BSC elemi matematika 1: kitűzött feladatok, összesen 89 feladat

Rövidítések:

- Egységes érettségi feladatgyűjtemény két kötetes (Konsept-H Kiadó): **K** és a sorszám;
- Emelt szintű érettségire felkészítő feladatgyűjtemény (Műszaki Kiadó): **E** és a sorszám;
- Matematika feladatgyűjtemény I. „Sárga”: **S** és a sorszám.

I. Kombinatorika és számelmélet 5 alkalom

Fejtörők

1. Egy gyalogos párhuzamosan haladva a villamossínekkel észrevette, hogy minden 12 percben megelőzi egy villamos, és minden négy percben találkozik egy szembejövő villamossal. A gyalogos is és a villamos is egyenletes sebességgel haladt. Hány perces időközben indultak ki a villamosok a végállomásról?
2. Öt darab teljesen egyforma külsejű 1 kg-os súly közül csak három pontos. A másik kettő közül az egyik 99 dkg-os, a másik 101 dkg-os. Egy kétkarú mérleg segítségével, más súlyok felhasználása nélkül, legfeljebb három méréssel határozzuk meg, hogy melyik a 99 dkg-os és melyik a 101 dkg-os súly.
3. Egy egyetemi hallgató 5 tárgyból vizsgázott. Átlageredménye 3,4 volt. Semmiből nem bukott meg, nem volt egynél több kettese, és nem kapott kettőnél több azonos osztályzatot. Milyen osztályzatokat kapott?

Kombinatorika

4. Legalább hány 13 tippes totószelvény kitöltésével biztosítható, hogy legyen legalább 5-ös találatunk?
5. Hány lottószelvényt kell kitöltenünk a biztos telitalálathoz?
6. Május 35-én a lottót úgy játsszák, hogy az $1, 2, 3, \ldots, 20$ számokból 18-at húznak ki.
   a) Hány szelvényt kell kitöltenünk a biztos telitalálathoz?
   b) Hány kell ahhoz, hogy biztosan legyen legalább 15 találatunk?
7. Két iskola legjobb sakkozói versenyeztek egymással. Mindenki mindenkivel egy játszmát játszott. Először az egy-egy iskolán belüli játszmákra: összesen 66 játszmára került sor. Az egész körmérkőzés 136 játszmából állt. Hány versenyző indult az egyik és hány a másik iskolából?
8. Hány olyan egymáshoz nem hasonló háromszög van, amely tompaszögű, nem egyenlő szárú és mindegyik szöge fokokban mérve egész számot ad?
9. Egy egyfordulós futballbajnokságon a csapatok sorrendjét a gólarányok figyelembevétele nélkül egyértelműen meg lehetett határozni. A bajnokságon volt olyan csapat, amelyet a nála jobb helyezést elért csapatok valamelyike nem győzött le. Bizonyítsuk be, hogy a bajnokság folyamán volt döntetlen mérkőzés is.
   (Egyfordulós futballbajnokságon minden csapat minden csapattal egyszer játszik. Minden egyes mérkőzés után a győztes csapat két pontot, döntetlen esetén mindkét csapat egy-egy pontot kap.)
10. Hány téglalapot lehet kijelölni egy 6 x 10-es négyzetrácsban úgy, hogy oldalaik rácsegyenesek legyenek?
11. A sakktábla bal alsó sarkából a jobb felső sarokba hányféle útvonalon juthat el a bástya, ha a bástyát csak jobbra és fölfelé lehet tolni?
12. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan hatjegyű számot készíthetünk, amely osztható a) 2-vel, b) 3-mal, c) 4-gyel, d) 5-tel, e) 6-tal, feltéve, hogy mindegyik számot csak egyszer használjuk fel.

13. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan hatjegyű számot készíthetünk, amely osztható 3-mal, feltéve, hogy egy-egy számjegyet többször is felhasználhatunk? Mennyi ezeknek a számoknak az összege?

További 10 feladat: K129, K140, K157, E50, K172, K205, K208, E25, E30, E56.

Számelmélet

14. Béla egy papírlapot tetszőleges módon felosztott 7 részre. Az így kapott részek közül az egyik részt felosztotta 13 részre, majd a kapott részek egyikét ismét 7 részre, és így folytatta, arra sem ügyelve, hogy a 7, illetve a 13 részre osztást váltogatva végezze. Bizonyos számú osztás után megszámolta a kapott részeket, és azt állította, hogy 2007 részt kapott. Lehet-e, hogy jól számolt?
15. Helyezz a számok közé (ahol szükséges) műveleti jeleket, zárójeleket úgy, hogy az eredmény 2007 legyen: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 2007
16. Előáll-e a 2007 szomszédos természetes számok összegeként? Hányféleképpen? Előáll-e szomszédos páros számok összegeként? Előáll-e szomszédos páratlan számok összegeként?
17. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, ….., 2006, 2007 számokat (az első 2007 darab pozitív egészet). Ezek közül két tetszőleges számot letöröltünk, és helyettük a különbségüket írtuk fel. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg egyetlen szám marad. Páros ez, vagy páratlan?
18. Állapítsd meg, hogy az alábbi következtetések közül melyik helyes!
    a) $6 \mid x$ és $5 \mid x$ és $11 \mid x \Rightarrow 330 \mid x$
    b) $6 \mid x$ és $20 \mid x \Rightarrow 120 \mid x$
    c) $13 \mid 120x \Rightarrow 13 \mid x$
    d) $7 \mid x^2 \Rightarrow 7 \mid x \Rightarrow 49 \mid x^2$
    e) $15 \mid x^2 \Rightarrow 15 \mid x \Rightarrow 225 \mid x^2$
    f) $12 \mid x^2 \Rightarrow 12 \mid x \Rightarrow 144 \mid x^2$
    g) $11 \mid xyz \Rightarrow 11 \mid x$ vagy $11 \mid y$ vagy $11 \mid z$
    h) $15 \mid xy \Rightarrow 15 \mid x$ vagy $15 \mid y$
19. Keress olyan négyzetszámot, amelyben a számjegyek összege 150.
20. 2, 22, 222, 2222, … Tartalmaz-e a mindig eggyel több kettes számjegyet tartalmazó számok sorozata végtelen sok
    a) hárommal
    b) héttel
    c) kilenccel
    d) 111-gyel osztható számot?

    Figyeld meg ugyanezt, más számmal való oszthatóságokra is!
21. Hány 0-ra végződik a 100!?
22. Add meg prímtényezős alakban azt a legkisebb számot, melyre igaz az állítás:
    a) 5-tel osztható négyzetszám
    b) 10-zel osztható négyzetszám
    c) 21-gyel osztható négyzetszám
    d) 3-mal osztható páros négyzetszám
    e) 5-tel osztható 0-ra végződő négyzetszám
    f) 12-vel osztható köbszám

g) 27-tel és 24-gyel osztható négyzetszám
h) páros, 3-mal osztható, de 18-cal nem osztható négyzetszám
i) 20-szal osztható és a duplája négyzetszám

23. Keress megfelelő m, n, k számokat, amelyekre az alábbi feltételek valamelyike teljesül!
a) (m; n) = 12, (m; k) = 80 és (n; k) = 77
b) (m; n) = 21 és [m; n] = 3689
c) (m; n) = 120 és 5mn négyzetszám.

24. Bizonyítsd be, hogy ha egy ötjegyű szám osztható 271-gyel, akkor, ha néhány számjegyet levágunk a végéről és a szám elejére tesszük, az így kapott szám is osztható lesz 271-gyel.

25. Keressük meg 59-nek azt a legkisebb többszörösét, amely 4 darab 1-es számjegyre végződik!

26. Hat kosárban tojások voltak. Némelyikben tyúktojások, másokban kacsatojások. Az egyes kosarakban sorra 5, 6, 12, 13, 23 és 29 tojás volt. "Ha eladom ezt a kosár tojást, akkor kétszer annyi tyúktojásom marad, mint kacsatojásom." Melyik kosárra gondolt?

27. Milyen p prímszámokra igaz az, hogy akármilyen egész szám a, $(a + 1)^2 + (a + 2)^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + (a + p)^2$ osztható p-vel?

28. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy szám páros osztóinak összege kisebb legyen a páratlan osztók összegénél?

29. Hány olyan különböző számpár van, amelyeknek legnagyobb közös osztója 7 és legkisebb közös többese 186 340?

30. a) Igaz-e az az egyiptomi észrevétel, hogy minden 0 és 1 közötti törtszám kifejezhető különböző véges sok törzstört összegeként, ahol a törzstört alatt 1 számlálójú törtet értünk? Legfeljebb hány tagú összeget kapunk, amikor ez sikerül?
b) Mutasd meg, hogy bármely k < n esetén a k/n tört előállítható pontosan n darab különböző törzstört összegeként.

Valamint a következő 9 feladat: K433, K437, K450, K460, S90, S146 f, p, w, z, K490, K495, E175.

II. Statisztika és valószínűségszámítás, 5 alkalom

Statisztika

K2584, K2586, K2612, K2615, K2619. K2609, K2604, K2658, K2662, K2667, K2677, K2710, K2727, K2729, E477*, K2739, K2747, E436, E444

Valószínűség

31. Mi a valószínűbb: két dobókockával legalább egy 6-ost vagy négy dobókockával legalább két 6-ost dobni?

32. Igaz-e, ha egy szobában véletlenszerűen összegyűlik 5 ember, akkor valószínűbb, hogy van köztük két olyan, aki a hét ugyanazon napján született, mint az hogy nincs két ilyen ember? Miért?

Valamint a következő 19 feladat: E491, K2761, K2777, K2770, K2779, E496, E498, K2894, E493, K2927, E527, K2918, K2912, K2809, K2863, K2957, K2958, K2960, K2949.