Tipikus kérdések egy egyenlőtlenséggel kapcsolatban:

a) A változók mely értékeire igaz az állítás?

b) Mindig igaz az alaphalmazon az állítás?

Az a) esetben megoldjuk, míg a b)-ben igazoljuk az egyenlőtlenséget.

Miért éppen egyenlőtlenségek?

Az egyenlőtlenségek nemcsak a matematikában, hanem valós problémák megoldásánál is nagyon fontosak. A hétköznapi életben használunk olyan fogalmakat, mint maximális sebesség, minimális nyugdíj, minimális követelményszint stb. Egy a gyakorlatban előforduló mennyiség értéke csak nagyon ritkán határozható meg pontosan, ezért minden számítást, amely a mért értéken alapszik, ennek megfelelően korrigálni kell.

- Mit jelent W értékre vonatkozóan az a kijelentés, hogy „ΔW pontossággal mérhető”?

W érték eltérése a mért étéktől legfeljebb $|\Delta W|$, ez szemléletesen azt jelenti, hogy W valódi értéke a mért érték $|\Delta W|$ sugarú környezetén belül van.

Figyelem! Ilyen egyszerű kijelentéseknél gyakran követhetünk el gondolkodási hibát! A következő példa egy gondolkodási próba.

- Ki szeretnénk csempézni a fürdőszobát. Ehhez 1615 db csempére van szükség. A boltban közölték, hogy a csempék 5 %-os valószínűséggel hibásak. Hány csempét vásároljunk, hogy elég hibátlan legyen köztük?

Ha véletlenül 1695 db csempét akar venni, akkor gondoljon arra, hogy a pótdarabok között is lehetnek hibás csempék. Én legalább 1700 csempét vásárolnék. A következő módon számoltam: Legalább 1615 hibátlan csempére van szükségem. Ha x db csempét vásárolok, akkor ezek közül 95% hibátlan. Az $(x:100)\cdot 95 \geq 1615$ egyenlőtlenségből adódik az eredményem: $(1615:95)\cdot 100=1700$.

1.) Az $x \to \dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$ hozzárendelési szabállyal akarunk függvényt megadni.

Mely valós számok alkotják a lehető legbővebb értelmezési tartományt?

Mi ekkor az értékkészlet?

2.) Válassza meg a c állandó értékét úgy, hogy az $y \geq 2x-1$, $y \geq -x+5$ és $2y \leq x+4+c$ egyenlőtlenségekből álló egyenlőtlenségrendszernek pontosan egy (x,y) valós számpár tegyen eleget !

3.) Tegyük fel, hogy az x, y valós számokra teljesül az $y \geq 2x^2-4x+2$ egyenlőtlenség. E feltétellel mekkora lehet a $2x-y+2$ legkisebb és legnagyobb értéke?

4.) Oldjuk meg a valós számok körében a $\sqrt{x^2+x-2} \geq 6-2x$ egyenlőtlenséget.

5.) Tekintsük az $x^2-(a-1)x-a=0$ egyenletet.

a) Igazoljuk, hogy az egyenletnek az a paraméter minden valós értéke esetén van valós gyöke.

b) Az a mely értékénél lesz az egyenlet gyökeinek négyzetösszege a lehető legkisebb, és mekkora ez a minimum?

6.) Az $y=-x+6$ egyenletű egyenes mely pontja van egyenlő távolságra a $3x-4y=-12$ és a $3x-4y=8$ egyenletű egyenesektől?

7.) Az $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ egyenletű alakzat mely pontja van legközelebb a $3x+4y+12=0$ egyenletű egyeneshez? Mennyi ez távolság?

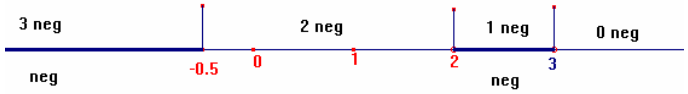
8.) Az $z=p-x^2$ egyenletű alakzat mely pontja van legközelebb az origóhoz?

9.) A valós számok halmazán oldja meg az $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$ egyenlőtlenséget.

10.) Oldja meg az $y+1/y=2\sin x$ egyenletet!

11.) Oldja meg a $-\sqrt{2}<\sin x+\cos x<\sqrt{2}/2$ egyenlőtlenséget.

12.) Oldja meg a $\frac{7}{x-3}<\frac{5}{x-2}$ egyenlőtlenséget. $\frac{7}{x-3}-\frac{5}{x-2}<0$ $\quad \frac{7(x-2)-5(x-3)}{(x-3)(x-2)}<0$ $\quad \frac{7x-14-5x+15}{(x-3)(x-2)}<0$ $\quad \frac{2x+1}{(x-3)(x-2)}<0$



MO: $x<-\frac{1}{2}$ vagy $2<x<3$

Megj.: A nevezőkkel nem szabad egyszerűen beszorozni, mert nem tudjuk, mikor lesz negatív!

Lineáris egyenlőtlenségek

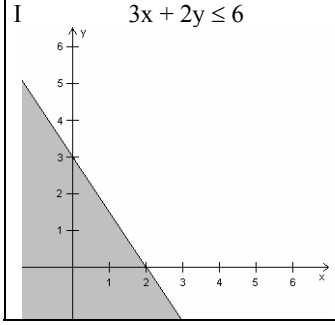
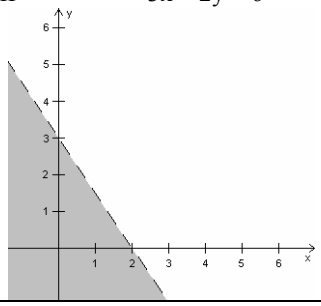
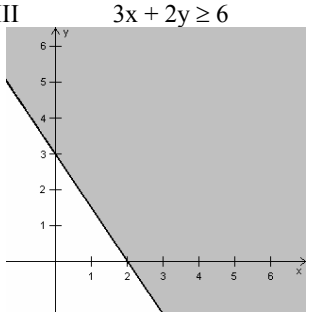
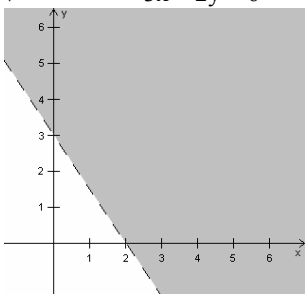
- Ábrázolja az $x+y=5$ egyenlet megoldáshalmazát. Ábrázolja az $x+y \leq 5$ és $x+y<5$ egyenlőtlenségek megoldáshalmazát. Hasonlítsa össze a megoldásokat!

MO: Az $x+y \leq 5$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát szeretnénk grafikusan ábrázolni. Az egyik lehetőség az, hogy az (x;y) rendezett párokat a derékszögű koordinátarendszer P(x;y) pontjaiként ábrázoljuk. A megfelelő pontok halmazát egyértelműen el akarjuk határolni a nem megfelelő pontoktól. Tudjuk, hogy az egyenlet megoldáshalmaza ebben az ábrázolásban egy egyenesnek felel meg. Egy rögzített x_0 értéknél az $y \leq 5-x_0$ egyenlőtlenséget kapjuk, és ez fennáll minden y értékre, amely nem nagyobb, mint $5-x_0$. Így a megoldáshalmazból egy „lefelé irányuló”, az y-tengellyel párhuzamos, nyílt félegyeneshez jutottunk. A félegyenesek kezdőpontja az $x+y=5$ egyenletű egyenesen van és a kezdőpont a megoldáshalmazhoz tartozik. Ha az x_0 befutja az x-tengelyt, akkor a félegyenesek egy félsíkot alkotnak. Az $x+y \leq 5$ egyenlőtlenség megoldáshalmazát azon pontokhoz tartozó rendezett párok határozzák meg, amelyek a határegyeneshez tartoznak vagy ezen egyenes alatt helyezkednek el.

Ha a két oldal egyenlőségét kizárjuk, ha tehát az $x + y < 5$ egyenlőtlenséget vesszük, így a határegyenes pontjaihoz tartozó értékpárok nincsenek benne a megoldáshalmazban. Ebben az esetben is a határegyenes segítségével határozzuk meg a megoldáshalmazt, a határegyenes szaggatott vonal, ezzel azt hangsúlyozzuk, hogy a pontjai nem tartoznak a megoldáshalmazhoz.

- Oldja meg az egyenlőtlenségeket:

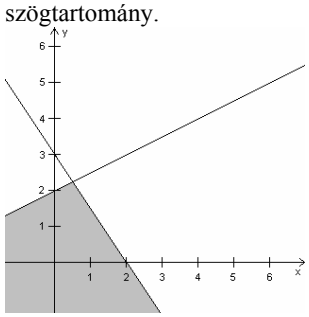
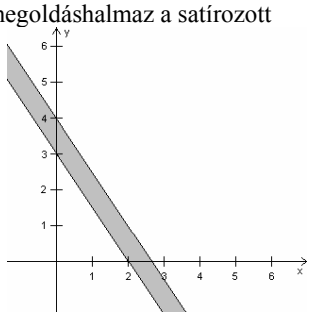
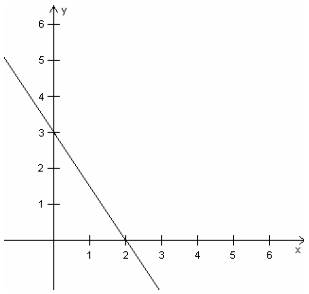
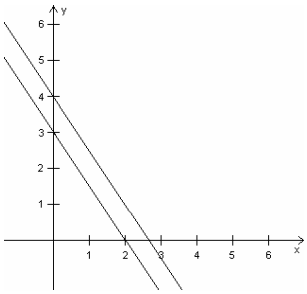
  $3x + 2y \le 6$ I $3x + 2y < 6$ II $3x + 2y \ge 6$ III $3x + 2y > 6$ IV
- Hasonlítsa össze a különböző egyenlőtlenségek megoldáshalmazát és állapítsa meg, melyek diszjunktak közülük. Képezze a metszet-, illetve az unióhalmazt!
- Keressen olyan párokat, amelyek átfedés nélkül és hiánytalanul lefedik az egész síkot.

I $3x + 2y \le 6$	II $3x + 2y < 6$	III $3x + 2y \ge 6$	IV $3x + 2y > 6$
			

Ha el akarjuk dönteni, hogy egy lineáris egyenlőtlenség megoldáshalmaza a határegyenes alatt vagy felett lévő értékpárokból áll-e, akkor elég, ha a határegyenesen kívül még egy pontot meghatározunk. Ha ez a pont az értelmezési tartományhoz tartozik, akkor a megoldáshalmaznak az a félsík felel meg, amely tartalmazza, ha a pont nincs benne az értelmezési tartományban, akkor a megoldáshalmazt a másik félsík ábrázolja.

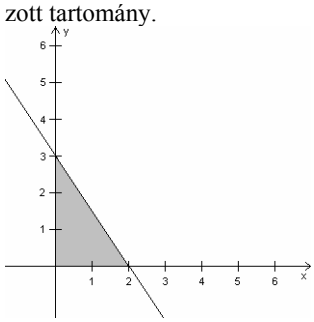
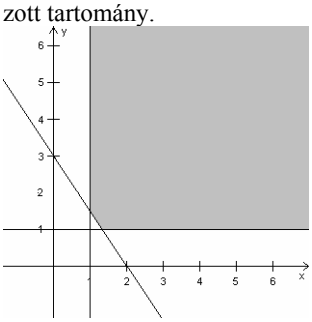
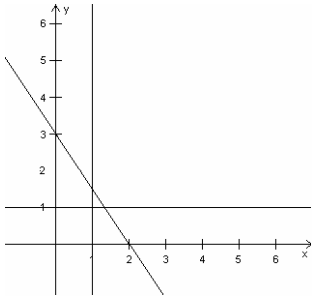
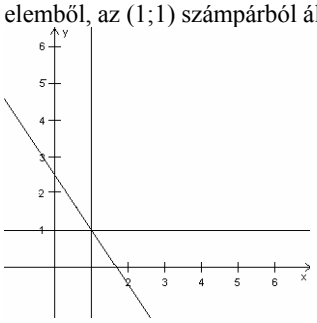
Lineáris egyenlőtlenségrendszerek

- Oldja meg az egyenlőtlenségrendszereket:

a) $3x + 2y \le 6$ I $-x - 2y \le 4$ II	b) $3x + 2y \ge 6$ I $3x + 2y \le 8$ II	c) $3x + 2y \le 6$ I $3x + 2y \ge 6$ II	d) $3x + 2y \le 6$ I $3x + 2y \ge 8$ II
A megoldáshalmaz a satírozott szögtartomány. 	A megoldáshalmaz a satírozott sáv. 	A megoldáshalmaz egy egyenes. 	A megoldáshalmaz az üres halmaz. 

Több egyenlőtlenség egyidejű teljesülését a megoldáshalmazok közös pontjainak vizsgálatával is ellenőrizhetjük.

- Oldja meg az egyenlőtlenségrendszereket:

a) $3x + 2y \le 6$ I $x \ge 0$ II $y \ge 0$ III	b) $3x + 2y \ge 6$ I $x \ge 1$ II $y \ge 1$ III	c) $3x + 2y \ge 6$ I $x \le 1$ II $y \le 1$ III	d) $3x + 2y \ge 5$ I $x \le 1$ II $y \le 1$ III
A megoldáshalmaz a satírozott tartomány. 	A megoldáshalmaz a satírozott tartomány. 	A megoldáshalmaz az üres halmaz. 	A megoldáshalmaz pontosan egy elemből, az (1;1) számpárból áll. 

- Milyen következtést vonhatunk le ezekből a példákból?

Egy kétváltozós lineáris egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmaza olyan rendezett számpárok halmaza, amelyek grafikusan a sík egy részhalmazaként ábrázolhatók. Az üres halmaz megoldáshalmazként olyan egyenlőtlenségrendszerhez tartozik, amely ellentmondásra vezet, azaz a feltételek soha nem teljesíthetők egyidejűleg. Ha a megoldáshalmaz az egész sík, akkor a kijelentés a változók értékétől függetlenül igaz.

Lineáris programozás

Egyenlőtlenségrendszereket gazdasági, technikai és közigazgatási problémáknál is alkalmaznak. Az eljárást, amelyet a következő példában ismerünk meg, „lineáris programozásnak” nevezik

Kérdésfeltevés:

- Egy gyárban gyümölcslékeveréket állítanak elő narancsléből és almaléből. Tartalmazzon minden üveg egy liter gyümölcslevet. Az ivólé lehetőleg legyen kedvező árú, de mindenképpen tartalmazzon egy meghatározott minimális tápanyagmennyiséget.

Legyen a gyümölcslében legalább 0,1 l almalé és 0,2 l narancslé, továbbá tartalmazzon legalább 240 kalóriát. 1 l almalében 300 kalória és 1 l narancslében 200 kalória van. Végül az ivólének legalább 128 térfogategységnyi C vitamint kell tartalmaznia. Legyen 1 l almalében 80, 1 l narancslében 160 térfogategységnyi C vitamin. 1 l almalé ára 120 Ft, 1 l narancsléé pedig 160 Ft.

Mennyi almalé és narancslé kerüljön az üvegekbe, hogy adott feltételek mellett lehetőleg olcsó gyümölcslé készüljön?

MM: Jelölje x az almalé, y pedig a narancslé literenkénti mennyiségét, amelyre egy üveg gyümölcsléhez van szükségünk.

- Gyűjtse össze egy táblázatban a probléma fontos összetevőit és matematikai megfogalmazásukat.

Fontos szövegrészletek	Matematikai megfogalmazásuk
A keveréknek tartalmaznia kell: a) legalább 0,1 l almalevet, b) legalább 0,2 l narancslevet, c) legalább 240 kalóriát (1 l almalében 300 kalória, 1 l narancslében pedig 200 kalória van), d) legalább 128 TE C vitamint (1 l almalében 80 TE, 1 l narancslében pedig 160 TE van), e) x és y nem negatív számok.	$x \geq 0{,}1$ $y \geq 0{,}2$ $300x + 200y \geq 240$ $80x + 160y \geq 128$ $x \geq 0,\ y \geq 0$
• Melyik célt akarjuk elérni? A gyümölcslének lehetőleg olcsónak kell lennie. 1 l almalé 120 Ft-ba, 1 l narancslé 160 Ft-be kerül.	$120x + 160y = z$ $z \to \min$

Az ennek a problémának megfelelő matematikai modell:

(1)	$x \geq 0,\ y \geq 0$				vagy	(1)	$x \geq 0,\ y \geq 0$				
(2)	x	$\geq$	$0{,}1$			(2)	x	$\geq$	$0{,}1$		
	y	$\geq$	$0{,}2$				y	$\geq$	$0{,}2$		
	$300x$	$+\ 200y$	$\geq$	240			$3x$	$+\ 2y$	$\geq$	$2{,}4$	
	$80x + 160y \geq 128$						$8x + 16y \geq 12{,}8$				
(3)	$120x + 160y = z$					(3)	$120x + 160y = z$				
(4)	$z \to \min$					(4)	$z \to \min$				

Ennél a problémánál a megengedett behelyettesítések halmazát (a célfüggvény értelmezési tartományát) a nem negativitási (1) és a korlátozó (2) feltételek együttesen határozzák meg. Ezért az (1)-ből és a (2)-ből alkotott egyenlőtlenségrendszer megoldáshalmazát ábrázoljuk.

A megengedett behelyettesítések halmazából, amelyet az ábrán a satírozott tartomány szemléltet, azt az értékpárt keressük, amelynél a $z = 12x + 16y$ függvény minimális értéket vesz fel.

Ha a z-t egy ismeretlen változónak tekintjük, akkor a $z = 12x + 16y$ (vagy átalakítva: $y = \frac{3}{4}x + \frac{z}{16}$) párhuzamos egyenesek egy seregét adja meg. Minden ilyen tulajdonságú egyenes meredekségére teljesül, hogy $m = \frac{3}{4}$.

Az y-tengelymetszetre teljesül, hogy $n = \frac{z}{16}$. Ha a tengelymetszet kicsi, akkor z is kicsi. Az optimális megoldást az az egyenes határozza meg, amelyre egyrészt $m = \frac{3}{4}$, másrészt az y-metszet lehetőleg kicsi, harmadrészt pedig legalább egy közös pontja van a megengedett megoldások halmazával.

A konstrukciónál először megrajzoljuk az egyenessereg egy tetszőleges elemét, legjobb, ha $z = 0$ esetet választjuk. Aztán olyan párhuzamost rajzolunk ezzel az egyenessel, amelynek az y-metszete lehetőleg kicsi, és amelynek még legalább egy közös pontja van a megengedett behelyettesítések halmazával. Így optimális helyként $(x ; y) = (0{,}4 ; 0{,}6)$-ot, optimális értékként pedig $z_{min} = 12 \cdot 0{,}4 + 16 \cdot 0{,}6 = 14{,}4$-et kapjuk. Tehát egy üveg gyümölcslének 0,4 l almalevet és 0,6 l narancslevet kell tartalmaznia, ha az árat lehetőleg alacsonyan akarjuk tartani.

További gyakorlat:

- Keressen olyan egyenlőtlenségrendszert, amelynek megoldáshalmaza az A(0;0), B(0;-2), C(3;3), D(5;3) zárt négyszög.
- Keressen olyan hétköznapi szituációkat, amelyek ezekkel az egyenlőtlenségekkel modellezhetők.

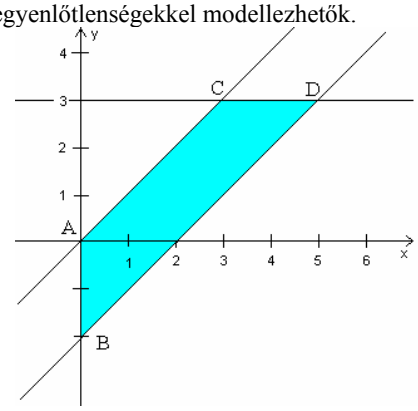
A gyakorlat megoldása:

$x \geq 0$ I

$y \leq 3$ II

$y \leq x$ III

$y \geq x - 2$ IV

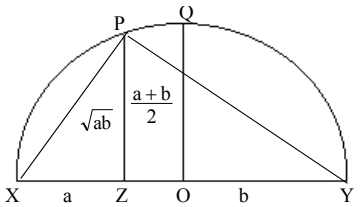


2: Egyenlőtlenségek igazolása
Tananyag: Harmonikus, mértani, ill. számtani közép felhasználása egyenlőtlenségek igazolására
Képzési cél: Becsléssel való pontosítás, a különböző megoldási utak összehasonlítása
A matematikában és a gyakorlati életben is gyakran alkalmazzuk a középértékeket. Hármat közülük egyéb egyenlőtlenségek igazolására is használhatunk.
Emlékeztető:
Legyen a és b két valós szám, amelyekre $0 < a \le b$. Az a és a b számtani A(a,b), mértani G(a,b) és harmonikus H(a,b) közepe definíció szerint:

$$A(a,b) = \frac{a+b}{2},\ G(a,b) = \sqrt{ab}\ \ \textit{ill.}\ \ H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$

A számtani és a mértani közép viszonya

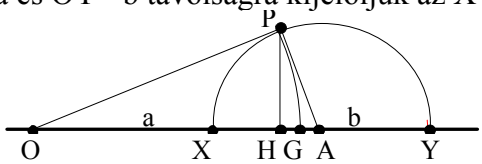
- *Igazolja a $G(a,b) \le A(a,b)$ egyenlőtlenséget.*



A geometriai bizonyítás leolvasható az ábráról: XZ = a, ZY = b, ebből következik, hogy XO = OY = OQ = A(a,b). Mivel P a körvonal egy pontja és PZ merőleges XY-ra, ezért XYP egy PZ magasságú, derékszögű háromszög. Ebből következően PZ = G(a,b) (a magasságtétel alapján). QO egy sugár, PZ pedig az egyik húr fele, így PZ ≤ QO teljesül és ez éppen a G(a,b) ≤ A (a,b) egyenlőtlenség.

- *Hova illeszthető be a harmonikus közép a $G(a,b) \le A(a,b)$ egyenlőtlenségbe?*

Ha a = b, akkor az értékek egyenlők. Ha a < b, akkor elemi geometriai úton bizonyítunk: Egy O kezdőpontú félegyenesen OX=a és OY= b távolságra kijelöljük az X és az Y pontokat.



Jelölje A az XY szakasz felezőpontját, ekkor OA=$\frac{a+b}{2}$ (ezért nevezzük A-nak a pontot). Az A középpontú, $\frac{b-a}{2}$ sugarú körívre illeszkednek az X és az Y pontok. Pythagoras tétele szerint az OP érintő hossza $\sqrt{ab}$ = G(a,b). Ezt a szakaszt az O középpontú, OP sugarú kör segítségével felmérjük a félegyenesre. Az így kapott metszéspont joggal nevezhető G-nek. A H pont a P pont félegyenesre eső merőleges vetülete. A H elnevezés jogossága az OAP és az OPH háromszögek hasonlóságából következik:

$$OH = \frac{OP \cdot OP}{OA} = \frac{G(a,b)\cdot G(a,b)}{A(a,b)} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = H(a,b).$$

Be kell még látni, hogy a pontok ábra szerinti sorrendje helyes. Az OAP háromszögben OA az átfogó, OP pedig befogó. Tehát: OG = OP < OA. OPH háromszögre ugyanilyen meggondolásból kapjuk: OH < OP = OG. A konstrukcióból következően X az OH szakasz egy belső pontja és Y az OA-n kívül van. Az OXHGAY sorrendet és az

$$a < H(a,b) < G(a,b) < A(a,b) < b$$

egyenlőtlenségláncot kapjuk.

- *Mellékeredményként a következő összefüggést kapjuk a közepek között:* $\frac{G(a,b)\cdot G(a,b)}{A(a,b)} = H(a,b)$.

  Hogyan lehet ezt az összefüggést közepek segítségével megfogalmazni*?*

Két pozitív szám mértani közepe egyben a harmonikus és a számtani közép mértani közepe:

$$G(a,b) = G(H(a,b),A(a,b)).$$

Az egyenlőtlenséglánc algebrai bizonyítása:

- *Igazolja az egyenlőtlenségláncot ekvivalens átalakításokkal. .*

1. Állítás: *a < b ⇒ a < H(a,b)*

Bizonyítás: $a < b$ — b hozzáadásával

$a + b < b + b$ — (a + b)-vel osztva

$1 < \frac{2b}{a+b}$ — a-val szorozva

$a < \frac{2ab}{a+b} = H(a,b)$

2. Állítás: *a ≤ b ⇒ H(a,b) ≤ G(a,b)*

Bizonyítás: Mivel $H(a,b) = \frac{2ab}{a+b}$, ezért azt kell bizonyítani, hogy $\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$.

Mivel mindkét oldal pozitív, ezért az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a négyzetekre is teljesül:

$\frac{4a^2b^2}{a^2+2ab+b^2} \le ab$ — ab-vel osztva

$\frac{4ab}{a^2+2ab+b^2} \le 1$ — $(a^2 + 2ab + b^2)$-tel szorozva

$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$ — 4ab-t kivonva

$0 \le a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

3. Állítás: *a ≤ b ⇒ G(a,b) ≤ A(a,b)*

Bizonyítás: $\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$ — 2-vel szorozva

$2\sqrt{ab} \le a + b$

Mivel mindkét oldal pozitív, az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha a négyzetekre is teljesül:

$4ab \le a^2 + 2ab + b^2$ — 4ab-t kivonva

$0 \le a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

4. Állítás: *a ≤ b ⇒ A(a,b) ≤ b*

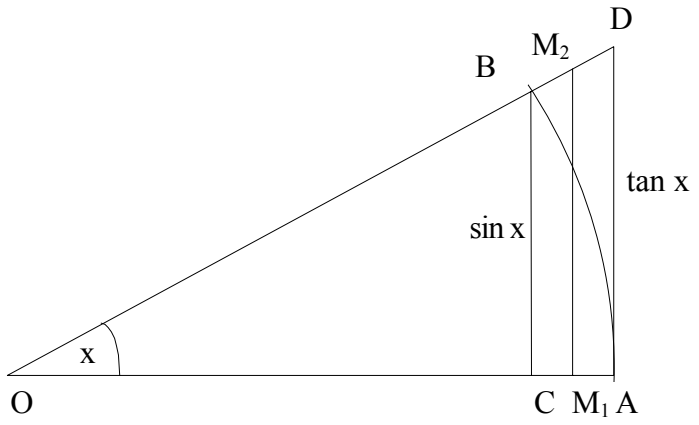
Bizonyítás: $a \le b$ — 2-vel osztva

$\frac{a}{2} \le \frac{b}{2}$ — $\frac{b}{2}$-t hozzáadva

$\frac{a+b}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \le b$

Alkalmazás: egy másik egyenlőtlenség igazolása:

- *Az elemi geometriából tudjuk, hogy egy hegyesszög ívmértéke a szinusz és a tangens értéke közé esik. Ha az x értékét el akarjuk helyezni a [sin x; tan x] intervallumban, akkor tudnunk kell, hogy az intervallum felező pontjától balra vagy jobbra van-e. Mit gondol?*



Vázlatot készítünk az ábra szerint. OAB körcikk az egységkörben, OCB egy sin x, OAD pedig egy tan x befogójú derékszögű háromszög. Mivel BC párhuzamos DA-val, ezért CADB egy derékszögű trapéz. A trapéz középvonala $\frac{\sin x + \tan x}{2}$ nagyságú. A szép ábrázolás nem sokat segít, mivel az M_1M_2 szakasz hossza az AB körív nagyságával optikailag nem összehasonlítható. Megpróbáljuk számolással igazolni, hogy x a [sin x; tan x] intervallum bal felében található. *Megfogalmazzuk sejtésünket:*

- *Bizonyítandó, hogy az* $x < \frac{\sin x + \tan x}{2}$ egyenlőtlenség fennáll, azaz *x a bal oldalon fekszik.*

Egyenletek megoldásakor nemcsak ekvivalens átalakításokat hajthatunk végre, hanem becsléseket is végezhetünk: Ha az $x < \frac{\sin x + \tan x}{2}$ egyenlőtlenséget sem igazolni, sem megcáfolni nem tudjuk, megpróbálhatunk „valamennyivel többet" bebizonyítani. Ehhez egy ismert egyenlőtlenséget (egy valódi egyenlőtlenséget) szeretnénk felhasználni. Mivel a harmonikus és a mértani közép legfeljebb $\frac{\sin x + \tan x}{2}$, megpróbálunk kettőjük közül az egyikkel dolgozni.

Az $x < \sqrt{\sin x \cdot \tan x} \le \frac{\sin x + \tan x}{2}$ egyenlőtlenség sem tűnik kellemesebbnek. Ha még nem vesztettük el a bátorságunkat, akkor megpróbálkozhatunk a harmonikus közép alkalmazásával.

- *Igazolja ekvivalens átalakításokkal az*

$$x < H(\sin x\,,\tan x) \quad (x \in (0°;90°)) \text{ egyenlőtlenséget.}$$

Többszöri ekvivalens átalakítással

$$H(\sin x\,,\tan x) = \frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\tan x}} = \frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2\cdot\sin x}{1+\cos x} \quad \text{(bővítés: x)}$$

$$\frac{2\cdot\sin x}{1+\cos x} = \frac{4\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{2\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = 2\cdot\tan\frac{x}{2} \quad \text{(félszögekre vonatkozó képlet, egyszerűsítés)}$$

új összefüggést kapunk a harmonikus középre:

$$H(\sin x\,,\tan x) = \frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\tan x}} = 2\cdot\tan\frac{x}{2}.$$

Ezt az összefüggést az egyenlőtlenségbe behelyettesítve kapjuk az $x < 2\cdot\tan\frac{x}{2}$ egyenlőtlenséget, amely ekvivalens az $\frac{x}{2} < \tan\frac{x}{2}$ egyenlőtlenséggel és minden hegyesszögre teljesül.

- *Mi következik ebből a kiindulási* $x < \frac{\sin x + \tan x}{2}$ egyenlőtlenségünkre*?*

Tudjuk, hogy a

$$H(\sin x\ ,\ \tan x) = \frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\tan x}} \le \frac{\sin x + \tan x}{2} = A(\sin x, \tan x)$$

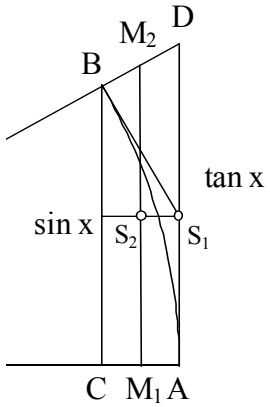
egyenlőtlenség minden hegyesszögre fennáll. A két egyenlőtlenség (a relációk: =, < , ≤ tranzitivitása miatt) összekapcsolható egymással:

$$x < 2 \cdot \tan\frac{x}{2} = \frac{2}{\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\tan x}} \le \frac{\sin x + \tan x}{2}$$

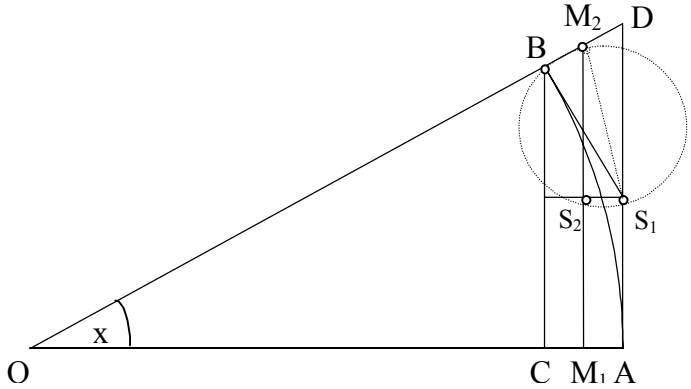
Ebből következik, hogy x a [sin x; tan x] intervallum felező pontjától balra fekszik.

Becslés – másik megoldási út

Geometriai becslésekkel szeretnénk folytatni. Megrajzoljuk a körív B pontbeli érintőjét, ez az A pontbeli érintőt S_1 pontban metszi. Az AS_1B töröttvonal felső becslést ad AB körívre. Meg akarjuk mutatni, hogy az M_1M_2 (a CADB trapéz középvonala) hosszabb, mint az AS_1B töröttvonal. S_1 ponton át párhuzamost húzunk AC-vel. Ez a párhuzamos egyenes az M_1M_2 szakaszt az S_2 pontban metszi. Mivel AS_1 és S_2M_1 egy téglalap szemközti oldalai, ezért $AS_1 = S_2M_1$.



Azért, hogy az S_2M_2 és az S_1M_2 szakaszokat könnyebben összehasonlíthassuk, vizsgáljuk az egész ábrát egy geometriai konstrukcióként.



Mivel BS_1 érintő, ezért M_2BS háromszög derékszögű és az S_1S_2 szakasz merőleges az M_1M_2 szakaszra. Foglaljuk össze tapasztalatainkat: az S_1M_2 szakasz (amely az ábrán egyáltalán nem szerepelt) a B és az S_2 pontokból 90°alatt látszik. Összehasonlítjuk az M_2BS_1 és az $M_2S_2S_1$ háromszögeket. (Ebben segít S_1M_2 szakasz Thales-köre.) S_2S_1 feleakkora, mint CA, BM_2 feleakkora, mint BD és BD nagyobb, mint CA. Tehát az S_2S_1 befogó kisebb a BM_2 befogónál; az M_2S_2 és az S_1B befogókra ennek az ellenkezője teljesül. Összefoglalva: A középvonal hosszabb a töröttvonalnál, a töröttvonal pedig hosszabb az ívnél, tehát a középvonal hosszabb az ívnél.

Következtetés: Mivel sin x és tan x harmonikus közepe a középértékek egyenlőtlenségláncában az első helyen áll, így sin x és tan x minden közepére beláttuk, hogy nagyobb x-nél.

A megoldási utak összehasonlítása

Az első bizonyításban a harmonikus középpel: H(sin x , tan x) becsültünk, a másodikban az AS_1B töröttvonallal. Az első bizonyításban mellékeredményként egy új formulát kaptunk a harmonikus középre: H(sin x, tan x) = $2\cdot\tan\frac{x}{2}$. A második bizonyításban a töröttvonal hossza $2\cdot\tan\frac{x}{2}$. Ez azt jelenti, hogy tulajdonképpen ugyanazt a bizonyítást hajtottuk végre különböző módokon. Az utak összehasonlítása segített megérteni, hogy mi történt, és ahhoz az új felismeréshez vezetett, hogy a töröttvonal a kiindulási sin x és tan x szakaszok harmonikus közepe.

MATEMATIKATANULÁS ANALÓGIA SEGÍTSÉGÉVEL

Mivel az iskolai matematikatanítás lokális rendszereket tárgyal, ezért könnyen találhatók olyan kérdések, amelyek az adott rendszeren belül vagy a gyerekek meglévő ismeretei alapján nem válaszolhatók meg. Ilyen helyzetekben segítenek az analógiák, amelyek segítségével heurisztikus válasz sejthető meg. Az analógia segítségével olyan problémák tehetők iskolai szinten tárgyalhatóvá, mint a geometriai szerkeszthetőség, a térgeometriai konstrukciók, a négydimenziós kocka szemléltetése.

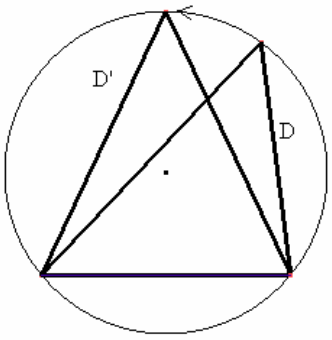
I. A szélsőérték létezése

Szélsőértékeket különböző stratégiák segítségével találhatunk meg. Több megoldási lehetőséget gyűjtünk össze, hogy az eredményes megoldási ötleteket összehasonlítsuk, a rokon problémákat összekapcsoljuk, és a stratégiákat hangsúlyozzuk. Az első kérdés az, hogy létezik-e szélsőérték. Ezen kérdés megválaszolása az iskolai matematikán belül egyáltalán nem könnyű.

***K**(ötelező): Legyen k egy adott kör. Keressük azon háromszögek közül a maximális területűt, amelyeknek minden csúcsa a körvonalra illeszkedik.*

Egy tanuló jó ötlete:

Egy nem szabályos háromszöget szimmetrikussá téve, nagyobb háromszöggé transzformálhatunk. (Rögzítsük a középső oldalt, és illesszük a harmadik csúcsot a körív közepére.) Minden olyan szabályos háromszög, amelynek k a körülírható köre, egybevágó. Jelölje egyiküket Δ, Δ területét pedig $/\Delta/$. A maximális háromszöget jelölje D és D területét $/D/$.



A tanuló hibás indoklása:

Ha a maximális D háromszög nem szabályos, akkor létezik egy D' háromszög (a szimmetrikussá tett háromszög), amelyre $/D'/ > /D/$ teljesül.

Ez ellentmond annak a feltevésnek, hogy D maximális háromszög. Tehát a maximális háromszög szabályos.

Az utolsó mondat kivételével minden kijelentés helyes.

Az, hogy a maximális háromszög szabályos, igaz állítás, de ez nem következik az előző kijelentésekből. Hallgatólagosan egy további (heurisztikusan magától értetődő) feltevést is igaznak fogadott el a tanuló: Létezik maximális háromszög. Hogyan győzhető meg egy tanuló arról, hogy ez a (számára triviális) kijelentés fontos része az argumentációnak? (Az állítás bizonyítása további nehézségeket okozna.) Mindenesetre az argumentáció struktúrája hibás, és ezt meg kellene mutatni.

Megtartjuk a logikai struktúrát, és egy ismerős rendszerben alkalmazzuk:

A maximális D háromszög szabályos.	1 a legnagyobb pozitív egész szám.
Ha D és a szabályos háromszög nem egybevágók,	Ha nem 1 a legnagyobb pozitív egész szám, $n \neq 1$,

akkor létezik D', amelyre $\lvert D' \rvert > \lvert D \rvert$.	akkor létezik $n^2 > n$.
D nem maximális háromszög.	n nem a legnagyobb szám.
Tehát D és Δ egybevágók.	Tehát $n = 1$.

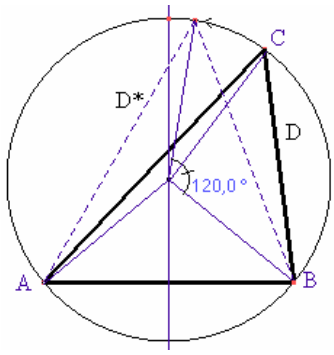
A rendszerek különböző területekhez tartoznak, ez azonban az argumentációban nem mutatkozik meg. A pozitív egész számokról tudjuk, hogy nincs maximumuk. (A háromszögeknél pedig csak érezzük, hogy van maximális.)

A feladat egy megoldása:

A feladat egy ismert megoldásában a szimmetrikussá tétel játssza a főszerepet. Az első lépés egyszerű: egy egyenlőszárú háromszöget kapunk. A következő lépés egy további szimmetrikussá tétel, amely ismét egy egyenlőszárú háromszöghöz vezet. (A háromszög korábbi szimmetriája elvész!) Az a kérdés, hogy vajon a második egyenlőszárú háromszög jobban „hasonlít-e" a szabályos háromszöghöz, mint az első. Bevezetünk egy eltérésfogalmat és megmutatjuk, hogy a szimmetrikussá tett háromszögek sorozata konvergens és a határalakzat a szabályos háromszög. A megoldás bonyolult és nem ad konstrukciós eljárást. (Ha ezen eljárás szerint kellene szabályos háromszöget konstruálni, akkor a Mercedes-embléma soha nem jöhetne létre.)

A feladat egy másik megoldása:

A harmadik csúcsot a körvonalon mozgatjuk, de csak addig a köztes helyzetig, amíg a mozgatott oldalak egyikéhez tartozó középponti szög nagysága el nem éri a 120°-ot. (A szabályos háromszögnél minden középponti szög 120°-os.) A mozgatás során a két középponti szög összege változatlan marad. Induláskor az egyik középponti szög kisebb, mint 120° (alsó határ), a másik nagyobb 120°-nál (felső határ), szimmetrikus helyzetben ugyanakkorák (az intervallum középpontja). A kisebb szög nagysága az intervallum bal felén fut végig, a másik szög nagysága a jobb felén.



Mivel 120° ebbe az intervallumba esik, a két szög egyike eléri a 120°-os nagyságot. Konstruálható egy 120°-os szög, tehát a célpozíció elérhető. A következő lépésben (amennyiben szükség van rá) elérjük a szabályos háromszöget.

Minden nem szabályos háromszög legfeljebb két lépésben szabályos háromszöggé transzformálható, miközben a kerület és a terület egyaránt nő.

- ***1. F**(akultatív): Azon háromszögek közül keressük a maximális kerületűt, amelyek csúcsai a körvonalon vannak.*
- ***2. F**: Azon n-szögek közül keressük a maximális területűt, amelyek csúcsai a körvonalon vannak.*
- ***3. F**: Azon n-szögek közül keressük a maximális kerületűt, amelyek csúcsai a körvonalon vannak.*

Szélsőérték-keresés: Egy probléma több megoldási lehetőséggel

A következő feladat a differenciálszámítás alkalmazására szerepel példaként az Oberstufe 3 című matematika tankönyvben (szerzők: Bürger - Fischer – Malle).

- *Tegyük fel, hogy* 100 *méter drótkerítésünk van, és egy téglalap alakú kertet szeretnénk kialakítani. Mekkorának válasszuk a téglalap oldalait, hogy területe a lehető legnagyobb legyen? Mekkora a maximális terület?*

1. MM ***(Matematikai Modell)****: Algebrai modell – függvénykapcsolat*

Egy téglalap K kerületét és T területét a és b oldalhosszúságok esetén $K = 2(a + b)$, ill. $T = ab$ formulák segítségével határozhatjuk meg.

Tekintsük az a oldalt x változónak, így a b oldalhosszra (az x-től függő) $b = 50 - x$ értéket kapjuk, és a területet $T = F(x) = x(50 - x)$ függvénykapcsolat írja le, ahol $0 < x < 50$. $F(x)$ maximális értékét keressük és x azon értékét, amelyre $F(x)$ maximális. (A maximális téglalap oldalhosszait is keressük!)

Sejtés tapasztalat alapján

K: *Vizsgáljon meg konkrét eseteket és próbáljon meg egy sejtést megfogalmazni!*

Az első oldal hossza: x [m]	A második oldal hossza: $50 - x$ [m]	Terület: $F(x) = x(50 - x)$ [m^2]
5	45	225
10	40	400
20	30	600
25	25	625

K: *Meg kell vizsgálnunk az $x = 26, \ldots, 49$ értékeket ahhoz, hogy egy sejtést tudjunk megfogalmazni?* (x és $(50 - x)$ szerepe szimmetrikus.)

Összegezzük tapasztalatainkat és fogalmazzuk meg sejtésünket: 625 m^2 a terület maximuma és ekkor az oldalak mindegyike 25 m.

K: *Az $x(50 - x) \leq 625$ sejtés bizonyítása ekvivalens átalakítások segítségével:*

$50x - x^2 \leq 625$	ekvivalens átalakítás
$-x^2 + 50x - 625 \leq 0$	szorzás – 1-gyel
$x^2 - 50x + 625 \geq 0$	szorzattá alakítás
$(x - 25)^2 \geq 0$	

Mivel egy szám négyzete nem lehet negatív, ezért az egyenlőtlenség minden x értékre teljesül. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $x = 25$.

F: Az $x(50 - x) \leq 625$ sejtés bizonyítása számtani és mértani középpel:

x és $(50 - x)$ mértani, illetve számtani közepét a következő formulák segítségével kaphatjuk meg:

$$M(x,(50\text{-}x)) = \sqrt{x(50 - x)} \qquad \text{és} \qquad S(x,(50\text{-}x)) = \frac{x + (50 - x)}{2} = 25.$$

Mivel a mértani közép soha nem nagyobb a számtaninál, ezért az

$$\sqrt{x(50 - x)} \leq 25$$

egyenlőtlenség azonosan teljesül, ha x és $(50\text{-}x)$ pozitív számok. Egyenlőség $x = 50\text{-}x$, azaz $x = 25$ esetén lép fel. Mindkét oldal pozitív. Ebből következik, hogy az egyenlőtlenség a négyzetekre is fennáll:

$$x(50 - x) \leq 625.$$

Az $x(50\text{-}x) \leq 625$ sejtés bizonyítása másodfokú függvény szélsőértékének keresésével:

- ***K****: Határozzuk meg az $F(x) = x(50\text{-}x)$ másodfokú függvény maximumát a $(0;50)$ értelmezési tartományon! x mely értéke esetén kapunk maximumot?*

A maximum meghatározására több lehetőség kínálkozik:

a) ***K***: Teljes négyzetté alakítással:

$$F(x) = -(x - 25)^2 + 625.$$

Így közvetlenül leolvasható a maximum helye és értéke (a négyzetes tag nullát vesz fel).

b) ***K-KK*** *(Keresztkapcsolat)*: Az $F(x) = -x^2 + 50x$ négyzetes függvény grafikonja egy (lefelé nyíló) parabola. A parabola tengelypontjának koordinátái adják a maximum helyet (illetve minimum helyet). Az $F(x) = x(50\text{-}x)$ szorzatalakból az $x_1 = 0$ és az $x_2 = 50$ zérushelyek közvetlenül leolvashatók, és a tengelypont x koordinátáját a zérushelyek számtani közepe adja.

c) ***F***: Differenciálszámítással kapjuk a szükséges feltételt:

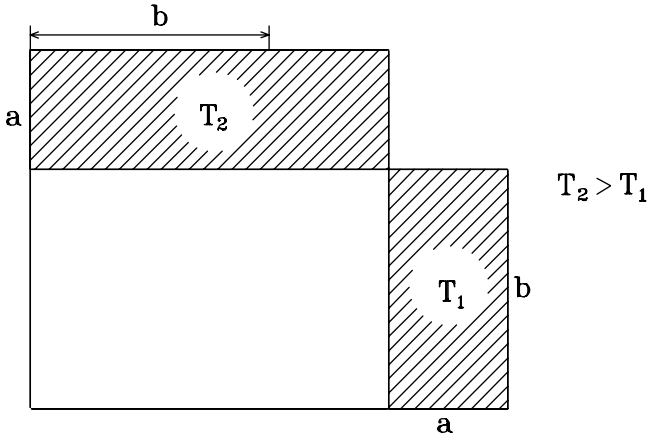
$F'(x) = -2x + 50 = 0$, illetve az elégséges feltételt: $F''(x) = -2 < 0$ a maximum létezésére. Még azt kell ellenőrizni, hogy $x = 25$ benne van-e az értelmezési tartományban.

2. MM: Geometriai megoldások

A sejtést geometriailag fogalmazzuk meg: Az azonos kerületű téglalapok közül a négyzetnek van a legnagyobb területe.

***K**: 1. Megoldás:*

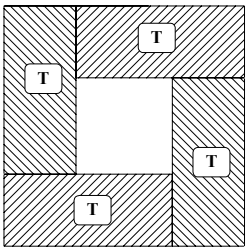
A sejtés bizonyításához hasonlítsuk össze a négyzet területét a téglalapok területével. Tekintsünk egy azonos kerületű téglalapot és négyzetet, és fektessük őket egymásra (az ábrának megfelelően).



A téglalap és a négyzet egy téglalapban fedik egymást, ez a rész elhagyható, a satírozott téglalapokat kell összehasonlítani. Ha a téglalap egyik oldala a-val nagyobb, mint a négyzet oldala, akkor a másik oldalnak a-val rövidebbnek kell lennie, mivel az összeg ugyanakkora. Ebből következik, hogy az ábrán bemutatott helyzet lehetséges és a téglalap maradékának területe (T_1) kisebb, mint a négyzet maradékának területe (T_2).

***F**: 2. Megoldás:*

Egy tanuló az ábrán bemutatott megoldási ötletet találta. Az ötlet abban áll, hogy egy téglalap a és b oldalaival egy $K/2 = a + b$ oldalú négyzet építhető fel. (A tanuló konkrét számokkal dolgozott, $K=100$ és $K/2 = a + b = 50$.) Négy téglalap illeszthető be a négyzetbe átfedés nélkül. Ha a téglalap oldalai különböző hosszúságúak, akkor egy $a - b$ oldalú kis négyzet fedetlenül marad középen. Ebből következik, hogy a négyzet területe a négy téglalap összterületére felső korlátot ad. Ez a felső korlát $a = b$ esetén érhető el.



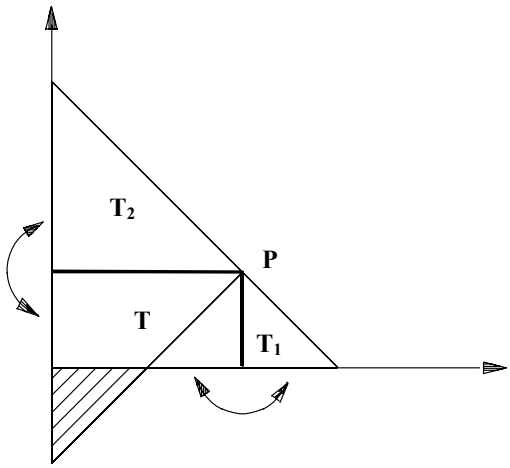
50 m

$4T \leq 2500 \text{ m}^2$

$T \leq 625 \text{ m}^2$

***KK-F**: 3. Megoldás:*

Megint egy az azonos kerületű téglalapok területére vonatkozó elérhető, konstans felső korlátról van szó. A tartomány, amelynek a területe a felső korlátot adja, egy egyenlőszárú derékszögű, $K/2$ befogójú háromszög.



$$2(T_1 + T_2) \geq T_1 + T_2 + T$$
$$2(T_1 + T_2) + T \geq T_1 + T_2 + T$$
$$T_1 + T_2 + T \geq 2T$$

Válasszunk egy P pontot az átfogón. A P ponton áthaladó, a szárakkal párhuzamos egyenesek a háromszöget két háromszögre (T_1 és T_2) és egy téglalapra, illetve négyzetre (T) bontják. A téglalap kerülete K. Könnyen látható, hogy P pont megfelelő választásával minden K kerületű téglalap elérhető. Ha P pont felezi az átfogót ($T_1 = T_2$), akkor egy $T = T_1 + T_2$ területű négyzetet kapunk. Ha P pont nem felezi az átfogót, akkor ($T_1 \neq T_2$), akkor tükrözzük a részháromszögeket a téglalap oldalaira. A kisebb háromszög tükörképe belefér a téglalapba, míg a másik tükörképnél van egy kilógó rész.

A megoldások összehasonlítása:

Az első megoldási ötlet lényege abban áll, hogy egy halmaz (sejtés által) kitüntetett elemét kell minden egyes elemmel összehasonlítani. Ha a kiválasztott elem legalább akkora, mint a többi, akkor megtaláltuk a maximumot.

A második és a harmadik megoldás a tanult eljárást követi. A maximumfeladatoknál egy olyan felső korlátot kell megadni, amely konstans (független a változók megválasztásától) és elérhető. Felső korlátot adtunk meg $4T$-re és $2T$-re a $K/2$ oldalú négyzet, illetve a $K/2$ befogójú, egyenlőszárú háromszög (a négyzet fele) területével.