1. feladat:

Szorozzuk meg az első egyenlet mindkét oldalát x-szel, a másodikét y-nal! A kapott egyenletek:

$$3 - 2xy = x; \qquad 3 - 2xy = 3y.$$

Kivonva az egyenletek megfelelő oldalait: $x = 3y$.

Ezt az előző egyenletek valamelyikébe helyettesítve átalakítás után a $2y^2 + y - 1 = 0$ egyenletet kapjuk. Az egyenlet gyökei: $y_1 = \frac{1}{2}$, $y_2 = -1$; a hozzájuk tartozó x értékek: $x_1 = \frac{3}{2}$, $x_2 = -3$.

Az egyenletrendszer megoldásai tehát a $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $(-3; -1)$ számpárok, és ezek kielégítik az adott egyenletrendszert.

2. feladat:

a) Az adott egyenlet minden valós x-re értelmezve van. Vezessük be az $a = \frac{9^x}{4^x} = \left(\frac{9}{4}\right)^x$ jelölést. Ezzel egyenletünk az

$$a + \frac{1}{a} = \frac{13}{6},$$

vagyis a

$$6a^2 - 13a + 6 = 0$$

alakot veszi fel. Ennek gyökei: $a_1 = \frac{3}{2}$, $a_2 = \frac{2}{3}$. Ez azt jelenti, hogy egyrészt $\left(\frac{9}{4}\right)^{x_1} = \frac{3}{2}$, másrészt $\left(\frac{9}{4}\right)^{x_2} = \frac{2}{3}$. Ezekből $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, és ezek valóban kielégítik egyenletünket.

b) Az egyenletnek nincs értelme, ha $x = -\frac{2}{3}$. Vezessük be a $b = \frac{2x^2 + 4}{3x + 2}$ jelölést. Ezzel egyenletünk $b + \frac{1}{b} = \frac{13}{6}$ alakú, vagyis ugyanolyan alakú, mint az *a)*-ban kapott egyenlet, ezért gyökei azonosak az *a)* egyenletnél kapott értékekkel, nevezetesen $b_1 = \frac{3}{2}$, $b_2 = \frac{2}{3}$. Ebből b_1 értékét véve figyelembe

$$\frac{2x^2 + 4}{3x + 2} = \frac{3}{2},$$

átalakítva: $4x^2 - 9x + 2 = 0$. Ennek gyökei: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{4}$, és ezek kielégítik a *b)* egyenletet.

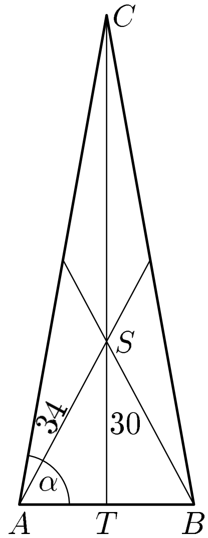
A b_2 értéket véve figyelembe

$$\frac{2x^2 + 4}{3x + 2} = \frac{2}{3},$$

átalakítva: $3x^2 - 3x + 4 = 0$. Ennek az egyenletnek nincs valós gyöke, mert diszkriminánsa negatív.

3. feladat:

Legyen az ABC egyenlő szárú háromszög alapja AB, súlypontja S, az alap felezőpontja T (*ábra*). Mivel a szárakhoz tartozó súlyvonalak egyenlők, ezek hossza 51, és az alaphoz tartozó súlyvonal: $CT = 90$. A súlypont harmadolja a súlyvonalakat, ezért az ATS derékszögű háromszögben: $ST = 30$, $SA = 34$.



Az ATS háromszögre alkalmazva Pitagorasz tételét, azt kapjuk, hogy

$$AT = \sqrt{SA^2 - ST^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16,$$

ezért $AB = 32$. Az ATC derékszögű háromszögből

$$AC = \sqrt{AT^2 + CT^2} = \sqrt{16^2 + 90^2} = 91,41.$$

Ugyanebből a háromszögből

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{90}{16} = 5,625, \quad \text{ezért} \quad \alpha = 79,92^\circ.$$

A szárak szöge: $\gamma = 180^\circ - 2\alpha = 20,16^\circ$.

4. feladat:

A feltételek szerint $a_2 = 3$, $a_n = 3q^{n-1} = 13$, továbbá

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3q} + \frac{1}{3q^2} + \ldots + \frac{1}{3q^{n-1}} = 8.$$

Közös nevezőre hozva és 3-mal átszorozva

$$\frac{q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + q + 1}{q^{n-1}} = 24.$$

Ebből az első n elem s_n összege

$$s_n = 3(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) = 3 \cdot 24 \cdot q^{n-1} = 24 \cdot 3q^{n-1} = 24 \cdot 13 = 312.$$

5. feladat:

Első megoldás. Az

$$x^2 + y^2 + 2x \leq 1,$$
$$x - y + a = 0$$

egyenletrendszer második egyenletéből fejezzük ki pl. y-t, helyettesítsük az első egyenletbe, és rendezzük! Ekkor

$$2x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 \leq 0. \tag{1}$$

A bal oldalon alakítsunk ki teljes négyzetet:

$$\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{a^2-1}{2} \leq 0,$$

vagy

$$\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{a^2-2a-3}{4} \leq 0.$$

Miután a feladat szövege egyetlen x értéket követel, ez akkor és csak akkor lehetséges, ha a bal oldalon álló másodfokú függvény teljes négyzet, vagyis ha a második tag 0, vagyis ha $a^2 - 2a - 3 = 0$. Ebből $a_1 = 3$, $a_2 = -1$.

Ha $a_1 = 3$, akkor az $\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 = 0$ egyenletből (a bal oldal negatív nem lehet!) $x_1 = -2$ és ezzel $y_1 = 1$.

Ha $a_2 = -1$, akkor az $\left(x + \frac{a+1}{2}\right)^2 = 0$ egyenletből $x_2 = 0$ és ezzel $y_2 = -1$.

Ha tehát $a = 3$, akkor az egyenletrendszer egyetlen megoldása a $(-2; 1)$ számpár, ha $a = -1$, akkor a $(0; 1)$ számpár.

Megjegyzés. Az (1) egyenlőtlenség bal oldalán álló másodfokú kifejezés olyan parabola egyenletét adja meg, amelynek tengelye az y tengellyel párhuzamos, és szárai „felfelé” nyílnak. Ennek akkor van egyetlen nem pozitív ordinátája, ha a parabola éppen érinti az x tengelyt, vagyis a másodfokú kifejezés diszkriminánsa 0. A

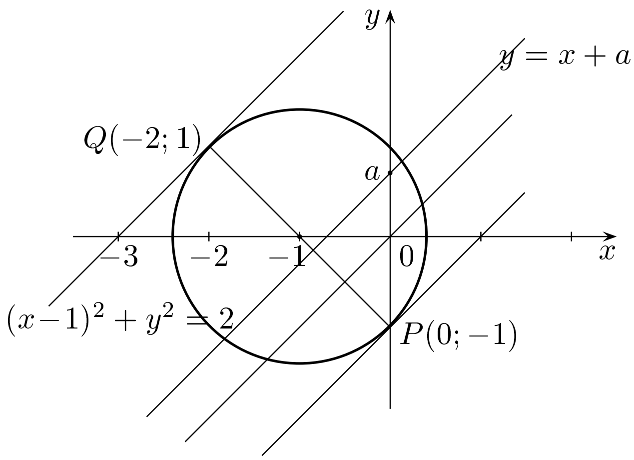
$$D = 4(a+1)^2 - 8(a^2 - 1) = 0$$

feltételből a megoldásban már megismert

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

egyenletet kapjuk.

Második megoldás. Az egyenlőtlenség-rendszer első egyenlőtlenségét $(x+1)^2 + y^2 \leq 2$ alakra hozva látható, hogy ezt a $K(-1; 0)$ középpontú, $\sqrt{2}$ sugarú körlemez pontjainak és csak ezeknek a koordinátái elégítik ki. Az $y = x + a$ alakú egyenletek azoknak az egyeneseknek az egyenlete, amelyeknek meredeksége 1, és az y tengelyt az a ordinátájú pontban metszik (*ábra*).



Az adott körlemezek és az a paramétertől függő egyenesnek akkor van egyetlen közös pontja, ha az egyenes érinti a körlemezt. A kör középpontján áthaladó és az $y = x + a$ egyenesekre merőleges átmérő két végpontjára, P-re és Q-ra illeszkedő $y = x - 1$, illetve $y = x + 3$ egyenletű egyenes a keresett két érintő.
Az érintők egyenletéből a keresett paraméterértékek $a_1 = -1$, $a_2 = 3$; a keresett számpárok az érintési pontok koordinátái: $P(0;-1)$, $Q(-2;1)$.

8. feladat:

Első megoldás. Alakítsuk át az

$$a + b + 20 = ab$$

egyenletet úgy, hogy a bal oldalon szorzat álljon! Ekkor

$$(a-1)(b-1) = 21,$$

ahol $21 = 1 \cdot 21 = 3 \cdot 7$. Mivel a és b szakaszok hosszát jelöli, negatív egész számokat nem vettünk figyelembe.
Ha $a - 1 = 1$, $b - 1 = 21$, akkor $a = 2$, $b = 22$, és ezekből, valamint a 21 hosszúságú szakaszból valóban szerkeszthető háromszög, mert a háromszög-egyenlőtlenség teljesül. A sorrend felcserélésével kapott $a = 22$, $b = 2$ és 21 is megoldás.
Ha $a - 1 = 3$, $b - 1 = 7$, akkor $a = 4$, $b = 8$, de ez nem felel meg, mert $4 + 8 = 12 < 21$, vagyis a háromszög-egyenlőtlenségség nem teljesül.

Második megoldás. Fejezzük ki az egyenletből például a-t:

$$a = \frac{b+20}{b-1} = 1 + \frac{21}{b-1}.$$

Mivel a pozitív egész, ezért $b - 1$ a 21 pozitív valós osztói közül kerülhet ki. A lehetséges értékek

$b-1$	1	3	7	21
b	2	4	8	22
a	22	8	4	2
$(a-1)(b-1)$	21	21	21	21

Az összetartozó számhármasok közül a háromszög-egyenlőtlenséget itt is csak az első és utolsó oszlopban állók elégítik ki, ezért ezek a megoldások.