Elemi matematika 4g

Előszó a feladatgyűjteményhez

Kötelező irodalom: Hegyvári Norbert, Hraskó András, Korándi József, Török Judit: Elemi matematika feladatgyűjtemény (ebben a félévben a 2.4, 3.5, 3.6, 6.3, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7 ás 6.8 feladatai). http://mathdid.elte.hu/bootstrap/jegyzetek/elemi_matematika_fgy.pdf

Ajánlott irodalom: Ambrus Gabriella, Munkácsy Katalin, Szeredi Éva, Vásárhelyi Éva, Wintsche Gergely: Matematika módszertani példatár http://mathdid.elte.hu/bootstrap/jegyzetek/modszertani_peldatar.pdf

Fontos tudnivalók: A feladatelemzés részletes szempontrendszere és részletes elemzések megtalálhatók a honlapunkon. http://mathdid.elte.hu/pic/feladat.pdf

Általános módszertani szempontok a kitűzött feladatok feldolgozásához:

– A feladatok megoldásában nem csupán a megoldás megtalálása a fontos, hanem a megoldáshoz vezető út tudatosítása annak érdekében, hogy egyrészt saját feladatmegoldó rutinunkat fejlesszük, másrészt a módszertani ismereteinket alakítsuk, bővítsük. Gyakoroljuk mások gondolkodásának követését és sajátjaink lehetőség szerint pontos megfogalmazását. A hibás gondolatok felismerése és javítása, a hiba megértetése is fontos feladat.

– Minden feladathoz keressünk lehetőleg többféle szintű, illetve megközelítésű (ötletű) megoldást.

– Gyűjtsük össze, hogy az egyes megoldásokhoz milyen ismeretekre van szükség, és ezek a tanítás során mely évfolyamokon, milyen összefüggésben kerülnek elő!

– Vizsgáljuk meg a feladatoknak a tananyaggal való kapcsolatát (feldolgozható-e; ha igen, hol; ha nem, miért nem; milyen feladatokkal tehetjük feldolgozhatóvá; milyen feladatok megoldásához nyújthat segítséget; feladható-e házi feladatnak stb.). Vizsgáljuk továbbá a feladatok esetleges „egyetemen tanult eszközökkel” történő megoldását és vessük össze az iskolai szintűekkel.

Keressük meg a hasonlóságot, a különbséget, és elemezzük a különbséget. A gyakorlat további célja, hogy az itt megszerzett probléma- megoldási stratégiák, módszertani, rendszerező ismeretek segítségével rutint szerezzünk egy-egy feladatot akár „ránézésre” történő megoldásában és a nehézségi szintjének meghatározásában.

Megjegyzés. A KöMaL-ban kitűzött C jelű feladatok a szerkesztők szándéka szerint a NAT-ban előírt tananyagra támaszkodnak. Nem egy közülük mégis nehéznek tűnik. Érdemes meggondolni, mi lehet ennek az oka.

Ennek a félévnek (amely az utolsó közös félév a közös, $4+1$ és $5+1$-es képzésben) a témái az aritmetika, elemi algebra, sorozatok, függvények és egyenlőtlenségek, szélsőérték feladatok, beleértve az elemi analízist (középiskola emelt szintje) is. A kitűzött feladatok között mind általános mind középiskolai szintűek találhatók. Jó kérdés itt is átgondolni mikor és kiknek lehet alkalmas a feladat. Külön hangsúlyt helyezünk a szélsőérték-feladatok lehetőleg többféle megoldására. A feladatsor végén érettségi feladatok és alkalmazások is szerepelnek.

A beadandó feladatról. A beadandó lényege, hogy a hallgatók tanúbizonyságot tegyenek arról, hogy megértették a feladatok tanításban betöltött helyét és szerepét. Ezért a beadandó vagy egy kevésbé nyilvánvaló megoldású (pl. KöMaL) feladat részletes, a megadott szempontok szerinti elemzése, vagy egy meghatározott témájú KöMaL feladathoz kapcsolódó, azt előkészítő feladatsor készítése és annak elemzése.

1. Pre-algebra

5–6. osztály

1. A rovaroknak 3 pár, a pókoknak 4 pár, a rákoknak 5 pár lábuk van.

a) Hány lába van összesen 3 rovarnak, 4 póknak és 5 ráknak? A három rovar lábainak száma:

A 4 pók lábainak száma:

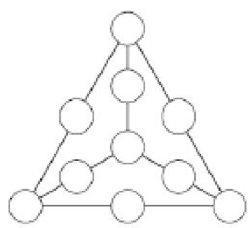
Az 5 rák lábainak száma:

Ez összesen:

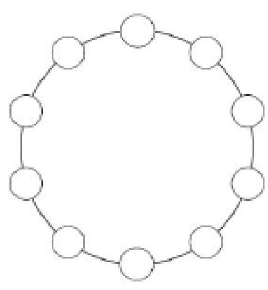
b) Egy képen rovarok, pókok és rákok láthatók. Mindegyikből van legalább egy a képen, és összesen 46 lábat látunk. Melyikből mennyi lehet a képen?

Rákok száma	Pókok száma	Rovarok száma

2. Írjátok be az ábrán látható tíz körbe 1-től 10-ig az egész számokat úgy, hogy a három kis háromszög kerületén lévő hat-hat szám összege mindig 28 legyen!



3. A 10 kis körbe írd be 1-től 10-ig az egész számokat úgy, hogy bármely szomszédos számpár összege egyenlő legyen a velük átellenes számpár összegével!



4. Gondolj egy számra! Adj hozzá 2-t! Szorozd meg 9-cel! Oszd el 3-mal! Vonj ki belőle 12-t! Oszd el 3-mal! Most mennyi az eredmény?

Az eredmény ismeretében könnyen megmondható a gondolt szám. Elemezd a gondolatsort, és add meg a kitalálás „receptjét”!

Jelölje a gondolt számot ♣. Az utasítások után kapott értékek így alakulnak:

Adj hozzá 2-t!

Szorozd meg 9-cel, amit így is írhatunk:

Oszd el 3-mal!

Vonj ki belőle 12-t!

Oszd el 3-mal!

Ez a gondolt számnál:

Vagyis a kitalálás „receptje”:

5. A Múzeumkertben golyózó Pál utcai fiúktól a Pásztor testvérek golyókat vettek el. Nemecsektől és Richtertől ugyanannyit, Kolnaytól ennél 2-vel többet, Barabástól 4-gyel kevesebbet, összesen 30-at. Mennyi a Pál utcaiak vesztesége egyenként?

6. A 6. a osztály kosárlabdacsapata 66 pontot ért el az egyik mérkőzésén egy-, két-, illetve hárompontos dobásokból. Az egy, két, illetve három pontot érő dobások számának aránya 2 : 3 : 1. Hány egy-, két-, illetve hárompontos találatot ért el a csapat?

7. Egy fizetőparkoló díjszabása:

Az első óra: 400 Ft. Minden további megkezdett óra: 200 Ft.

a) Mennyibe kerül ebben a parkolóban egy 6,5 órás parkolás?

b) Mennyi ideig parkoltunk, ha 2400 Ft-ot fizettünk?

8. A legenda szerint Diophantosz sírfelirata hirdette, hány évig élt e földön. Számold ki te is!

„Vén Diophantoszt rejti e kő. Bár ő maga
szunnyad, megtanította a sírt, mondja el élte sorát.
Évei egyhatodát tölté ki a gyönge gyerekkor, még
feleannyi lefolyt, s álla szakálla kinőtt. Egyheted eltelt
még, és nászágy várta a férfit, elmúlt újra
öt év, és fia megszületett.
Ez feleannyi napig láthatta a fényt idefenn, mint atyja, mivel neki
így szabta az isteni sors.
Őt gyászolva a sír felé hajlott agg Diophantosz, négy
évvel később ő is elérte a célt.
Mondd, hány esztendőt élt hát meg gyászban,
örömben, S itta az édes fényt, míg hona lett ez a sír?”

7–8. osztály

9. A Vidám családban három gyerek van. A családtagok életkorának összege 116 év. A gyerekek életkorának aránya 5 : 4 : 3. Az apa 4 évvel idősebb az anyánál. Ha az apa életkorának kétszereséhez 4-et adunk, 100-at kapunk.

a) Hány évesek a szülők?

b) Hány éves a legidősebb gyermek?

c) Hány év múlva lesz a legkisebb gyerek feleannyi idős, mint az anya most?

10. Nyári munkával és újságkihordással összegyűjtöttem 70 000 Ft-ot, de a laptop, amit kinéztem magamnak 100 000 Ft-ba kerül. A boltban ki tudom fizetni a fennmaradó összeget hathavi részletre, de akkor a kamat miatt 15%-kal többe kerül.

a) Mennyivel kell így többet fizetnem a laptopért?

b) Hány forint lesz a havi törlesztőrészlet, ha fél évre vettem fel a hitelt, és minden hónapban ugyanannyit fizetek?

11. „Falu végén kurta kocsma,
Oda rúg ki a Szamosra[. . .]”

Tudod-e, mire utal Petőfi Sándor versében a „kurta kocsma” kifejezés? A XVIII. században a parasztok nem egész évben, hanem csak rövidebb ideig árulhatták saját borukat a kocsmákban. Az év maradék részében a földesúré volt a borkimérés joga és haszna is.

a) Hány napon keresztül árulhattak bort a parasztok a maguk hasznára, ha az év 1/3 részénél 11 nappal kevesebb ideig volt övék a borkimérés joga?

b) A haszon hányad része lehetett a földesúré?

12. Péter, Pál és Panka hármas ikrek. Péter születési súlya 40 grammal több, mint Pankáé, de 60 grammal kevesebb, mint Pál súlya. Mikor mindhármukat egyszerre mérték meg, a kijelző 8750 grammot mutatott. Hány grammal születtek a gyerekek?

13. Gondoltam egy számra. A szám négyszeresénél 66-tal nagyobb szám fele éppen 100. Melyik számra gondoltam? Oldjuk meg próbálgatással, lebontogatással és mérlegelvvel is!

14. Ali, Bali és Cili életkora egész szám. Hány éves Ali, Bali és Cili? Keresd meg az összes megoldást, ha a következő négy állítás közül pontosan az egyik hamis!

a) Ali és Bali együtt 22 évesek.

b) Bali és Cili együtt 33 évesek.

c) Ali és Cili együtt 26 évesek.

d) Ali, Bali és Cili együtt 39 évesek.

15. Ha a kádban fürdést egy ember egyetlen hónapra zuhanyzásra cseréli, akkor körülbelül 2,5 m^3 vizet takaríthat meg. Legalább hány napon kellene 10 000 000 embernek fürdés helyett zuhanyoznia, hogy egy Velencei-tónak megfelelő vízmennyiséget spórolhassanak meg? (A Velencei-tó vízkészlete kb. 41 millió m^3.)

16. Két hordó áll a pincében. Az egyikben 100 liter víz van, a másikban pedig 100 liter alkohol.

Zsiga egy merőkanálnyi vizet átmer az alkoholoshordóba. Megkeveri, majd ebből a keverékből merít át egy mérőkanálnyit a vizeshordóba. A vizeshordóban lesz több alkohol, vagy az alkoholoshordóban lesz több víz?

17. Latouret őrmester kivezényli Galamb közlegényt, hogy ásson egy 0,5 m széles, 6 m hosszú, 1,5 m mély lövészárkot a sivatag szélén. Egyedül 24 óra alatt végezne az ásással.

a) Galamb barátja, Troppauer Hümér, a költő, szintén 24 óra alatt ásná ki egyedül a lövészárkot. Mennyi idő alatt ásnák ki ketten együtt?

b) Közös barátjuk, Minkusz is 24 óra alatt végezne a munkával egyedül. Mennyi idő alatt ásnák ki hárman együtt?

c) Ha az ezred minden katonája 24 óra alatt ásná ki a lövészárkot, akkor igaz-e, hogy ezer katona 86,4 másodperc alatt ásná ki az árkot együtt?

18. Én egy óra alatt összepakolom a lakást, neked viszont másfél óráig tart. Csináljuk meg együtt! – javasolja Judit az öccsének. Hány perc alatt végeznek, ha közösen raknak rendet?

19. A városi sportpályának három különböző teljesítményű és márkájú fűnyíró robotja van. Az Atolos 3 óra alatt, a Portolosz 4 óra alatt, az Aramosz 6 óra alatt nyírja le a füvet a focipályán.

a) Hány perc alatt végez a fűnyírással az Atolosz és a Portolosz, ha együtt dolgoznak?

b) Hány perc alatt vágja le a füvet a Portolosz és az Aramosz?

c) Mennyi idő kell a három robotnak, ha egyszerre dolgoznak?

20. Írjunk a $7*****9$ tízes számrendszerbeli számban a $*$-ok helyére számjegyeket úgy, hogy bármely három szomszédos számjegy összege 20 legyen.

21. Írjunk az 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 100 kifejezésben a számjegyek közé + és − jeleket vagy semmit úgy, hogy igaz legyen az egyenlőség.

Egy megoldás a következő: 123 − 4 − 5 − 6 − 7 + 8 − 9 = 100. Keressünk minél több megoldást.

22. Az alábbi feladat egy tankönyvben szerepel:

Az ötfős Kertész család síelni megy Ausztriába. Együtt készülődik apa, anya, a 4,5 éves Geri, a 9 éves Alma és a 11 éves Dia. A sípályát már kiválasztották, a síbérleteket pedig interneten keresztül előre kifizették, mert így olcsóbb volt. Most szállást keresnek. Az egyik lehetőség, hogy megszállnak Magyarországon, és napi 100 km-t autóznak (50 km-t a sípályáig, majd ugyanennyit vissza a szállodáig). A másik lehetőség, hogy megszállnak egy osztrák szállodában a sípálya mellett. Az árakat táblázatba foglaltuk:

	Felnőtt	0–4 éves gyerek	4–8 éves gyerek	8–14 éves gyerek
Magyar szálloda	7500 Ft/fő/éj (félpanzióval)	ingyenes	a felnőtt ár 50%-a	a felnőtt ár 70%-a
Osztrák szálloda	30 euró/fő/éj (félpanzióval)	ingyenes	a felnőtt ár 40%-a	a felnőtt ár 75%-a

a) Számold át forintra az euróban megadott osztrák árakat! (Nézz utána az interneten, hány Ft-ért tudsz eurót váltani!)

b) Számold ki, melyik szállodában mennyibe kerül 1 éjszaka az 5-fős családnak!

c) Mennyibe kerül a napi 100 km megtétele, ha az autó 7,6 liter benzint fogyaszt 100 km-en? (Nézz utána az aktuális benzinárakna!)

d) Számold ki, mennyibe kerülne egy 5-napos, 4-éjszakás szállás a Kertész családnak Magyarországon és Ausztriában! A magyarországi szállás esetén a plusz benzinköltséget is add hozzá a költségekhez!

e) Mennyibe kerülne ez a túra a te családodnak?

f) Hány forinttal kell kevesebbet fizetni az osztrák szállodában, ha a szállás félpanzió nélkül csak 22 euró/fő/éj egy felnőttnek?

g) Ha a Kertész család az árat félpanzió nélkül kéri, itthonról kell ennivalót vigyen, ami 35 000 Ft plusz költség. Mennyibe kerül ezzel együtt a szállás és az étkezés?

h) Te melyik szállodát választanád? Miért? Indokold meg a választásodat!

Elemezze a feladatot! Vizsgálja meg a következő kérdéseket: Milyen matematikai ismeretek, készségek szükségesek a feladat megoldásához? Melyik évfolyamon várható el a feladat megoldása? Nyitott vagy zárt feladatnak tekinthető-e? Mennyi lehet a feladat megoldásának időigénye? Mennyire épül egy-egy részfeladat egy korábbira (pl. veszíthet-e részpontszámot a tanuló)? Milyen további kérdéseket lehet felvetni a feladattal kapcsolatban? Stb., keressen további elemzési szempontokat!

2. Sorozatok

28. Egy számsorozat bármely három szomszédos tagjának szorzata megegyezik a középső szám négyzetével. Az első öt elem szorzata azonos a második öt elem szorzatával, ami éppen 2. Határozzuk meg a sorozat 2005. tagját!

29. Egy számtani sorozat nyolcadik tagja 8, differenciája 3. Hány tagja van a sorozatnak 500 és 700 között?

30. Egy számtani sorozat első eleme -210, n-edik eleme 228. A közbülső tagok összege 45. Hány közbülső tag van? Írjuk fel az első n tagot.

31. Négy szám összege 8, szorzata -15, a négy szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a sorozat?

32. Készítsünk 3×3-as bűvös négyzetet az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számokból! A bűvös négyzetben a sorokban, az oszlopokban és a két főátlóban álló számok összege megegyezik; ez az ún. bűvös állandó. (A feladat első ismert megoldása több mint háromezer évvel ezelőtt írott kínai könyvből származik.)

33. Mutassuk meg, hogy ha kilenc szám számtani sorozatot alkot, akkor mindig készíthetünk e számokból 3×3-as bűvös négyzetet!

34. Hány oldalú az a sokszög, amelynek szögei egy olyan számtani sorozat egymást követő tagjai, amelynek első tagja 120° a differenciája pedig 5°?

35. Egy $\{a_n\}$ mértani sorozat második tagja 6, ötödik tagja $18\sqrt{3}$. Hány 1000 és 3000 közé eső tagja van a sorozatnak?

36. Egy mértani sorozat első hét tagjából az első három elem összege 26, a három utolsó elem összege pedig 2106. Mennyi a hét tag összege?

37. 10 évre vonatkozóan összehasonlították két vállalat termelését. Kezdetben mindkét vállalat termelése egyenlő volt, s a 10. év végére mindkét vállalat megduplázta termelését. Az I. vállalat termelése évente mindig ugyanannyival növekedett, a II. vállalat növekedése minden évben ugyanannyi százalékos volt.

a) Mutassuk meg, hogy az I. vállalat többet termelt a 10 év alatt.

b) Azonos ütemű fejlődést feltételezve, hány év múlva „előzi meg” a II: vállalat össztermelése az I. vállalatét?

38. Egy számtani és egy mértani sorozatnak közös az első és a második eleme; a mértani sorozat harmadik eleme 1-gyel nagyobb a számtani sorozat harmadik eleménél, és 3-mal nagyobb a mértani sorozat első eleménél. Írjuk fel mindkét sorozat első három elemét.

39. Három szám mértani sorozatot alkot, összegük 26. Ha az elsőhöz 1-et, a másodikhoz 6-ot, a harmadikhoz 3-at adunk, a kapott három szám számtani sorozatot alkot. Melyik ez a három szám?

40. Egy erdőben a faállomány egy időpontban 10 000 m^3. Ettől kezdve a faállomány 20 éven át átlagosan 6%-kal gyarapodik. A 20. év végén ritkítás céljából kivágják az állomány 10%-át. Ettől kezdve a gyarapodás 15%-os lesz. A 10%-os ritkítást a 23. és a 26. év végén is megismétlik. Az évi gyarapodás 10%-os marad. Mennyi fát termelnek ki összesen a három ritkítás alkalmával, és mekkora lesz a faállomány a 26. év végére?

41. Egy cég alkalmazottja belépéskör évi 1 800 000 Ft fizetést kap évi 8%-os emeléssel. Mekkora a havi (fix) fizetése a 10-dik évben?

42. Egy számtani sorozat második tagja 14 kilencedik tagja -1. Adjuk meg az első három tagját a sorozatnak.

43. *a)* Ismert, hogy 1-től n-ig a számok összege N. Hogyan határozható meg N-ből n?

b) Ismert, hogy $\binom{n}{2} = N$. Hogyan határozható meg N-ből n?

44. Legyen $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, és készítsük el ebből az egymást követő tagok összegéből álló K sorozatot; azaz ha például $X = \{1, 2, 3\}$, akkor $K = \{1 + 2, 2 + 3, 1 + 2 + 3\}$.

a) Lehetnek-e egyenlők a felírt összegek között?

b) Hány 2-, 3-, … n tagú összeget képezünk? Jelölje a_k a k tagú összegek számát. Legyen $a_1 = 0$ (üres összeg).

c) Írjuk fel az (a_k) sorozat összegsorozatát. (Egy (a_k) sorozat összegsorozata az a (b_k) sorozat, amelyre $b_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k$.) Adjunk explicit képletet (b_k)-ra.

d) Indokolja kombinatirikus úton a b_n-re kapott választ.

e) Írjuk fel a k tagú összegek közül a t-ediket.

45. 200 000 HUF-ot teszünk a bankba havi 0,5%-os kamattal, de csak az év végén vesszük ki a pénzünket. Mennyit kapunk kézhez, ha a kamatadó 0,1%?

46. Piréziában 200 000 PIT (piréz tallér) bankbetétnél ugyancsak havi lekötéssel az év végén kivett pénz 203 000 PIT. Ott nincs bankadó. Mekkora a havi kamat?

47. Mennyi a 8, −4, 2, … mértani sorozatból képezett sor hetedik tagja?

48. Készítsük el a következő halmazokat: Legyen H_0 a $[0, 1]$ szakasz. Osszuk három egyenlő részre e szakaszt, a középső fölé rajzoljunk egy szabályos háromszöget, és hagyjuk el az alapját (azaz az $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ szakaszt). Így megkaptuk H_1-et, ami négy $\frac{1}{3}$ hosszúságú szakaszból áll. Ismételjük meg az előbbi eljárást e négy kis szakasszal, ez lesz H_2, és így tovább az n-edik lépésben legyen ez a töröttvonal-halmaz H_n.

Mekkora a H_n töröttvonal hossza?

Útmutatás: Jelölje t_n az n-edik lépésben kapott töröttvonal hosszát, és használjunk rekurziós képletet!

49. Két, egymástól 30 km távolságban levő barát egymással szemben biciklire pattan, és elindulnak egymásfelé. Sebességük 10-10 km/h. Az indulás pillanatában egyikük orráról, kétszer olyan gyorsan mint ők, egy légy indul el a másik orra felé. Amikor odaér, abban a pillanatban visszaindul az első barát felé (az orrát keresve). Majd amikor elérte, megfordul és így tovább, a két biciklista találkozásáig. Összesen hány km-t repül a légy?

3. Rekurzív sorozatok; Fibonacci sorozat

54. Egy sorozat tagjaira: $a_1 = 4$; $a_{n+1} = 3a_n - 2$. Adjunk explicit képletet a_n-re!

55. Egy sorozat tagjaira: $a_1 = 3$, $a_2 = 6$; $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n - 1$. Mutassuk meg, hogy $a_n = 2^n + n$!

A Fibonacci sorozatot az $F_1 = F_2 = 1$; $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$; $n \geq 1$ rekurzióval definiáljuk.

49. Bizonyítsuk be, hogy $F_{n+2} - 1 = F_1 + F_2 + \ldots + F_n$; $n \geq 1$!

50. Bizonyítsuk be, hogy $F_{n+1}F_n = F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2$; $n \geq 1$!

51. Bizonyítsuk be, hogy $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$!

52. Bizonyítsuk be, hogy $F_n < \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$; $n \geq 2$ és $F_n > \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n$; $n \geq 1$ esetén!

53. Vegyük észre, hogy

$$\frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2}, \quad \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1} \quad \text{és} \quad \frac{3}{2} < \frac{2}{1}; \quad \text{illetve} \quad \frac{F_3}{F_2} = \frac{2}{1}, \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1} \quad \text{és} \quad \frac{2}{1} > \frac{1}{1};$$

$$\frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5}, \quad \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3} \quad \text{és} \quad \frac{8}{5} < \frac{5}{3}; \quad \text{illetve} \quad \frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3}, \quad \frac{F_4}{F_3} = \frac{3}{2} \quad \text{és} \quad \frac{5}{3} > \frac{3}{2};$$

$$\frac{F_7}{F_6} = \frac{13}{8}, \quad \frac{F_6}{F_5} = \frac{8}{5} \quad \text{és} \quad \frac{13}{8} > \frac{8}{5} \quad \text{stb.}$$

Bizonyítsuk be, hogy általában is minden $n \geq 1$-re $\frac{F_{2n+2}}{F_{2n+1}} < \frac{F_{2n+1}}{F_{2n}}$ és $\frac{F_{2n+1}}{F_{2n}} > \frac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$.

4. Nevezetes egyenlőtlenségek

1. Mutassuk meg, hogy egy pozitív számnak és reciprokának összege mindig nagyobb vagy egyenlő mint 2.

2. Mekkora a legnagyobb területű téglalap, amelyet egy 4 cm hosszúságú spárgával körül tudunk keríteni?

3. Egy patak partján egy 3200 m^2 nagyságú, téglalap alakú kertet szeretnénk elkeríteni. Mekkorának válasszuk a téglalap oldalait, hogy a legrövidebb kerítésre legyen szükség? (A patakparton nem állítunk kerítést.)

4. Az R sugarú gömbbe írható körhengerek közül melyiknek a legnagyobb a palástja? (Akkor gömbbe írható egy körhenger, ha a fedő körlapjai a gömbre illeszkednek.)

5. Egy autós A városból B-be utazik, majd ugyanazon az úton vissza. Kocsija odafele 10 km-enként, visszafele 15 km-enként fogyasztott egy-egy liter benzint. Átlagosan mekkora utat tudott 1 liter benzinnel megtenni?

6. Igazoljuk, hogy az $ABCD$ trapézban az $a = AB$ és a $c = CD$ oldalak hosszának

a) számtani közepe a középvonal hossza;

b) mértani közepe annak a szakasznak a hossza, amely párhuzamos az alapokkal, és két egymáshoz hasonló trapézra szeli az eredeti trapézt;

c) négyzetes közepe annak a szakasznak a hossza, amely párhuzamos az alapokkal, és az eredeti trapézt két egyenlő területű trapézra vágja;

d) harmonikus közepe annak a szakasznak a hossza, amely párhuzamos az alapokkal, és illeszkedik az átlók metszéspontjára.

7. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget, ha a, b, c pozitív: $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$

8. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget, ha a, b, c pozitív: $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c) \geq 16abc$

9. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget, ha a, b, c pozitív: $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ac}{a+c} \leq \frac{a+b+c}{2}$

10. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget, ha a, b, c pozitív: $ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c) \geq 6abc$

11. Igazoljuk a következő egyenlőtlenséget, ha a, b, c pozitív: $8(a^3+b^3+c^3) \geq 3(a+b)(a+c)(b+c)$

12. Egy egység oldalú négyzetben n db kis négyzetet helyeztünk el úgy, hogy semelyik kettőnek nincs közös belső pontja. Igazoljuk, hogy a négyzetek oldalhosszúságának összege legfeljebb $\sqrt{n}$!

13. Bizonyítsuk be, hogy

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n; \qquad n \in \mathbb{N}.$$

14. Pistiéknél otthon négy dobozban tartják a pénzt. Egy-egy dobozban azonos címletű bankjegyek vannak: az első dobozban 500 Ft-osok, a második dobozban 1000 Ft-osok, a harmadik dobozban 2000 Ft-osok, a negyedik dobozban 5000 Ft-osok. Pistinek jutalomként szülei megengedik, hogy valamelyik dobozból 3, két másik dobozból 2-2, a hátralevő dobozból pedig 1 bankjegyet kivegyen. Pisti választhatja meg a dobozokat. Hogy válasszon, hogy a lehető legtöbb pénzhez jusson? Milyen választás esetén kapja a legkevesebb pénzt?[1]

15. Hol van a hiba a következő okoskodásban? Tekintsük a pozitív egész számok halmazát. Azt állítjuk, hogy ebben a halmazban az 1 a legnagyobb szám. Valóban, bármelyik 1-nél nagyobb k egész számot tekintjük is maximálisnak, ennek a négyzete $k^2 > k$. Mivel k^2 is pozitív szám, k nem lehet maximális, tehát 1 a legnagyobb pozitív egész szám.

16. Két vektorról a következőket tudjuk: $\mathbf{v}_1$ koordinátái 3, 4, 12 valamilyen sorrendben, $\mathbf{v}_2$ koordinátái 2, 5, 14 valamilyen sorrendben. Határozzuk meg a két vektor által bezárt szöget, ha a skaláris szorzat maximális, illetve ha minimális.

17. Bizonyítsuk be, hogy ha x, y, z pozitív valós számok, akkor

a) $xy + xz + yz \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}$!

b) $\frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} \geq x + y + z$!

18. Mutassuk meg, hogy az a, b, c pozitív valós számokra teljesül, hogy

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq \frac{3}{2}!$$

19. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c pozitív valós számok, akkor

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2} \geq \frac{a+b+c}{3}!$$

20. Mutassuk meg, hogy ha a, b, c pozitív számok, akkor

$$a+b+c \leq \frac{a^2+b^2}{2c} + \frac{b^2+c^2}{2a} + \frac{a^2+c^2}{2b} \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}!$$

21. Bizonyítsa be a Cauchy-egyenlőtlenséget! Lehet-e ezt középiskolában (pl. szakkörön) tanítani? Milyen fogalmak, állítások szükségesek ehhez?

22. Legyenek a_1, a_2, a_n pozitív valós számok, amelyekre $\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1$. Bizonyítsa be, hogy ekkor

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \geq n^2.$$

[1] Lásd a Szűcs Adolf-egyenlőtlenséget: Legyenek $a_1 < \ldots < a_n$, $b_1 < \ldots < b_n$ pozitív valós számok. Az $a_1b_1 + \ldots + a_nb_n$ összeg maximális, ha a_i és b_i egyformán szigorúan monoton növő, illetve csökkenő sorozatok, és minimális, ha a_i és b_i egyike szigorúan monoton nő, a másik szigorúan monoton csökken. Bizonyítsuk be!

23. Legyenek a_1, a_2, a_n pozitív valós számok, és tegyük fel, hogy $\prod_{k=1}^{n} a_k = a \neq 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(\log_a a_1)^2 + (\log_a a_2)^2 + \ldots + (\log_a a_n)^2 \geq \frac{1}{n}.$$

24. Legyenek az a, b, c, d, e olyan valós számok, amelyekre $a + b + c + d + e = 20$ és $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 100$. Állapítsuk meg, hogy mi az e szám maximális értéke! (Egy ötlet a megoldáshoz: a jobb oldalát a Cauchy-egyenlőtlenség segítségével becsüljük felülről.)

25. Legyen a és b két pozitív szám, amelyekre $a + b = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}!$$

26. Legyen a, b és c három pozitív szám, amelyekre $a + b + c = 1$. Igazoljuk, hogy ekkor

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{c}\right)^2 \geq \frac{100}{3}!$$

27. Bizonyítsuk be teljes indukció segítségével a Bernoulli-egyenlőtlenség alábbi alakját:

Ha $a > -1$ valós szám, akkor bármely $n \in \mathbb{N}^+$ esetén teljesül az

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

egyenlőtlenség.

5. Függvények

56. $F(x)$-et majdnem periodikusnak nevezzük, ha létezik $m \neq 0$, hogy minden x-re $F(x + m) = -F(x)$. Igaz-e, hogy ekkor $F(x)$ periodikus is?

57. Tegyük fel, hogy egy -1-et és 0-t nem felvevő függvényre teljesül, hogy bármely $x \in \mathbb{R}$

$$f(x + 1) = \frac{f(x) - 1}{f(x) + 1}.$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ periodikus függvény

58. Legyen $f(x)$ $\alpha \neq 0$ szerint periodikus függvény $g(x)$ $\beta \neq 0$ szerint periodikus függvény, és tegyük fel, hogy α/β racionális szám.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor $f(x) + g(x)$ is periodikus!

59. Egy $f(x)$ függvényre teljesül, hogy $f(x + 1) + f(x - 1) = \sqrt{2} f(x)$.

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ periodikus!

60. Egy $f(x)$ függvényre teljesül, hogy $f(x + a) f(x) = b$, $ab \neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ periodikus!

61. Bizonyítsuk be, hogy az $y = \dfrac{1}{x}$ első síknegyedbe eső pontjaihoz húzott érintők egy 2 egység területű háromszöget metszenek le a tengelyekből!

62. Adjunk több (pl. analízis eszközeit felhasználó) bizonyítást a következő feladatra:

Bizonyítsuk be, hogy ha $a < b < c$, akkor az

$$(x-a)(x-b)+(x-a)(x-c)+(x-c)(x-b)=0$$

egyenletnek léteznek valós gyökei x_1, x_2, amelyekre $a < x_1 < b < x_2 < c$.

63. Oldjuk meg a $4^x = 2x+1$ egyenletet, és indokoljuk meg precízen a megoldásokat az analízis eszközeivel!

64. Tegyük fel, hogy $f(x)$ és $g(x)$ két nem azonosan nulla, valós együtthatós polinom, amelyekre teljesül, hogy minden x-re

$$f\left(x^2-x+2\right)=f(x)g(x).$$

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ páros fokú polinom.

65. Mi az $f(x)$ explicit alakja, ha $2f(x)+3f(1-x)=4x-1$ teljesül minden x-re?

66. Mi az $f(x)$ explicit alakja, ha $2f(x)-3f\left(\frac{1}{x}\right)=x^2$ teljesül minden $x\neq 0$ értékre?

6. Válogatott érettségi feladatok

67. Az f függvényt a következőképpen definiáljuk: $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+6x+5$. Számítsuk ki az $f(x)$ függvény és az x tengely által közrezárt síkidom területét!

68. Egy egyenlő szárú háromszög szárainak metszéspontja $C(0;7)$, a szárak hossza $\sqrt{53}$ egység. A háromszög másik két csúcsa, A és B, illeszkedik az $y=-\frac{1}{4}x^2+1$ parabolára.

a) Számítsa ki a másik két csúcsa, A és B koordinátáit!

b) Írjuk fel az egyik szár egyenesének egyenletét! Ennek az egyenesnek és a parabolának egy további közös pontja D. Határozza meg a D pont koordinátáit!

c) Mekkora területű részekre bontja az ABC háromszöget a parabola íve?

69. Legyen $f(x)=-\frac{4x^3}{a}+\frac{3x^2}{a}+\frac{2x}{a}-a$, ahol a pozitív valós szám.

a) Igazolja, hogy $\int\limits_0^a f(x)\,dx=-a^3+a$.

b) Mely pozitív valós a számokra teljesül, hogy $\int\limits_0^a f(x)\,dx\geq 0$?

c) Az x mely pozitív valós értéke esetén lesz a $g(x)=-x^3+x$ függvénynek lokális maximuma?

70. Kimaradt egy sorszám, sorszámugrás. Legyen p valós paraméter. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett f függvényt amelynek hozzárendelési szabálya $f(x)=-3x^3+(p-3)x^2+p^2x-6$.

a) Számítsa ki a $\int\limits_0^2 2f(x)\,dx$ határozott integrál értékét, ha $p=3$!

b) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az $x=1$ zérushelye legyen az f függvénynek!

c) Határozza meg a p értékét úgy, hogy az f függvény deriváltja az $x = 1$ helyen pozitív legyen!

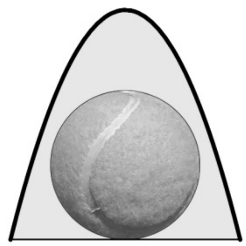
71. Adott az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 + 8x^3 - 270x^2 + 275$ függvény.

a) Igazolja, hogy $x = -15$-ben abszolút minimuma, $x = 0$-ban lokális maximuma, $x = 9$-ben lokális minimuma van a függvénynek!

b) Igazolja, hogy f konkáv a $]-9; 5[$ intervallumon!

c) A Newton–Leibniz-tétel segítségével határozza meg a $\int_0^5 f(x)\,dx$ határozott integrál értékét!

72. Két sportiskola legjobb teniszezői egyéni teniszbajnokság keretében mérték össze tudásukat. A verseny emblémáját parabolaszelet alakúra tervezték.



A koordináta-rendszerben készült tervrajzon a teniszlabda röppályáját jelképező $y = 4 - x^2$ egyenletű parabola, valamint az x tengely határolja a parabolaszeletet. Az emblémán látható még a teniszlabdát jelképező kör is, ennek egyenlete $x^2 + y^2 - 26y = 0$.

Hány százaléka a kör területe a parabolaszelet területének? A választ egészre kerekítve adja meg!

73. Adott az f és g függvény: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2$.

a) Számítsa ki a $2f + g$ függvény zérushelyeit!

b) Számítsa ki az f és g függvények grafikonja által közbezárt területet!

c) Számítással igazolja, hogy a $h\colon\ ]-\infty; 0{,}5\,[\ \to \mathbb{R}$, $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ függvény szigorúan monoton növekedő!

74. Adott a síkbeli derékszögű koordináta-rendszerben az $y = 3x^2 - x^3$ egyenletű görbe.

Igazolja, hogy ha $x \in\ ]0; 3\,[$, akkor $y > 0$!