# Elemi matematika 1 kitűzött feladatok
# Matematika BSc normál szint

**Fejtörők**

**F1** Egy vándor szállást kér egy fogadóban. Nincs pénze, csak egy aranylánca, amely 100 láncszemből áll. A fogadós minden ott töltött éjszakáért egy láncszemet kér. A vándor beleegyezik azzal, hogy minden éjszakát másnap reggel fizet ki, és nem fizet előre.
Legkevesebb hány láncszemet és melyeket kell elvágni ahhoz, hogy a vándor mind a 100 napot pontosan ki tudja fizetni.

a) A láncszemek egymásba vannak fűzve, egy vágás három részre darabolhat.
b) A láncszemek egymáshoz vannak forrasztva, egy vágással kétfelé darabolunk.

A fogadós visszaadhat láncszemeket, és az elvágott láncszemek is teljes értékűek.

**F2** 10 szemre egyforma láda mindegyikében 100 darab egyforma súlyú érme van. Azonban sajnos, az néhány ládába csupa hibás érmék kerültek, melyek mindegyike 1grammal nehezebb a normális érméknél. Ha van egy egykarú mérlegünk – amivel bárminek gramm pontossággal meg tudjuk mérni a súlyát – akkor legkevesebb hány mérésre van szükség a hibás ládák kiválasztásához?

**F3** 20 súly közül az egyik kicsit nehezebb, mint a többi.
Legkevesebb hány mérésre van szükség ahhoz, hogy egy kétkarú mérleg segítségével kiválasszuk a hibás súlyt?

**F4** Egy 8 és egy 5 literes edényünk van, amivel vizet merhetünk egy közeli forrásból.
El tudjuk-e érni, hogy a nagyobbik edényben pontosan 7 liter víz legyen?
El tudjuk-e érni, hogy pontosan 1*l*, 2*l*, 3*l*, 4*l*, illetve 6*l* legyen valamelyik edényben?

**F5** Ha kilenc kályhában öt és fél nap alatt tizenkét köbméter bükkfa ég el, mennyi nap alatt ég el tizenkét kályhában kilenc köbméter bükkfa?
*(Karinthy Frigyes: Tanítom a kisfiamat)*

**F6** Három ifjú házaspár érkezik egy megáradt folyó partjára. Szerencsére találnak a parton egy kis, kétszemélyes csónakot, és mindannyian tudnak is evezni. A probléma csak az, hogy a fiatal férjek roppant féltékenyek, és még a gondolatát sem bírják elviselni annak, hogy a feleségüket otthagyják valamelyik parton úgy, hogy ott közben egy idegen férfi is tartózkodik. Ez persze meglehetősen megnehezíti az átkelést.
Át tudnak-e kelni ezek mellett a feltételek mellett?

**F7** Egy papírlapon a következő állítássorozatot találjuk:
„2 x 2 = 4.
Ezen a lapon legfeljebb 1 igaz állítás van.
Ezen a lapon legfeljebb 2 igaz állítás van.
…....
Ezen a lapon legfeljebb 10 igaz állítás van.”
Hány igaz állítás van a lapon?

**F8** Az asztalon áll két egyforma pohár. Az egyikben tiszta víz, a másikban pontosan ugyanolyan mennyiségű bor van. Egy kiskanál bort átteszünk a másikba, jól összekeverjük, majd ugyanazzal a kiskanállal egy kiskanálnyi keveréket visszateszünk a borospohárba.
Az a kérdés, hogy a vizespohárban lesz több bor, vagy a borospohárban lesz több víz?

**F9** Egy vegyes erdőnek 99%-a fenyőfa. A tulajdonos ki akarja vágatni a fenyőfák egy bizonyos hányadát. A környezetvédők tiltakozó akcióba kezdnek, de a tulajdonos megnyugtatja a nagyközönséget, hogy az állományban a fenyőfák aránya még mindig 98% lesz a tervezett kivágások után.
A teljes erdőállománynak hány százalékát fogja kivágatni a tulajdonos?

**F10** Három dobozunk van, melyek mindegyikében két golyó van: az egyikben két arany, a másikban két ezüst, a harmadikban egy arany és egy ezüst golyó. A dobozokon ennek megfelelően a következő feliratok vannak: AA (arany-arany), EE (ezüst-ezüst) AE (arany-ezüst). A probléma csak az, hogy egyik doboz tartalma sem felel meg a doboz feliratának.

Ki szeretnénk találni, hogy melyik doboz mit tartalmaz, de mindössze egyetlen dobozból egyetlen golyót szabad kivennünk. Melyik dobozból válasszunk golyót, hogy ez sikerüljön?

**F11** Egy utazó egy olyan szigetre látogatott el, ahol csupán lovagok és lókötők élnek. Tudta már, hogy a lovagok itt mindig igazat mondanak, a lókötők pedig mindig hazudnak. A szigetre érkezve utazónk három szigetlakóval találkozott, és ahhoz hogy megbízható információhoz jusson, tudnia kellett legalább az egyikükről, hogy miféle. Ezért megkérdezte a három közül az egyiket: „Lovag vagy, vagy lókötő?” A választ azonban nem értette meg, ezért megkérdezte a mellette állót is: „Mit mondott a barátod?” A második szigetlakó így felelt: „Azt mondta, hogy ő lovag.” Ekkor azonban megszólalt a harmadik szigetlakó is: „Ne higgy neki, hazudik.”

Lehet-e tudni, hogy melyikük lovag, és melyikük lókötő?

**F12** A következő feladatoknak két szereplője van, A és B, mindkettőjük vagy lovag, vagy lókötő. Meg tudjuk-e állapítani, hogy miféle A és miféle B, ha A a következőt mondja nekünk:

a) „Legfeljebb az egyikünk lovag.”
b) „Én lovag vagyok, vagy B lókötő.”
c) „Ha én lókötő vagyok, akkor megeszem a kalapom.” Meg kell-e A-nak ennie a kalapját?

*(Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek)*

**F13** Alice a felejtés erdejében elfelejtette, hogy a hétnek melyik napja van éppen, és nagyon szerette volna tudni. Találkozott az Oroszlánnal és az Egyszarvúval. Arra szerencsére emlékezett, hogy ezeknek a lényeknek milyen szokásai vannak: az Oroszlán mindig hazudik Hétfőn, Kedden és Szerdán, de a hét többi napjain biztosan igazat mond. Az Egyszarvú mindig hazudik Csütörtökön, Pénteken és Szombaton, a többi napokon pedig igazat mond.
Egy napon Alice találkozott az Oroszlánnal és az Egyszarvúval, akik egy fa alatt pihentek. Alice kérdésére a következőket mondták:

*Oroszlán*: Tegnap hazudós napom volt.
*Egyszarvú:* Tegnap nekem is hazudós napom volt.

Ezekből a válaszokból Alice (aki egy nagyon okos kislány), ki tudta találni, hogy milyen nap volt.

*(Smullyan: Mi a címe ennek a könyvnek)*

Az Oroszlán és az Egyszarvú természetesen a hét összes többi napján is tudott volna olyan állításokat mondani, hogy Alice kitalálhassa, hogy milyen nap van aznap. Készíts te is ilyen állításokat a hét néhány másik napjához!

**F14** Egy 22 fős egyetemi csoportban többen is vannak, akik nagyon szeretnek nyelveket tanulni. Vannak persze olyanok is közöttük, akik számára a nyelvtanulás kényszer, és a nyelvvizsga miatt van rá szükségük. Annyit mindenesetre tudunk róluk, hogy háromféle nyelvet tanulnak: 13-an angolt, 9-en spanyolt és 5-en lovárit. Közülük mindössze 2 ember van, aki a lovári mellett másik nyelvet is tanul. 6-an vannak, akik angolul is és spanyolul is tanulnak.

Hány olyan ember lehet a csoportban, aki egy nyelvet sem tanul?

**F15** Egy csónakban nagy kő van. A halász beevez a tóba, majd a tó közepén kidobja a követ a csónakból a tavacskába. Vajon változik-e ettől – akár csak kicsi mértékben is – a tó szintjének magassága?

## Számelmélet, algebra, kombinatorika

**S1** Melyik az a legnagyobb négyzetszám, ami osztja az 50!-t?

**S2** Mutasd meg, hogy minden n-hez van olyan eleme a Fibonacci sorozatnak ($f_1=1$, $f_2=1$, $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$) amelynek n osztója!

**S3** Felosztható-e 2010 darab (n darab)
szabályos háromszögre egy szabályos háromszög?

derékszögű háromszögre egy tetszőleges háromszög?
egyenlő szárú háromszögre egy tetszőleges háromszög?

**S4** Milyen egész egység oldalú téglalapra teljesül, hogy a kerület és terület mérőszáma megegyezik?

**S5** 1 – 20-ig a számokat számkártyákra írtuk. Szét lehet-e ezeket a kártyákat osztani 2 (3, 4, 5) dobozba úgy, hogy a számok összege, illetve szorzata mindegyik dobozban ugyanannyi legyen?

**S6** Egy 6-ra végződő, hatjegyű szám végén álló hatos számjegyet a szám elejére rakva a kapott hatjegyű szám éppen 4-szerese az eredetinek. Mi lehet ez a szám?

**S7** Az 1255743927775400024307 szám milyen maradékot ad 2-vel, 3-mal, … 9-cel, 10-zel osztva? Mi a helyzet 8-as ill. 9-es számrendszerben?

**S8** Adj meg egy olyan négyzetszámot, melyben a jegyek összege 150!

**S9** * Mutasd meg, hogy minden pozitív egész számnak van csupa 1 és 0 számjegyet tartalmazó többszöröse!

**S10** Egy négyzetrácson kijelölt $a$ és $b$ oldalú rácstéglalapnak behúzzuk az egyik átlóját. Hány kis rácsnégyzetnek metsz bele a belsejébe ez az átló
ha a többszörös b-nek;
ha a és b relatív prímek?

**S11** Hány olyan 600-nál kisebb természetes szám van, amelyik sem 2-vel, sem 3-mal, sem 5-tel nem osztható?
Hány olyan természetes szem van, amelyik 6000-nél kisebb és relatív prím a 6000-hez?

**S12** Adj meg három különböző számot úgy, hogy bármelyik kettő ne legyen relatív prím, de a három számnak mégsem legyen közös valódi osztója!
Adj meg végtelen sok ilyen számhármast!

**A1** Egy asszony a piacon az első vevőnek eladta a tojásai felét meg egy fél tojást, a másodiknak a megmaradt tojások harmadát meg egy harmad tojást, a harmadiknak az ezután megmaradt tojások negyedét meg egy negyed tojást. Miközben egyetlen tojást sem kellett feltörnie a megmaradt tojásokkal hazaballagott.
Hány tojást vihetett haza?
Hány tojással indulhatott el?
Általánosítsd a feladatot!

**A2** Amikor Mr. és Mrs. Smith repülőre szálltak, csomagjaik összsúlya 94 font volt. A férj 1,50 $-t, a feleség 2 $-t fizetett a túlsúlyért. Ha Mr. Smith egyedül repült volna kettőjük csomagjával, akkor 13,50 $-t kellett volna fizetnie. Hány font súlyú csomagot vihetett ezen a járaton egy személy magával ráfizetés nélkül?

*(Pólya György: A problémamegoldás iskolája)*

**A3** Egy apa számos gyermeket hagyott hátra, és így végrendelkezett a vagyonáról: Az elsőé legyen 100 korona és a maradék tizede, a másodiké legyen 200 korona és a maradék tizede, a harmadiké legyen 300 korona és a maradék tizede, a negyediké legyen 400 korona és a maradék tizede, és így tovább. A végén kiderült, hogy mindegyik gyermekének ugyanannyi jutott. Mekkora volt a vagyon, hány gyermeke volt, és mindegyiknek mennyi jutott?

*(Pólya György: A problémamegoldás iskolája)*

**Általánosítsd a feladatot!

**A4** Két motorkerékpár egy időben indult el kirándulni. Egyenlő távolságot tettek meg, és egy időben is érkeztek haza. Az úton mindketten megpihentek. Annyit tudunk, hogy az egyik kétszer annyi ideig volt úton, mint amennyit a másik pihent, a másik pedig háromszor annyit volt úton, mint amennyit az első pihent. Melyik haladt gyorsabban?

*(Korgyemszkij: Matematikai fejtörők)*

**A5** Egy tartályba egy kék, egy piros és egy zöld csapon át engedhetünk vizet. A piros csap egyedül 3 ára alatt tölti meg a tartályt. A piros és a kék csap együtt 2 óra alatt, a három csap együttesen 1 óra alatt tölti meg a tartályt. Hány óra alatt töltik meg ezek a csapok külön-külön a tartályt?

**A6** Színezd be a koordinátasík azon pontjait, melyek koordinátáira:

$x = |y|$ x: $|x| = y : |y|$ $x + |x| = y +$ $y = [x]$ $x = [y]$ $[x] = [y]$

$x - [x] = y - [y]$ $x - [x] > y - [y]$ $(x - y)(x - 2y) = 0$

*(Gelfand et al.: Koordinátamódszer)*

**A7** A 137-es cézium felezési ideje kb. 30 év.

a) Add meg a bomlási képletet $N(t) = N(0)\cdot e^{-\lambda t}$ alakban!

b) Mikorra fog a csernobili baleset okozta cézium szennyeződés a maximális érték 10%-ára csökkenni?

**A8** Egy felderítő repülőgép szélcsendes időben óránként 220 mérföldet repül. Üzemanyaga 4 órányi repüléshez elegendő. Milyen messze repülhet, hogy kockázat nélkül vissza is térhessen,

a) ha óránként 20 mérföld sebességű ellenszélben indul?

*(Pólya György: A problémamegoldás iskolája)*

b) ha óránként 20 mérföld sebességű hátszélben indul?

c) ha óránként 20 mérföld sebességű, a haladási irányra merőleges szélben indul?

**d) ha óránként 20 mérföld sebességű, tetszőleges irányú, szélben indul? Melyik esetben jut legmesszebb?

**A9** Helyezd el az 1, 2, 3, 4, 5 feliratú kártyákat a kijelölt □ □ :□□ □helyekre úgy, hogy a hányados

- a lehető legkisebb legyen,
- a lehető legnagyobb legyen,
- a lehető legközelebb legyen a 30-hoz,
- a lehető legkisebb kétjegyű szám legyen,
- az osztásnak ne legyen maradéka.

*(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 5. osztály)*

**A10** A 26 · 93 szorzat különleges. Ha a szorzótényezőkön belül a számjegyeket felcseréljük, akkor a 62 · 39 szorzatot kapjuk, amelynek értéke meglepő módon megegyezik az eredetiével, 26 · 93 = 62 · 39. Mi a „titka” ezeknek a számoknak? Keress más ilyen szorzatokat!

*(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 8. osztály)*

**A11** Ezekben a műveletsorokban valaki kiradírozta a zárójeleket, ezért majdnem mindegyiknek rossz az eredménye. Írd vissza a zárójeleket – ahol szükséges – úgy, hogy igazak legyenek az egyenlőségek!

| | |
|---|---|
| $5 + 6 \cdot 3 : 11 + 7 = 10$ | $5 + 6 \cdot 3 : 11 + 7 = 6$ |
| $27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 77$ | $27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 101$ |
| $27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 2$ | $27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 130$ |
| $27 + 18 : 9 + 36 \cdot 2 = 62$ | $39 - 27 : 3 : 3 + 1 = 1$ |

*(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 5. osztály)*

Hány különböző végeredményt kaphatunk zárójelek felhasználásával az első műveletsorból?
Ezek közül mennyi a legkisebb, és mennyi a legnagyobb végeredmény

**K1** Egy 8x8-as sakktáblán maximum hány

a) bástyát; b) futót; c) lovat; d) királyt; e)* királynőt;

lehet elhelyezni, úgy, hogy ne üssék egymást?

Próbálj általánosítani!

**K2** Hányféleképpen lehet egy 8x8-sa sakktáblára3 bástyát feltenni, feltéve hogy

mind egyformák
mind különbözőek
kettő egyforma és egy másmilyen

Válaszolj abban az esetben is, ha a különbözők nem lehetnek olyan helyzetben, amikor üthetnék egymást!
Általánosíts!

**K3** 20 golyóból véletlenszerűen kiválasztok valamennyit (lehet, hogy mind a húszat, és lehet, hogy egyet sem). Hányféle különböző választás lehetséges, ha
minden golyó más színű
minden golyó egyforma
5 egyforma piros, 5 egyforma kék és 10 egyforma sárga golyónk van.

**K4** A 8x8-as sakktáblán hány rácsnégyzetet, hány rácstéglalapot találhatunk?

**K5** Az 1, 2, 3, 4, 5 és 6 számjegyekből hatjegyű számokat készítünk. Hány 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, 6-tal osztható szám van közöttük, ha
minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel;
egy számjegyet többször is felhasználhatunk?

**K6** Az 1-nél nem kisebb, 100-nál nem nagyobb természetes számok közül maximum hányat lehet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztottak közül bármelyik kettőt tekintve
egyik osztója lesz a másiknak
nem relatív prímek
egyik sem többszöröse a másiknak
relatív prímek

**K7** A négyjegyű számok között melyikből van több,
amelyekben szerepel a 7-es számjegy, vagy amelyekben nem;
amelyekben a számjegyek szigorúan növekedő sorrendben állnak, vagy amelyekben nem;
amelyekben nincsenek egyforma számjegyek, vagy amelyekben vannak?
Változnak-e ezek a nagyságviszonyok, ha négyjegyű helyett kevesebb vagy többjegyű számok körében vizsgálódunk?

**K8** 1-10 hosszúságú színes rudakkal szőnyegezünk (ugyanazt a hosszúságot rakjuk ki többféleképpen rövidebb rudakból, úgy, hogy a sorrend is számít).
Hányféleképpen tudjuk a 10-et kirakni?
Hányféleképpen tudjuk a 10-et pontosan 2 darab rúdból (pontosan 3, 4, … darab rúdból kirakni?
Hányféleképpen tudjuk a 10-et kirakni, ha csak fehér (1) és rózsaszín (2) rudakat használunk?

**K9** A 100-at hányféleképpen lehet
10 pozitív egész szám;
10 pozitív páros szám;
10 egész szám;
10 természetes szám (a 0 is megengedett)
összegeként előállítani?

**K10** Mutasd meg, hogy 3 (nem feltétlenül különböző) szám közül mindig ki lehet választani valahányat úgy, hogy az összeg osztható legyen 3-mal! (Az egytagú összeg is összeg)
Igaz-e 4-re, 5-re, …, $n$-re is, hogy 4, 5, …, $n$ szám összege osztható 4-gyel, 5-tel, …, $n$-nel?

**K11** a) Egy nagyszabású projektben 6 tudósból álló csoportok dolgoznak egy-egy résztémán. Az egyes csoportokban néhányan leveleznek egymással.
Mutasd meg, hogy bármelyik hatos csoportban vagy van 3 ember, akik közül mindenki mindenkivel levelez, vagy van 3 olyan, hogy semelyik sem ír a másiknak.
b)* Egy nemzetközi projektben 15 olyan tudós dolgozik együtt, hogy mindenki levelez mindenkivel. Három nyelven folyik a levelezés, angolul, franciául és németül. Mindenki mindenkivel levelez, de egy pár mindig ugyanazt a nyelvet használja.

Lehetséges-e, hogy ebben a csoportban nincsen 3 olyan ember, akik egymással ugyanazon a nyelven leveleznek?

## Halmazok, függvények

**H1** Egy bolha ugrál a számegyenesen, a 0-ból indul, egyszerre egységnyi hosszút tud ugrani. Eljuthat-e végtelen hosszú élete során minden egész pontba?

Ha akármekkorát tud ugrani, eljuthat-e (végtelen élete során) a számegyenes minden pontjába?

**H2** A következő négy sáv melyike darabolható át melyikbe?

a) Egységnyi vastagságú, félig (egyik irányban) végtelen sáv
b) Egységnyi vastagságú, mindkét irányban) végtelen sáv
c) Két egység vastagságú, félig végtelen sáv
d) Két egységnyi vastagságú, mindkét irányban) végtelen sáv

**H3** Bontsd szét a természetes számok halmazát 2, 3, 4, …, $n$, …, végtelen sok diszjunkt részhalmazra! Alkoss a természetes számokból három halmazt úgy, hogy bármelyik kettőnek végtelen sok közös eleme legyen, de semelyik háromnak ne legyen közös eleme!

**H4** A természetes számokat rendezzük el a következőképpen: Egy szám biztosan megelőzi a másikat, ha az utolsó jegye kisebb, mint a másiké. Ha utolsó jegyeik megegyeznek, akkor az előtte álló jegyek döntenek, az áll előrébb, aminek az utolsó előtti jegye kisebb, és így tovább. (A sorrend megállapítá-sához szükség lehet arra, hogy a számok elé tetszőleges számú nullát írjunk).

Igaz-e az, hogy ez az elrendezés mindenütt sűrű, vagyis bármely két természetes szám között van legalább egy másik természetes szám?

**F1** Egy logikai függvény a változó minden értékére az 1 (igaz), vagy a 0 (hamis) értéket veszi fel.

Hány logikai függvény értelmezhető a -100-nál nem kisebb és 100-nál nem nagyobb egész számok halmazán?
Ezek között hány monoton növekedő van?

**F2** Hány $f : \{1, 2, 3 \ldots, 10\} \to \{1, 2, 3, 4 \ldots, n\}$ függvény van?

Ezek közül hány függvény szigorúan monoton növő?
Az összes ilyen függvény közül hánynak van inverze?

**F3** Legyen

$$f(x) = \{x, \text{ ha } x < 0; \quad 1/2, \text{ ha } x = 0; \qquad x+1, \text{ ha } x > 0\}$$
$$g(x) = \{x, \text{ ha } x < 0; \quad 0, \text{ ha } 0 \le x < 1; \quad x-1, \text{ ha } x > 1\}$$

Határozd meg a $g(f(x)$ és $f(g(x)$ függvényeket!

**F4** Igaz vagy hamis?

Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya végtelen, értékkészlete véges halmaz.
Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya véges, értékkészlete végtelen halmaz.
Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya korlátos, értékkészlete végtelen halmaz.
Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya végtelen, értékkészlete véges halmaz és kölcsönösen egyértelmű.
Van olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya is és értékkészlete is a valós számok halmaza és mégsem kölcsönösen egyértelmű.
Minden függvény páros vagy páratlan.
Ha egy függvény görbéje szimmetrikus az y tengelyre, akkor az páratlan.
Ha egy függvény páros, akkor szimmetrikus az origóra.
Van olyan függvény, amely páros is meg páratlan is.
Ha egy függvény invertálható, akkor szigorúan monoton növekvő.
Ha egy függvény szigorúan monoton csökkenő, akkor invertálható.

**F5** Színezd a síkon azokat az $(x;y)$ koordinátájú pontokat, amelyekre $\max(x^2; y) = 4$.

**F6** Meg lehet-e választani $c$ értékét úgy, hogy az $y = cx + 5$ függvény pontosan $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ helyen vegyen fel egész értéket?

**F7** Hol helyezkednek el a Descartes-féle derékszögű koordinátarendszer síkjában azok a pontok, amelyek koordinátáira igaz, hogy:

$$(x-y)(2x-3-y) > 0 \quad \text{és} \quad \frac{x^2-y}{x-1} = 0.$$

**F8** $f$ és $g$ függvényeket a következő három hozzárendelés közül választjuk:

$x \to [x]$; $\quad x \to x^2$; $\quad x \to \sin x$;

Hány $f(g(x))$ típusú függvény készíthető belőlük?

Ábrázold ezeket!

**F9** Válaszolj a következő kérdésekre!

a) Lehet-e egy minden valós számon értelmezett szigorúan monoton függvény páros, illetve páratlan?

b) Lehet-e egy minden valós számon értelmezett pozitív értékű függvény páros, illetve páratlan?

c) Lehet-e egy páros, illetve páratlan függvénynek pontosan 1, 2, 3… szélsőértékhelye?

**F10** Melyek periodikusak az alábbiak közül?

$\cos(x + \frac{\pi}{6})$, $\quad \{x-2\}$, $\quad \cos^2 x$, $\quad -\{2x\}$, $\quad \sin x \cos x$, $\quad 2\sin(x-1)$, $\quad 2\sin x - 1$

**F11** Hány helyen veszi fel a valós számokon értelmezett $f(x) = \left|\left||x|-2\right|-1\right|$ függvény az $\frac{1}{\sqrt{2}}$ értéket?

**F12** Melyik összefüggés igaz az alábbiak közül?

A) $\mathrm{tg}2 < \mathrm{tg}\,3 < \mathrm{tg}\,1$ B) $\mathrm{tg}1 < \mathrm{tg}\,3 < \mathrm{tg}\,2$ C) $\mathrm{tg}1 < \mathrm{tg}\,2 < \mathrm{tg}\,3$

D) $\mathrm{tg}2 < \mathrm{tg}\,1 < \mathrm{tg}\,3$ E) $\mathrm{tg}3 < \mathrm{tg}\,2 < \mathrm{tg}\,1$

**F13** *Racionális, vagy irracionális $\mathrm{tg}1°$?

**Valószínűségszámítás**

**V1** 10-szer feldobunk egy pénzérmét, mi a valószínűbb?

Egyikből is 5 és a másikból is 5?

Egyikből 4 a másikból 6?

**V2** Véletlenszerűen kiválasztva egy 4 jegyű számot mi a valószínűbb:

minden számjegy különböző, vagy vannak egyforma számjegyei?

van benne hetes vagy nincs benne hetes?

számjegyei monoton növekedő sorrendben állnak, vagy pedig nem?

**V3** Egy bizonyos vírus jelenlétének kimutatására vértesztet alkalmaznak. A teszt előzetes vizsgálatok alapján 1000 fertőzöttből 998 esetben mutat pozitív eredményt. Különböző okokból azonban 100 nem fertőzöttből is 5 esetben pozitívet mutat, azaz tévesen „riaszt”. Becslések szerint egy nagyváros lakói között legfeljebb egy ezrelék lehet az adott vírussal fertőzött. Valakin elvégzik a tesztet és pozitívnak találják. Mekkora az esélye, hogy az illető tényleg fertőzött?

**V4** Mi a valószínűbb: két dobókockával legalább egy 6-ost vagy négy dobókockával legalább két 6-ost dobni?

**V5** Igaz-e, ha egy szobában véletlenszerűen összegyűlik 5 ember, akkor valószínűbb, hogy van köztük két olyan, aki a hét ugyanazon napján született, mint az hogy nincs két ilyen ember? Miért?

**V6** Öt kockát feldobunk. Mi a valószínűbb esemény: hogy van közte póker (négy egyforma), vagy hogy sort kapunk (öt egymást követő számot)?

**V7** 13+1 találatos TOTÓ szelvényt véletlenszerűen kitöltve mi a valószínűsége annak, hogy legalább 11 találatunk legyen.
Mekkora ez a valószínűség, ha a mérkőzések felének a kimenetét 1/2 valószínűséggel el tudjuk találni?

**V8** Hagyományos LOTTÓ szelvényt véletlenszerűen kitöltve mi a valószínűsége annak, hogy
5 találatot érünk el?
pontosan 4, 3, 2, 1, 0 találatunk lesz ?

**V9** 52 lapos franciakártyát négy játékos között szétosztva mi a valószínűsége annak, hogy
mindenkihez jut egy ász?
minden ász egy kézben van?
van valaki, akinek a kezében legalább 8 egyforma szín van?

## Geometria

**G1** Szerkessz egyenest egy négyszög valamelyik csúcsán keresztül, amelyik felezi a négyszög területét!

**G2** Egy kocka alakú, tetején és oldalán csokival egyenletesen bevont tortát úgy szeretnénk elosztani $n$ gyerek között, hogy mindenkinek ugyanannyi sütemény, és ugyanannyi csokibevonat jusson.
Hogyan tehetjük ezt meg, ha $n$ = 2, 3, 4, 5?
Megoldható-e a feladat tetszőleges természetes szám esetén?

**G3** Mutasd meg, hogy egy háromszög hozzáírt köreinek középpontjai által alkotott háromszög magasságpontja megegyezik az eredeti háromszög beírt körének középpontjával!

**G4** Egy négyzetalapú hasáb egyik alapjának csúcsait összekötjük a szemközti négyzet középpontjával és fordítva. A keletkezett két négyzetalapú gúla közös részének mennyi a területe és a térfogata?

**G5** Egy *ABCD* négyszög oldalait megharmadoltuk. Kössük össze a szemközti oldalakon levő, az *A*-hoz illetve *D*-hez, valamint az *A*-hoz illetve *B*-hez közelebbi harmadolópontokat! Milyen arányban osztja fel a metszéspont a két szakaszt?

**G6** Adott két egyenes, *p* és *m*, ahol *p* egy patak, *m* egyik félsíkja pedig egy mező. Adott J pontból merre felé menjen Jancsi, hogy a legrövidebb úton haladjon, és közben érintse a patakot és a mezőt is.

**G7** Adottak egy háromszög oldalai, $a \leq b \leq c$ és az egységszakasz.
Mutasd meg, hogy $m_a \geq m_b \geq m_c$!
Szerkeszd meg az $1/m_a$, $1/m_b$, $1/m_c$ hosszúságú szakaszokat! Mutasd meg, hogy a belőlük szerkesztett háromszög hasonló a magasságokból szerkesztett háromszöghöz!

**G8** Mutasd meg, hogy az *ABC* háromszög *A* csúcsából induló szögfelező felezi a *BC* ívet!

**G9** Az aranytéglalap olyan, hogy oldalai egy aranymetszet két szakasza, azaz a rövidebb és a hosszabb oldal aránya megegyezik a hosszabb oldalnak és a két szakasz összegének az arányával.
Mutasd meg, hogy ha a téglalapból levágsz egy négyzetet, majd a maradék kis téglalapból ismét levágsz egy kis négyzetet, és ezt így folytatod tovább, az eljárás soha nem ér véget!

**G10** Egy háromszög oldalai $a$, $b$ és $c$.
Add meg az oldalak segítségével a súlyvonalak hosszát.

**G11** a) Adott egy egyenes, rajta egy *A* pont és egy *P* pont az egyenesen kívül.
Szerkessz kört, mely áthalad a *P* ponton és érinti az egyenest az *A* pontban!
b) Adott egy egyenes, rajta egy *A* pont és az egyenesen kívül egy *k* kör.
Szerkessz kört, mely érinti a *k* kört és érinti az egyenest is, az *A* pontban.