = -15$. Az AD oldalegyenes egy irányvektora $\mathbf{w}(-10; 4)$, egy pontja $G(3; -14)$, mert $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KG}$ és $\overrightarrow{KG}(-4; -10)$, így AD egyenlete $2x + 5y = -64$. A két egyenes A metszéspontjának koordinátái $A(-7; -10)$. A B pont A-nak az F-re vett tükörképe $B(1; 10)$, a D pont A-nak a G-re vett tükörképe $D(13; -18)$, a C pont az A-nak a K-ra vett tükörképe $C(21; 2)$.

Megjegyzés. A csúcspontok koordinátái más sorrendben és két-két oldalegyenes metszéspontjaként is kiszámíthatók.

6. $\frac{1}{5}$.

7. Keressünk két pitagoraszi számhármast, amelyekben van közös szám, pl. 3, 4, 5 és 5, 12, 13. Illesszük egymáshoz a két háromszöget a síkban az egyenlő oldalaik mentén. Többféle elhelyezkedés lehetséges, kettőt láthatunk az ábrán.





Egyik esetben a kapott négyszög hosszabbik átlója valamivel kisebb, mint 15, de nagyobb, mint 14 ($\approx 14{,}5$), a másik esetben nagyobb, mint 9, de kisebb, mint 10 ($\approx 9{,}77$). (Pl. szinusz-tételből.) Ezért amikor egymáshoz közelítjük az átlós pontokat a térben („összehajtjuk" a négyszöget), az összekötő szakasz lehetséges egész értékei 14, 13, 12, 11 és 10. Ezek közül 12 és 13 nem lehet, mert olyan hosszúságaink már vannak. Megfelel a 14, a 11 és a 10.