Matematika szintfelmérő megoldás fizika Bsc szakosoknak
ELTE TTK 2006. 09. 04.

1.Számítsa ki az alábbi kifejezések pontos értékét!

a) $\sin\left(\frac{3\cdot 2^{1000}+1}{3}\cdot\pi\right)$ 4 pont

b) $\log_{10}(0{,}1^{2006})$ 4 pont

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, részpont: 2; b) -2006, nincs részpont

2. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenséget! $\frac{x+2}{3-x}\leq 0$ 9 pont

$x\neq 3$. Ez az egyenlőtlenség ekvivalens az $\frac{x+2}{x-3}\geq 0$ egyenlőtlenséggel. Tetszőleges x szám esetén $x-3<x<x+2$, ezért a tört csak úgy lehet pozitív, ha a kisebbik érték is pozitív: $x>3$ vagy ha a nagyobbik érték is negatív: $x\leq -2$.

Részpont: értelemszerűen

3. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán! $\cos x+2\operatorname{tg} x=\frac{7}{4\cos x}$ 11 pont

Az egyenlet $\cos x\neq 0$ feltétel mellett az ekvivalens $\sin^2 x-2\sin x+\frac{3}{4}=0$ alakra hozható, (5 pont) amelynek megoldására a $\sin x=\frac{1}{2}$, azaz $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ és $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, illetve a $\sin x=\frac{3}{2}$ – amelynek nincs megoldása – gyökök adódnak. (6 pont)

4. Egy 500m széles folyó sebessége $3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Csónakkal akarunk átjutni a túlsó partra. Csónakunkkal állóvízben $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ sebességgel tudunk haladni.

a) Milyen irányban kell eveznünk, ha éppen szemközt akarunk kikötni a túlsó parton?
b) Mennyivel lejjebb fogunk megérkezni a túlsó parton, ha a folyó sodrási irányára merőleges irányban evezünk? 12 pont

$3{,}6\ \frac{\text{km}}{\text{h}}=1\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ A csónak sebessége a víz sebességének 3-szorosa.

a) Egy derékszögű háromszög átfogójának irányában kell evezni, a merőlegestől kb. 19°-os szöggel kell eltérni „felfelé", az átfogó 3 egység (a csónak sebessége), rövidebbik befogója 1 egység (a folyó sebessége)(6 pont)
b) A csónak egy olyan derékszögű háromszög átfogója mentén mozog, amelynek befogói aránya 3 (a csónak sebessége) az 1-hez (a víz sebessége), a hosszúságuk 500 méter és így $\frac{500}{3}$ méter. Ennyivel lejjebb fogunk kikötni. (6 pont)

5. Öt tanuló: Ági, Béla, Ede, Gabi és Feri két koncertjegyet nyert. Kisorsolják, hogy ki kapja meg. Az egy-egy cédulára írt öt nevet bedobják egy kalapba, és kihúznak belőle kettőt visszatevés nélkül. Mi a valószínűsége, hogy Ági és Béla kapja a két jegyet? 9 pont

Az öt névből a kettőt $\binom{5}{2}=10$-féleképpen választhatjuk ki, (8 pont) ebből 1 lehetőség a megfelelő. A kívánt kiválasztás valószínűsége $0{,}1$. (3 pont)

6. Egy 165 cm hosszú, 120 cm széles fürdőszoba padlóját négyzet alakú járólapokkal akarjuk burkolni. A lapok be kell, hogy fedjék az egész aljzatot. Legfeljebb hány cm lehet a járólap éle? (Az él hossza centiméterben mérve egész szám.) 10 pont

A járólap centiméterekben kifejezett mértéke 165-nek és 120-nak is az osztója. A legnagyobb közös osztójuk a 15. Ennél nagyobb nem lehet a járólap oldalhosszúsága.
Nincs részpont

7. Egy háromszög alakú telek területe $235{,}75\ \text{m}^2$, két oldala 41 m, illetve 230 dm.
a) Mekkora lehet a két oldal által bezárt szög?
b) Mennyi kerítés kell a telek körbekerítéséhez? 12 pont

$230\ \text{dm} = 23\ \text{m}$, a háromszög területe két oldal és a közrezárt szög segítségével:

$\frac{41\cdot 23\cdot \sin\gamma}{2} = 237{,}75\ \text{m}^2$. Ebből $\sin\gamma = \frac{1}{2}$, azaz $\gamma = 30^\circ$ vagy 150°. (6pont)

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tehát a harmadik oldal hosszúsága az egyik esetben:

$\sqrt{41^2+23^2-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 41\cdot 23} \approx 24$, a másik esetben $\sqrt{41^2+23^2+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 41\cdot 23} \approx 62$. Vagyis a kerület a két esetben kb. 88, illetve 126 méter. (6 pont)

8. a) Határozza meg az egyenlő szárú derékszögű háromszög súlypontjának koordinátáit, ha az átfogó végpontjainak koordinátái $A(0;1)$ és $B(-8;7)$!
b) Írja fel a körülírt kör A pont beli érintőjének az egyenletét!
c) Mekkora a háromszög területe? 15 pont

c) A két pont távolsága 10. Ezért a háromszög területe 25 területegység. (5 pont)
b) A körülírt kör A-beli érintője merőleges az AB szakaszra és átmegy A-n, egyenlete például: $3y-4x=3$. (5 pont)

a) A háromszög súlypontja kétféleképpen helyezkedhet el: az AB szakasz középpontjától $\frac{5}{3}$ egységnyire, a szakaszra merőleges egyenesen. A középpont $(-4;4)$, a merőleges egyenesnek az egyenlete például: $-4x+3y=28$. Normálegyenlete $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=\frac{28}{5}$. A lehetséges súlypontok koordinátája $\left(-3;\frac{16}{3}\right)$, illetve $\left(-5;\frac{8}{3}\right)$.(5 pont)

9. A föld felszínéről kilőtt lövedék levegőben megtett röppályáját az $f(x)=x-0{,}1x^2$ függvény grafikonja írja le. (A függvény a felszíntől mért magasságot adja meg a vízszintes elmozdulás függvényében.) A lövedék éppen a tervezett célban csapódik a földbe.
a) Mi az f függvény – fizikai tartalomnak megfelelő – értelmezési tartománya?
b) Mekkora a lőtávolság?

c) Mekkora a lövedék által elért legnagyobb magasság?
d) Ábrázolja az f függvényt! 14 pont

a) $10 \geq x \geq 0$; (4 pont)
b) 10 méter. (3 pont)
c) Az $x = 5$ pontban 2,5 méter. (4 pont)
d) (3 pont)