Szempontok a feladatelemzéshez

I. A feladat megértése

Adatok, ismeretlenek azonosítása. Feladatok reprezentációja: ábra, táblázat, vázlat. Állítás szimbólumokkal való leírása. A feladatban előforduló fogalmakkal kapcsolatos definíciók, tételek felelevenítése, mobilizálása.

Előkészítő feladatsorozat tervezése

II. A megoldás ötletének megtalálása, megoldási terv készítése

Miről is van szó a feladatban? (Saját probléma megfogalmazás)
Hogyan tudnám saját szavaimmal megfogalmazni a problémát?
Hogyan tudom a problémát ismert fogalmak segítségével érthetőbben esetleg egyszerűbben megfogalmazni? Hogyan szemléltethető a probléma, illetve hogyan vázolható, ábrázolható másképpen? (heurisztikus segédeszközök)
Oldottam már meg hasonló problémá(ka)t? Hogyan? (Analógia elve)
Milyen részproblémákra bontható a probléma? (Felosztás elve)
Milyen már megoldott problémára tudom a probléma egyes részeit visszavezetni? (Visszavezetés elve)
Lehetséges a problémát specializálni? (Redukálás elve)
Milyen feladattípusról van szó?
Mire lehet a megadott adatokból következtetni? (Célirányos okoskodás)
Miből lehet a keresett mennyiséget meghatározni? Miből következik a bizonyítandó állítás?
Hogyan néznek ki a további lépéseim?

III. A megoldási terv végrehajtása

Várható tanulói hibák (típushibák) az alkalmazott algoritmusok, eljárások végrehajtásával kapcsolatban. Lépések jogosságának ellenőrzése. (Indoklások)

IV. Visszatekintés, reflexió

Diszkusszió, megoldások száma.
Az eredmények interpretálása, értelmessége.
Milyen új dolgot tanultam? A megoldási stratégia kiemelése.
Milyen hiányosságokat fedeztem fel a tudásomban?
Milyen új megoldási eljárást lehetett felismerni a megoldott problémával kapcsolatban?
Többféle megoldás lehetősége, megoldások összehasonlítása. (Felhasznált ismeretek mennyisége, bonyolultsága , az ötlet szokatlansága, mesterkéltsége)
Melyik megoldási mód illik legjobban a problémához?

A feladat megoldásával kapcsolatos személyes élményei, nehézségei. Hogyan jutott az AHA élményhez?

Egy feladat elemzése
(Minta)

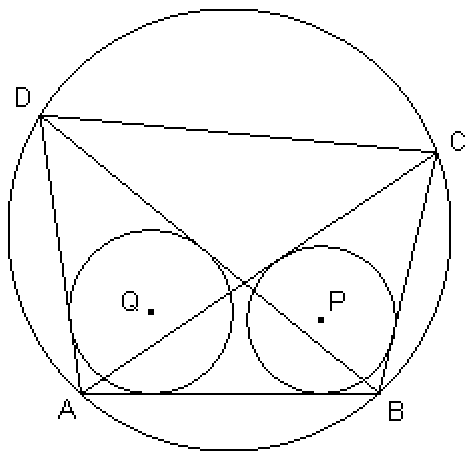
Feladat: ABCD húrnégyszögben az ABC háromszög beírható körének középpontja P, ABD háromszög beírható körének középpontja Q. Bizonyítsa be, hogy ABPQ négyszög húrnégyszög!

I. Feladat megértése

Helyes, átlátható rajz készítése. Jelölések. Állítás szimbólumokkal való felírása.

A feladatban előforduló fogalmakkal kapcsolatos definíciók, tételek felelevenítése, mobilizálása: húrnégyszög, húrnégyszögekre vonatkozó tétel és megfordítása, szögfelező, háromszögbe írható kör középpontjára vonatkozó tétel, kerületi szögek tétele, egy ívhez tartozó kerületi és középponti szögek tétele és megfordítása, a háromszög belső szögeinek összegére vonatkozó tétel.

1. ÁBRA



Előkészítő feladatsorozat

1. Egy háromszög egyik szöge 50^0. Határozza meg a másik két belső szög szögfelezője által bezárt szöget!
2. Egy háromszög egyik szöge α. Határozza meg a másik két belső szög szögfelezője által bezárt szöget!
3. Egy háromszög szögei α, β, γ . Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, melynek csúcspontjai a háromszögbe írt kör oldalakkal való érintési pontjai?
4. Adott körbe szerkesszünk adott egyenessel párhuzamos húrt, amelyhez egy előre adott kerületi szög tartozik.
5. Igazoljuk, hogy a trapézok közül csak a szimmetrikus trapéz húrnégyszög!
6. Egy háromszög egyik oldalán lévő magasságtalppontból bocsássunk merőlegest a másik két oldalra. Igazoljuk, hogy ezeknek talppontjai és a kiindulásul vett oldal két végpontja egy körön helyezkednek el!

II. A megoldás ötletének megtalálása, megoldási terv készítése

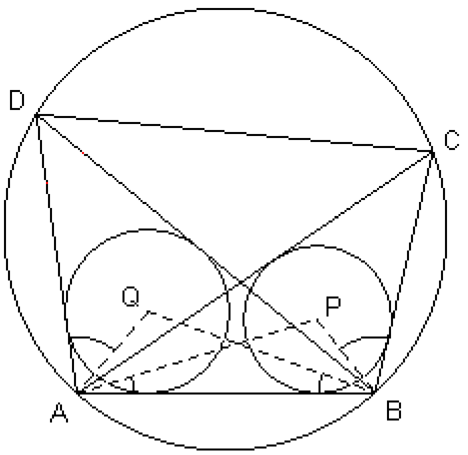
A bizonyítás alapkérdése: *Hogyan mutatható meg egy négyszögről, hogy húrnégyszög?*

<u>I. próbálkozás</u>: Természetesnek tűnik a húrnégyszög tétel megfordításának alkalmazása: *Ha egy négyszög szemközti szögeinek összege 180^0 , akkor az húrnégyszög.*

A szemközti szögpárok egyikére próbálhatjuk megmutatni, hogy a szögeik összege 180^0. Fölhasználhatjuk az eredeti kör középpontját, egyenlő íveken nyugvó kerületi szögeket, középponti szöget, szögfelezőt, háromszög belső szögeinek összegére vonatkozó összefüggést. Váltogatva a szögpárokat, esetleg tíz próbálkozás sem vezet eredményre.
II.próbálkozás: Egyszerre csak beugorhat, hogy azt kell megmutatni, hogy a négy szóban forgó pont egy körvonalon helyezkedik el. Ami megmutatható például úgy, hogy az AB szakasz a P illetve Q pontokból ugyanakkora szögben látszik. (P és Q pontok rajta vannak az AB szakasz egy bizonyos szögű látókörívén)

III. Megoldási terv végrehajtása

II. ÁBRA



Az ábra alapján leolvasható, hogy $\alpha + \beta_1 = \alpha_1 + \beta$ mert az AB szakasz a D illetve C pontból ugyanakkora szögben látszik(egy íven nyugvó kerületi szögek, a háromszög további két belső szögének összege is megegyezik.)

$AQB\angle = 180^0 - \alpha/2 - \beta_1/2$

$APB\angle = 180^0 - \alpha_1/2 - \beta/2$

$AQB\angle = APB\angle$

III. Visszatekintés, reflexió.

A megoldás fő ötletének kiemelése: *Egy négyszög húrnégyszög voltát úgy is be lehet bizonyítani: megmutatjuk, hogy a négy pont egy körvonalon helyezkedik el. Ezzel egyenértékű ha megmutatjuk, hogy két csúcspont által meghatározott szakasz a másik két csúcspontból ugyanakkora szögben látszik.*
Az alkalmazott stratégia *Vegyesen alkalmaztuk a Célirányos illetve Fordított irányú okoskodást. Az első kérdésünk: Miből következik az, hogy egy négyszög húrnégyszög? (Fordított irányú okoskodás) A húrnégyszög tétel megfordítása nem vezetett eredményre, de a másik lehetőség – a négy pont egy körön helyezkedik el – már sikeres próbálkozás volt. A megfelelő látószögek egyenlőségét a feltételekből vontuk le – Mi következik a feltételekből? . (Célirányos okoskodás)*
Feladatvariáció
A feladattal kapcsolatos rokon, analóg feladatok találhatók az Ambrus: Bevezetés a matematikadidaktikába c. jegyzetben a 131-132. oldalon. (Eötvös Kiadó 1995)

Egy feladat elemzése
(minta)

Feladat: **Adjuk meg a következő összeget zárt alakban:**

$$\frac{1}{2^2-1}+\frac{1}{4^2-1}+\ldots+\frac{1}{(2n)^2-1}$$

megoldás:

- megsejtjük, hogy az összeg minden n-re $\frac{n}{2n+1}$-gyel egyenlő
- sejtésünket teljes indukcióval igazoljuk

A feladat megértéséhez szükséges előzmények:

- a teljes indukció
- mit értünk egy összeg zárt alakján
- néhány nevezetes összeg (számtani, mértani sorozatok összege)
- nevezetes azonosságok ismerete
- parciális törtekre bontás

Előkészítő feladatok:

1. Számítsuk ki a következő összegeket, fogalmazzunk meg sejtést!

   a. 1=
   1+3=
   1+3+5=
   1+3+5+7=
   1+3+5+7+9=

   b. 1/2=
   1/2+1/4=
   1/2+1/4+1/8=
   1/2+1/4+1/8+1/16=

2. Előző sejtéseinket igazoljuk teljes indukcióval!

Úton a feladat megoldása felé:

- Miután megértettük a feladatot próbáljunk felidézni korábban megoldott hasonlóakat (pl. bevezető feladatok), s az ott bevált megoldási módot alkalmazzuk.
- Ha nincs ilyen emlékünk akkor alkalmazzunk heurisztikus stratégiát:
  - általános helyett a konkrét vizsgálata, ebből adódik a fenti megoldás
  - a feladat egyes részeire koncentrálva a nevezőkről látható, hogy szorzattá alakíthatók, majd ismét az egészet tekintve eszünkbe

jutnak a teleszkópikus összegek, ha már találkoztunk velük, s az ott megismert módszerrel “összecsukjuk a kifejezést”.

- Ha a teleszkópikus összeg nem ismert, akkor a nevező szorzat alakjából kiindulva próbálkozhatunk közös nevezőre hozással. Ezzel az egyrészt az összevonás felé haladunk, másrészt a közös nevező könnyen meghatározható, így ez a lépés kézenfekvőnek tűnik, ám a számláló felírásakor zsákutcába kerülünk. Ez az út is végigjárható, részletesen ld. a harmadik megoldásnál.

Más megoldások:

2. megoldás: A nevezőket szorzattá alakítva az egyes törtek kétszeresét két tört különbségére bonthatjuk:
$$\frac{2}{1\cdot 3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{3\cdot 5}=\frac{1}{3}-\frac{1}{5}$$
$$\ldots$$
$$\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}$$

Ezután az összeadást elvégezve a közbülső tagok kiesnek, így az összeg: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$

3. megoldás: A nevezők szorzattá alakítása után páronként hozzuk közös nevezőre a törteket,ekkor egy az előzőhöz hasonló törteket tartalmazó, de csak feleannyi tagból álló összeget kapunk. Ha ebben ismét páronként közös nevezőre hozunk, majd újra meg újra megismételjük ezt a lépést, eljuthatunk a keresett egytagú kifejezéshez.

A különböző megoldások összevetése:

A bevezető feladatok után az első megoldás a legtermészetesebb, ezt a módot válsztják a legtöbben, csaknem minden diák így próbálkozik.
Ha a bevezető feladatokat elhagyjuk (mert korábban már voltak hasonlóak), úgy a feladat megoldására nehezebb rájönni. Viszont az első megoldáson keresztül felhívhatjuk a figyelmet a konkretizálás fontos szerepére ill. megmutathatjuk, hogyan lehet hasonló problémákat keresni az emlékek között és hogyan használhatjuk azokat.
Ebben a megoldásban a teljes indukció ismerete fontos tényező, így a felhasznált matematikai eszköztár elég komoly, de szerencsére a teljes indukciónak egy könnyű, mondhatni iskolapéldája ez, az összegekre vonatkozó, így ez a megoldás segíti a teljes indukció fogalmának elmélyülését.

A második megoldás egy speciális feladattípusnál alkalmazható módszer, ha a tanulók már találkoztak vele, úgy a megoldás azon múlik, vajon felismerik-e az adott típusfeladatot.
Ha még nem ismerik ezt a módszert, akkor érdemes néhány hasonló feladaton keresztül megtanítani, de fontos, hogy az első megoldás is szerepeljen, hiszen

az általánosabban alkalmazható, ugyanakkor ez a módszer jóval egyszerűbb matematikára épül, ez a megoldás frappánsabb az előzőnél.

A harmadik megoldásnál a bizonyításban rejlik a legtöbb nehézség, ám a szabályszerűség felismerése a megoldás kulcsa. Ezt a felismerést a tanár kiprovokálhatja a tanulókból, de a jobb képességűek maguktól is kitalálhatják (célszerű a provokációt 2-hatvány elemszámmal kezdeni). Ez a megoldás igényli a legtöbb bátorságot, kezdeményezőkészség nélkül nem jutunk előre, viszont ehhez kell a legkevesebb előismeret, akár egészen korán is kitűzhetjük, persze a bizonyítás igénye nélkül.
Ami a bizonyítást illeti ezen a vonalon az nehezen kivitelezhető, de ha 2-hatvány elemszámra kialakul egy sejtés, azt általános esetre tudnánk indukcióval igazolni (a bizonyításnál a teljes indukció nehezen kerülhető el).

A feladat variálhatósága, általánosítás:

- A teleszkópikus összeg kapcsán sok hasonló feladat előjöhet
  Pl:
  $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=?$$
  $$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}=?$$
- Általában megfogalmazható, hogy mikor lehet ezt a módszert alkalmazni, ezzel a módszer lényegének megértését is segítjük.
- A későbbiekben a sorok határértékének kiszámításakor hasznosíthatjuk a feladatot.