1. feladatsor

1. Igazoljuk, hogy ha $p \geq 5$ prímszám, akkor $p^2 - 1$ osztható 24-gyel.

2. Határozzuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $14p^2 + 1$ is prímszám.

3. Igazoljuk, hogy egy N természetes szám osztóinak száma legfeljebb $2\sqrt{N}$.

4. Milyen maradékot ad 2^{100}

a) 3-mal való osztáskor;

b) 5-tel való osztáskor?

5. *a)* Milyen pozitív egész n-ekre lesz $2^n - 1$ egy egész szám négyzete?

b) Oldjuk meg az *a)* feladatot $2^n + 1$-re.

6. Milyen maradékot adhat egy egész szám köbe 9-cel való osztáskor?

7. (Folytatás) Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan egész szám van, amely nem állítható elő három egész szám köbének összegeként!

8. Tegyük fel, hogy $2^p - 1$ prímszám (p természetes szám). Igazoljuk, hogy ekkor p is prímszám.

9. Tegyük fel, hogy $2^n + 1$ prímszám (n természetes szám). Igazoljuk, hogy ekkor n 2-nek valamely hatványa ($n = 2^k$, ahol k természetes szám).

10. Igazoljuk, hogy ha n természetes szám, akkor $7^{2n} - 4^{2n}$ osztható 33-mal.

11. Milyen n természetes számra igaz, hogy 323 osztója $20^n + 16^n - 3^n - 1$-nek?

12. Igazoljuk, hogy $n^5 - 5n^3 + 4n$ tetszőleges egész n-re osztható 120-szal.

13. Tegyük fel, hogy 15 prímszám számtani sorozatot alkot. Igazoljuk, hogy a sorozat két szomszédos tagjának különbsége 30 000-nél nagyobb.

14. Igazoljuk, hogy $5^{2n+1} + 3^{n+2} \cdot 2^{n-1}$ tetszőleges n természetes számra osztható 19-cel.

15. Igazoljuk, hogy egy egész szám négyzetének két utolsó jegyét összeszorozva páros számot kapunk.

16. Van-e olyan egész szám, amelynek négyzete négy egyenlő, nullától különböző számjegyre végződik.

17. Igazoljuk, hogy ha $n > 1$ egész szám, akkor $n^4 + 4$ összetett szám.

18. Igazoljuk, hogy ha három egész szám összege osztható hattal, akkor a három egész szám köbének összege is osztható hattal.

19. Igazoljuk, hogy $\frac{m}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{6}$ bármely egész m-re egész szám.

20. Egy pozitív egész számot a tízes számrendszerben 300 1-essel és bizonyos számú nullával írhatunk le. Lehet-e ez a szám teljes négyzet?

21. Legyen n természetes szám és b a 2^n szám utolsó számjegye; ekkor $2^n = 10a + b$. Igazoljuk, hogy ab osztható 6-tal.

22. 15 papírlap közül néhányat 10 részre vágtak, majd a kapott részek közül néhányat ismét 10 részre vágtak és így tovább. Végül összeszámolták, és azt találták, hogy

1971 papírdarab adódott a darabolások befejezésekor. Igazoljuk, hogy a számlálás helytelen volt.

23. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyet 2-vel, 3-mal, 5-tel, 7-tel vagy 11-gyel osztva maradékul mindig 1-et kapunk.

24. (Folytatás.) Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amelyet 2-vel, 3-mal, …, p_n-nel (p_n az n-edik prímszám) osztva, maradékul mindig 1-et kapunk.

25. (Folytatás.) Igazoljuk, hogy a prímszámok száma végtelen.

26. Igazoljuk, hogy akármilyen N-re létezik N egymást követő természetes szám, amelyek mindegyike összetett szám (azaz, bár végtelen sok prímszám van a természetes számok szorzatában van akármilyen hosszú szakasz, amelyben egyik szám sem prímszám).

27. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan prímszám van, amely 4-gyel osztva 3-at ad maradékul, azaz végtelen sok $4n+3$ alakú prímszám van. Igazoljuk, hogy végtelen sok $6n+5$ alakú prímszám van.

28. Igazoljuk, hogy végtelen sok olyan egész szám van, amely nem állítMó elő $p+n^2$ alakban, semmilyen p-re sem ($n>1$ egész, p prímszám).

29. Igazoljuk a $(2+1)(2^2+1)\dots(2^{2^n}+1) = 2^{2^{n+1}} - 1$ egyenlőséget.

30. Igazoljuk, hogy a $2^{2^0}+1=3$, $2^{2^1}+1=5$, $2^{2^2}+1=17$, …, $2^{2^n}+1$ sorozat bármely két tagja relatív prím. Vezessük le ebből a 25. feladat állítását.

31. Egy x szám egész részének azt a legnagyobb egész számot nevezzük, amely nem nagyobb mint x; x egész részét így jelöljük: $[x]$;

a) határozzuk meg a következő számok egész részét: $-1{,}5$; -2; 0; 1; $2\frac{1}{2}$; $3,99$

b) igazoljuk az egész rész következő tulajdonságait:

1. $[n+x] = n + [x]$, ha n egész szám,
2. $\left[\frac{ka}{b}\right] \geq k\left[\frac{a}{b}\right]$, ha k egész szám.

32. Igazoljuk, hogy pontosan $\left[\frac{N}{q}\right]$ olyan természetes szám van, amelyek nem nagyobbak az adott $N>0$ számnál, és a q természetes számmal oszthatók ($q<N$).

33. Igazoljuk, hogy ha $b>0$ egész szám, akkor

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{[a]}{b}\right] \qquad \text{ha} \qquad a \geq 0.$$

34. Jelöljük így az első a természetes szám szorzatát: $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Igazoljuk, hogy ha p prímszám, akkor legmagasabb hatványában, amellyel $n!$ még osztható, a kitevő $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^m}\right]$, ahol $p^m \leq n$, de $p^{m+l} > n$.

35. Igazoljuk, hogy $n!$ egyetlen n-re sem osztható p^n-nel, ahol p prímszám.

36. Igazoljuk, hogy $(n!)!$ osztható $(n!)^{(n-1)!}$-nal.

37. Adott két természetes szám: a és b. Ha a-t b-vel osztjuk, akkor r_1 maradékot kapunk. Ha b-t r_l-gyel osztjuk (nyilván $r_1 < b$), akkor r_2, maradékot kapunk, r_1-et r_2-vel osztva r_3 maradék adódik és így tovább. Igazoljuk, hogy ez a folyamat véges számú lépés után megszakad (azaz bizonyos n-re r_{n-1} osztható lesz r_n-nel), és az utolsó nem 0 maradék lesz a és b legnagyobb közös osztója.

38. (Folytatás) Igazoljuk, hogy bármely a és b egész számhoz található olyan m és n egész szám, hogy $ma + nb = d$, ahol d az a és b legnagyobb közös osztója. (Ha, speciális esetként a és b relatív prímek, akkor a feladat eredményéből következik, hogy van olyan m és n egész szám, hogy $ma + nb = 1$.)

39. Igazoljuk, hogy ha $2^p - 1$ és $2^q - 1$ relatív prímek, akkor p és q is relatív prímek és fordítva, ha p és q relatív prímek, akkor $2^p - 1$ és $2^q - 1$ is relatív prímek. Határozzuk meg $2^p - 1$ és $2^q - 1$ legnagyobb közös osztóját, ha p és q nem relatív prímek.

40. Igazoljuk, hogy ha m és n relatív prímek, akkor az $x^m = y^n$ egyenlet összes egész megoldásait az $x = t^n$, $y = t^m$ alakban adhatjuk meg, ahol t tetszőleges egész szám.

41. Igazoljuk, hogy $\lg 2$ irracionális szám.

42. Határozzuk meg azokat az a és b természetes számokat, amelyekre $\log_a b$ racionális.

2. feladatsor

1. Lehet-e egy háromszög A csúcsból induló súlyvonalának hossza egyenlő a b és c oldalakkal párhuzamos középvonalak hosszának összegével?

2. Hogyan lehet egy $ABCD$ négyszög AB és CD oldalának felezőpontjait összekötő szakasz hossza egyenlő a másik két oldal hosszának számtani közepével?

3. Igazoljuk, hogy bármely négyszög négy oldalfelező pontja által meghatározott konvex négyszög paralelogramma.

4. Adott két kör, K_1 és K_2, valamint egy e egyenes. Szerkesszünk az egyenessel párhuzamosan olyan egyenest, amelyből a két kör adott, a hosszúságú szeletet metsz ki (valamilyen módon). Diszkutáljuk a feladatot!

5. Igazoljuk, hogy egy egyenlő szárú háromszögben az alap egy pontjából a szárak egyenesére bocsájtott merőleges szakaszok hosszának összege az alap minden pontája ugyanakkora. Van-e az alap egyenesén más olyan pont, amelyre ez az összeg ekkore?

6. Határozzuk meg azon pontok mértani helyét a síkban, amelyeknek egy adott szög két szárától mért távolságainak összege egy adott a hosszúság. Diszkutáljuk a feladatot!

7. Adott a síkon egy K és egy L pont (kunyhó, ló), valamint egy f (folyó) egyenes.
A kunyhóból indulva valaki a lóhoz indul úgy, hogy közben a folyónál vizet merít a lónak. Milyen hosszúságú lehet legalább és legfeljebb az illető útvonala?
Megszerkeszthető-e tetszőleges hossz mellett az a P pont az egyenesen, amelyre a KPL töröttvonal hossza az adott hosszúsággal egyenlő? Diszkutáljuk a feladatot!

8. Tételezzük fel, hogy az előző feladatban a folyó különböző oldalán van K és L, valamint a folyó szélessége mindenütt d. A parton mely P pontban fektessük le azt, a folyón átívelő, a partjaira merőleges hidat, amely mellett a KPL törött vonal
a) a lehető legrövidebb; b) adott a hosszúságú?
Diszkutáljuk a feladatot!

9. Adott a síkon egy L_1 és egy L_2 pont (két ló), valamint egy f_1 és egy f_2 egyenes (két folyó).
Keressük meg azt a két, $K_1 \neq K_2$ pontot a két folyón, amlyekre a $L_1K_1K_2L_2$ töröttvonal hossza a lehető legrövidebb. Milyen feltételek mellett létezik ilyen? Diszkutáljuk a feladatot!

9. Adott egy kör, egy egyenes és egy pont. Húzzunk a ponton át olyan egyenest, amelynek az adott egyenessel és körrel való metszéspontja által meghatározott szakaszát az adott pont felezi. Diszkutáljuk a feladatot!

10. Adott egy egyenesszögnél kisebb szöget bezáró szög, a szárai között egy pont. Húzzunk a ponton át olyan egyenes, amely a szögtartományból a legkisebb területű háromszöget metszi ki!

11. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, amelynek csúcsai három koncentrikus körön vannak. Diszkutáljuk a feladatot!

12. Soroljuk fel az Apolloniosz-féle feladatkör eseteit. Melyek oldhatóak meg egyszerűen?

3. feladatsor

Skatulyaelv

1. Igazoljuk, hogy $n+1$ egész szám közül mindig kiválasztható kettő olyan, amelyek különbsége osztható n-nel.

2. a) Határozzuk meg az összes olyan n természetes számoat, amelyhez van olyan $111\ldots1$ típusú szám, amely osztható n-nel.

b) Mutassuk meg, hogy minden n természetes számhoz van olyan $111\ldots100\ldots0$ típusú szám, amely osztható n-nel.

3. Igazoljuk, hogy bármely 100 jegyű M számhoz található olyan 1970-nel osztható szám, amelynek első 100 jegye éppen M.

4. Igazoljuk, hogy 1000 egész szám közül ki lehet választani néhányat úgy, hogy ezek összege osztható legyen 1000-rel.

5. Igazoljuk, hogy a 6 pozitív egész hatványai négy utolsó számjegyeiből álló sorozat – valamely elemétől kezdve – periodikus.

6. Van-e 3-nak olyan pozitív egész kitevőjű hatványa, amelynek négy utolsó számjegye 0001?

7. a) Igaz-e, hogy 26 különböző, 50-nél nem nagyobb pozitív egész szám közül ki lehet választani kettőt, amelyek közül az egyik osztója a másiknak.

b) Igaz-e, hogy 25 különböző, 50-nél nem nagyobb pozitív egész szám közül ki lehet választani kettőt, amelyek közül az egyik osztója a másiknak.

8. Igazoljuk, hogy $n+1$ különböző, $2n$-nél nem nagyobb pozitív egész szám közül ki lehet választani 3-at úgy, hogy kettőnek az összege a harmadik.

9. a) Igazoljuk, hogy a Fibonacci-sorozat tagjainak három utolsó jegyéből álló sorozat periodikus.

b) Igazoljuk, hogy a Fibonacci-sorozat első egymillió tagja között van olyan, amelyik három 9-esre végződik.

4. feladatsor

Algebra

1. Oldjuk meg az alábbi lineáris egyenletrendszert! (a, b, c, h paraméterek)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ ax + by + cz &= h \\ a^2x + b^2y + c^2z &= h^2 \end{aligned}$$

2. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$$\sqrt[3]{\sqrt{5}+x} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-x} = \sqrt[3]{\sqrt{5}\cdot 5}$$

3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert!

$$\frac{xy}{5x+4y} = 6, \quad \frac{yz}{3y+5z} = 6, \quad \frac{zx}{2z+3x} = 8$$

4. Három egymásra következő egész számra teljesül, hogy páronként vett hányadosaik összege egész szám. Melyek lehettek ezek a számok?

5. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget:

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{x}{x-1}$$

Keressünk olyan megoldást, amelyben nem kell esetszétválasztással bíbeblődni!

6. Igazoljuk, hogy ha

$$x + y + z = a$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a},$$

akkor az x, y, z számok közül valamelyik biztosan egyenlő a -val.

7. Az $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ polinom gyökerei legyenek x_1, x_2, x_3. Tudjuk, hogy

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - 5 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 15$$

Melyik ez a harmadfokú polinom?

8. Oldjuk meg a nemnegatív egészek körében, $\sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 10$.

8. Igazoljuk, hogy amennyiben $a + \frac{1}{a}$ egész szám, akkor tetszőleges n természetes számra az $a^n + \frac{1}{a^n}$ is az.

4. feladatsor

Mely esetben áll fenn egyenlőség?
a) Hány valós a számra teljesül a feladat feltétele?
b) Hány racionális a számra teljesül a feladat feltétele?
c) Hány egész a számra teljesül a feladat feltétele?

9. Melyik „nagyobb”? x^{1000} vagy $1{,}001^x$?

10. Melyik „nagyobb”? $x^{1{,}001}$ vagy 1000^x ?

11. Lássuk be, hogy tetszőleges pozitív p, q, r, s számokra

$$1 < \frac{p}{p+q+s} + \frac{q}{p+q+r} + \frac{r}{q+r+s} + \frac{s}{p+r+s} < 2\,.$$

*12. (Arra az esetre, ha valaki unatkozna. ☺) Bizonyítsuk be, hogy ha $\frac{1}{a+b+c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, akkor minden páratlan n természetes számra $\frac{1}{a^n+b^n+c^n} = \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n}$.

5. feladatsor

Goniometrikus egyenletek

Gyakorlatok:

1. Határozzuk meg a $\sin(x+y)$, a $\sin(x-y)$, a $\cos(x+y)$, $\cos(x-y)$ kifejezéseket a $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ kifejezésekkel.

2. Az előző gyakorlat eredményeit felhasználva határozzuk meg a $\sin x + \sin y$, $\sin x - \sin y$, $\cos x + \cos y$, $\cos x - \cos y$ kifejezéseket a $\sin x$, $\sin y$, $\cos x$, $\cos y$ kifejezésekkel.

3. Határozzuk meg a következő szögfüggvények értékét: $\sin 18^\circ$, $\sin 36^\circ$, $\sin 54^\circ$, $\sin 72^\circ$ ($\cos 18^\circ$, $\cos 36^\circ$, $\cos 54^\circ$, $\cos 72^\circ$).

4. Melyik az a legkisebbb, fokokban kifejezve egész szög, amelynek a szinuszát (koszinuszát) zárt algebrai formulával ki tudjuk fejezni?

1. Igazoljuk, hogy $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

2. Bizonyítsuk be, hogy ha $\alpha + \beta = \omega$, akkor

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\omega = \sin^2\omega.$$

3. Igazoljuk, hogy $\sin 18^\circ \cdot \sin 234^\circ = -\dfrac{1}{4}$.

4.* Oldjuk meg a következő egyenleteket!

a) $\operatorname{tg} x + \sin x = 1$ *b)* $\operatorname{tg} x - \sin x = 1$

5. Oldjuk meg az egyenletet: $\operatorname{tg} 54^\circ(\operatorname{tg} 45^\circ - x) = 1$.

6. Mutassuk meg, hogy $\operatorname{tg} 20^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 60^\circ \cdot \operatorname{tg} 80^\circ = 3$

7.* Mutassuk meg, hogy ha α, β, γ egy háromszög három szöge, akkor

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} + 1,$$

valamint

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - 1.$$

8.* Mutassuk meg, hogy ha α, β, γ jelöli egy háromszög három szögét, akkor

$$\begin{vmatrix} -\cos\frac{\beta-\gamma}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & -\cos\frac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\gamma}{2} & \sin\frac{\gamma}{2} & -\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\frac{\beta-\gamma}{2} & -\cos\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \\ \cos\frac{\beta}{2} & \sin\frac{\gamma-\alpha}{2} & -\cos\frac{\beta}{2} \\ -\cos\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2} & \sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{vmatrix} = 0$$