1. feladatsor

1. Az 1, 3, 5, 6 számjegyekből tízes számrendszerbeli négyjegyű természetes számokat készítünk.

Adjon minél jobb becslést arra, hogy az így keletkezett számok között hány négyzetszám van, ha

a) a számjegyek mind különbözőek;
b) a négyjegyű számban pontosan 2 darab 1-es számjegy és még két különböző számjegy van!

2. Számítsa ki az alábbi kifejezés pontos értékét!

$$\left(\frac{16^{\frac{3}{4}}+8^{\frac{2}{3}}}{16^{\frac{3}{4}}-8^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

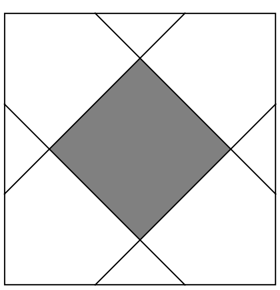
$$\sin^2 x+\cos^3 x=\cos^2 x+\sin^3 x$$

4. Az xy derékszögű koordináta-síkon határozza meg azoknak a pontoknak a halmazát, amelyekre

a) $\dfrac{y-|x|}{(x-1)(y-2)}\geq 0$; *b)* $\dfrac{x}{|x|}+\dfrac{y}{|y|}=0$.

5. A koordináta-rendszer pozitív térnyolcadában elhelyezünk egy egységnyi élű kockát úgy, hogy annak egyik csúcsa az origóba esik, az élei pedig párhuzamosak a tengelyekkel. Határozza meg azon gömb középpontjának koordinátáit és sugarát, amely érinti az xy síkot a kocka erre a síkra eső lapján, és amelyen rajta van a kocka szemközti lapjának négy csúcs.

6. A négyzet oldalainak harmadolópontjait az ábrán látható módon összekötöttük. A négyzet területének hányadrészét színeztük be?



7. Keressen olyan háromszöget, amelynek minden oldala és minden magassága mérőszáma egész szám.

Megoldások

1. *a)* Az adott számokból ismétlés nélkül készíthető négyjegyű számok mindegyike osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel, ami azt jelenti, hogy egyik sem lehet négyzetszám, mert a 3-mal osztható négyzetszámok 9-cel is oszthatók.

b) 3-ra nem végződhet négyzetszám, az 5-re végződőek pedig 25-re végződnek, ezért esetünben a négyzetszámok 1-re vagy 6-ra végződnek.

A négyzetszámok 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot adhatnak. Így csak a 16, 61, 36, 56 végződésű számok jönnek szóba. A keresett négyzetszámok három jegye 1, 1, 6.

A négyzetszámok 9-cel osztva 1, 4, 0, 7 maradékot adhatnak. $1 + 1 + 3 + 6 = 11$, ez 2, nem lehetséges; $1 + 1 + 5 + 6 = 13$, ez 4 maradékot ad 9-cel osztva.

A lehetséges négyzetszámok az 1, 1, 5, 6 számjegyekből állnak. Az 1156, 1516, 1561, 5116 számok jöhetnek szóba.

$35^2 = 1225$, $40^2 = 1600$, ezért a nagyságrendet és a végződést tekintetbe véve sem 1561, sem 1516 nem lehet négyzetszám.

$70^2 = 4900$, ezért 5116 (a végződését figyelembe véve) legalább 74 négyzete kellene legyen, de az ennél jóval nagyobb.

$30^2 = 900$, ezért 1156 (a végződését tekintetbe véve) legalább 34-nek a négyzete kell legyen, és ez valóban az is.

2. $\left(\dfrac{16^{\frac{3}{4}} + 8^{\frac{2}{3}}}{16^{\frac{3}{4}} - 8^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

3. Átrendezve az egyenletet: $\sin^2 x - \cos^2 x = \sin^3 - \cos^3 x$,

$$(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x).$$
$$(\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x).$$

1. lehetőség: $\sin x - \cos x = 0$, azaz $\sin x = \cos x$, $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

2. lehetőség: $\sin x - \cos x \neq 0$, ekkor oszthatunk vele:

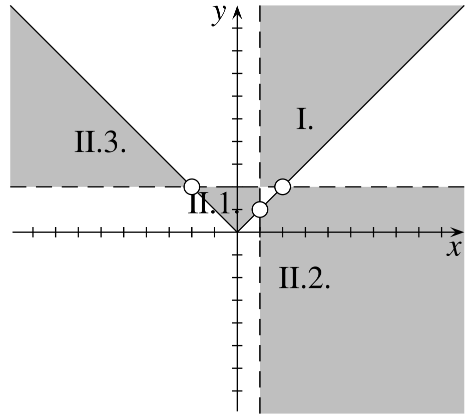
$$\sin x + \cos x = 1 + \sin x \cos x.$$

Átrendezve $\sin x + \cos x - \sin x \cos x - 1 = 0$, $(1 - \sin x)(1 - \cos x) = 0$, Ekkor lehet $\sin x = 1$, $x = (2k + 1)\pi$, és lehet $\cos x = 1$, $x = 2k\pi$.

A megoldások: $k\pi$, illetve $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

4. *a)* $\dfrac{y - |x|}{(x - 1)(y - 2)} \geq 0$. A kifejezés értelmetlen, ha $x = 1$ vagy $y = 2$.

A számláló (és így az egész kifejezés) akkor és csak akkor 0, ha $y = |x|$ ennek a függvények a pontjai $x \neq 1$, $y \neq 2$ esetén a keresett halmazhoz tartoznak.



A kifejezés egyebekben akkor pozitív, ha a három kifejezés ($y - |x|$, $(x - 1)$ és $(y - 2)$) közül páros sok negatív.

I.: Mindegyik pozitív, ha
$x > 1$, $y > 2$, $y > |x|$.

II. Egy pozitív:

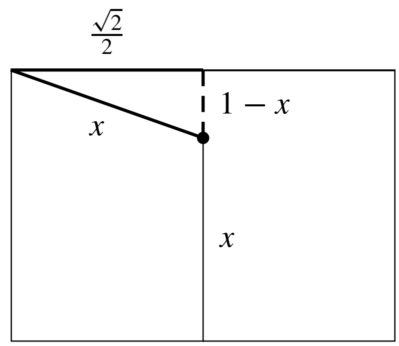
1.: $y > |x|$, $x < 1$, $y < 2$.

2.: $x > 1$, $y < |x|$, $y < 2$.

3.: $y > 2$, $y < |x|$, $x < 1$.

b) Minden nem nulla a valós számra $\dfrac{a}{|a|} = \operatorname{sgn} a$, tehát az egyenlőség azokra az (x, y) pontpárokra teljesül, amelyekre $x \neq 0 \neq y$ és $\operatorname{sgn} x = -\operatorname{sgn} y$, vagyis a koordináta-rendszernek a tengelyeket nem tartalmazó II-es és IV-es síknegyede.

5. Szimmetria okokból a kocka xy síkon nyugvó érintési pontja a $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ koordinátájú pont, a kocka $(0; 0; 1)$; $(0; 1; 1)$; $(1; 1; 1)$; $(1; 0; 1)$ pontjai illeszkednek rá.



Készítsük el a kocka átlósík metszetét! A $(0; 0; 0)$; $(0; 0; 1)$; $(1; 1; 0)$; $(1; 1; 1)$ pontok téglalapot határoznak meg, amelyben az ábra szerint található a gömb középpontja. x a gömb sugara. Az ábrában kiemelt derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt azt kapjuk, hogy $x = \dfrac{3}{4}$. A gömb sugara tehát $\dfrac{3}{4}$. Középpontjának koordinátái $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$

6. $\dfrac{2}{9}$ rész.

7. Egy pitagoraszi derékszögű háromszögnek minden oldala egész szám. Két magassága egybeesik két oldallal. A háromszög kétszeres területe egész szám. Ha a háromszöget alkalmasan nagyítjuk, biztosan egész lesz az átfogóhoz tartozó magasság is (ab/c). Ha minden oldalt c-szeresre nagyítunk, ez a magasság $acbc/c^2 = ab$. Pl.: a 3, 4, 5 oldalú háromszög 5-szöröse: 15, 20, 25. Területe kétszerese: $15 \cdot 20 = 300$, az átfogóhoz tartozó magassága $300 : 25 = 12$.