

## Matematika BSc Elemi matematika 3

### Témák: geometria, kombinatorika és valószínűségszámítás

#### Kitűzött feladatok

#### Geometria

1. Egy ABD háromszög szögei rendre  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Mekkora szöget zár be egymással
  - a) az A és B csúcsokból induló szögfelezők
  - b) az A és B csúcsokból induló magasságvonalak
  - c) Az A csúcsból induló szögfelező és magasságvonal.
2. Egy ABC háromszögnek adott az AB oldala, valamint tudjuk, hogy a háromszög A illetve B csúcsából induló szögfelezők  $120^\circ$ -os szöget zárnak be egymással. Szerkesztendő a háromszög körülírt köre!
3. Mutassa meg, hogy a háromszög ugyanazon oldalhoz tartozó szakaszfelező merőlegese és szögfelezője a körülírt körön metszi egymást.
4. Az ABC szabályos háromszög körülírt körén felvesszünk egy D pontot a C-t nem tartalmazó AB köríven. Mutassa meg, hogy a  $DC = DA + DB$ !
5.
  - a) Egy egyenlőszárú háromszög alapján felvett tetszőleges P pontból párhuzamosokat húzunk, melyek a szárakat X és Y pontokban metszik. Mutassa meg, hogy  $PX + PY$  nem függ a P pont megválasztásától.
  - b) Egy egyenlőszárú háromszög alapjának meghosszabbításán felvett tetszőleges P pontból párhuzamosokat húzunk, melyek a szárak egyeneseit X és Y pontokban metszik. Mutassa meg, hogy  $|PX - PY|$  nem függ a P pont megválasztásától.
6.
  - a) Mi azon pontok halmaza, melyek egy félegyenesről adott d távolságra vannak?
  - b) Mi azon pontok halmaza, melyek egy szakasztól adott d távolságra vannak?
  - c) Mi azon pontok halmaza, melyek szögvonaltól adott d távolságra vannak?
  - d) Mi azon pontok halmaza, melyek egy két pontból álló alakzattól adott d távolságra vannak?
  - e) Mi azon pontok halmaza, melyek egy két félegyenesből álló alakzattól adott d távolságra vannak?
  - f) Mi azon pontok halmaza, melyek egy két szakaszból álló alakzattól adott d távolságra vannak?
7. Egy ABCD rombusz AB oldalát rögzítjük, az A csúcsonál levő szögét 0-tól 180 fokig változtatjuk. Mi lesz az átlók metszéspontjának a halmaza?
8. Szerkesztendő a háromszög, ha adott az oldalak, szögek, magasságvonalak és súlyvonalak közül három adat.
9. Egy ABC háromszög AC és BC oldalára kifelé  $ACB'$  és  $BCA'$  szabályos háromszögeket rajzolunk. Mutassa meg, hogy  $AA' = BB'$  és hogy ezek  $60^\circ$ -os szöget zárnak be egymással.

10. Egy hatszög minden szöge  $120^\circ$ . Mutassa meg, hogy két szomszédos oldal összege megegyezik a szemben fekvő szomszédos oldalak összegével.
11. Egy trapéz hosszabbik alapja  $a$ , rövidebbik alapja  $b$  hosszúságú. Szárai derékszöget zárnak be egymással. Mutassa meg, hogy az alapok felezőpontját összekötő szakasz hossza  $(a - b)/2$ .
12. Mutassa meg, hogy egy  $a$  és  $b$  oldalú paralelogramma szögfelezői téglalapot határoznak meg, melyben az átlók hossza éppen  $a - b$ .
13. Egy  $ABC$  háromszög  $C$  csúcsából merőlegeseket bocsátunk az  $A$  illetve  $B$  csúcsokból induló külső és belső szögfelezőkre. Mutassuk meg, hogy az így nyert négy merőleges talppontjai egy egyenesen vannak!
14. Egy  $ABCD$  négyszög belsejében felvett  $P$  pontot kössünk össze a négyszög csúcsaival.
  - a) Keressük meg azt a pontot, melyre az  $AP + BP + CP + DP$  összeg minimális.
  - b) Bizonyítsuk be, hogy ez az összeg nagyobb a négyszög területének felénél.
15. Mutassa meg, hogy minden négyszögben van olyan oldal, amely kisebb valamelyik átlónál.
16. Egy  $ABC$  háromszög valamely belső  $P$  pontját tükrözzük az oldalakra, majd a kapott képet összekötjük ennek az oldalnak a végpontjaival. Az így nyert  $P_1, P_2$  és  $P_3$  pontok és a háromszög csúcsai tehát kifeszítenek egy hatszöget. Mi a feltétele annak, hogy ez a hatszög konvex legyen?
17. Adott egy szögtartomány belsejében egy  $R$  rögzített ponttal. Szerkesszünk minimális területű háromszöget, melynek egyik csúcsa  $R$ , másik két csúcsa pedig a szög szárain van.
18. Mutassa meg, hogy egy háromszög
  - a) a középvonalak által alkotott háromszög súlypontja megegyezik az eredeti háromszög súlypontjával,
  - b) a középvonalak által alkotott háromszög magasságpontja megegyezik az eredeti háromszög körülírt körének középpontjával,
  - c) hozzáírt köreinek középpontjai által alkotott háromszög magasságpontja megegyezik az eredeti háromszög beírt körének középpontjával.
19. a) Ha egy hegyesszögű háromszögben összekötjük a magasságtalppontokat, középen a talpponti háromszöget kapjuk, és a csúcsoknál még három darab háromszög keletkezik. Mutassuk meg, hogy a csúcsoknál keletkező háromszögek hasonlóak az eredeti háromszöghöz.
  - b) Bizonyítsuk be, hogy a talpponti háromszög beírt körének középpontja megegyezik az eredeti háromszög magasságpontjával.
20. Egy körnek  $AB$  átmérőjén úgy választjuk a  $C$  és  $D$  pontokat, hogy azok a kör középpontjától egyenlő távolságra legyenek. Mutassuk meg, hogy ha  $e$  két pontot a kör területének egy tetszés szerinti  $P$  pontjával összekötjük, akkor a  $CP^2 + DP^2$  összeg állandó.
21. Bizonyítsa be, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az összes oldalai négyzetének összegével. Tehát  $2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$ .

22. Mutassa meg, hogy egy háromszög oldalai és súlyvonalai között fennáll a következő összefüggés:  $a^2 + 4s_a^2 = 2(b^2 + c^2)$ .
23. Egy háromszög három oldala fölé egy-egy négyzetet szerkesztünk. A négyzetek háromszögtől különböző csúcsai egy hatszöget alkotnak. Állításunk, hogy ennek a hatszögnek minden második oldala az eredeti háromszög valamelyik súlyvonala hosszának kétszeresével egyezik meg. Miért?
24. Bizonyítsa be, hogy a háromszög szögfelezőjét a szögfelezők metszéspontja a következő arányban osztja: A csúcs melletti rész úgy aránylik a másik részhez, mint a szögfelezőt közrefogó két oldal összege a harmadik oldalhoz.
25. Milyen hasonlósági transzformációk viszik a derékszögű háromszöget a magasság behúzásával keletkező kisebb derékszögű háromszögekbe? (Magasság és befogótétel!)
26. Egy tetraéderben a csúcsot és a szemközti lap valamelyik súlyvonalát tartalmazó sík hogyan osztja a szemközti lap területét?
27. Egy utca a Budapest térképen az A3 négyzetben van, míg egy másik a D7-ben. Ha egy négyzet  $4 \times 4$  cm-es a térképen, míg a lépték 1:25 000-hez, akkor milyen tartományban mozoghat két a fenti utcákban lévő ház „légvonalbeli” távolsága?
28. Két egymástól 90 km-re levő adótorony hatósugara 75 illetve 60 km. A két tornyot összekötő szakaszra merőlegesen a nagyobb hatósugarútól 60 km-re halad egy egyenes út.
- Vegyen fel egy koordinátarendszert úgy, hogy az egyik adó legyen a kezdőpont, s ebben adja meg a másik adó koordinátáit, illetve az út egyenletét!
  - Határozza meg az út azon szakaszát, ahol mindkét adó fogható!
  - Hol nem fogható egyáltalán adás?
29. Egy körív alakú hidat helyezzen el úgy egy koordinátarendszerben, hogy a híd legmagasabb pontja legyen a rendszer kezdőpontja. Mi lesz az ív egyenlete, ha a hídfők távolsága 100 méter, és a híd „magassága” 5 méter?
30. a) Adja meg az  $A = (2; 1)$   $B = (0; 4)$  és  $C = (-5; -2)$  pontok által meghatározott háromszög súlypontjának koordinátáit!
- Adja meg az ABC köré írt kör középpontjának koordinátáit!
  - Adja meg ABC magasságpontjának koordinátáit!
31. Egy ABCD konvex négyszögben az AB szakasz A-hoz közelebbi harmadoló pontját H-t kössük össze a DC szakasz D-hez közelebbi harmadoló pontjával J-vel, valamint az AD szakasz ismét A-hoz közelebbi harmadoló pontját K-t a BC szakasz B-hez közelebbi harmadoló pontjával I-vel.
- Milyen arányban osztja a HJ szakaszt az IK szakasz?
32. Egy parabola keresztmetszetű tükröt helyezzen el úgy egy koordinátarendszerben, hogy a parabola „fenékpontja” éppen az origóban legyen. Ekkor a tükrök egyik szélső pontjának koordinátái:  $(4; 4)$ .
- Mi lesz a parabola egyenlete?

- b) Mi annak a körnek az egyenlete, amelyik átmegy a megadott  $(4; 4)$  pontot, a parabola fénékpontján és a sugara 5 egység?
33. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő!
34. a) Hogyan határozza meg egy paralelogramma csúcsából az átlóinak felezőpontjába mutató vektort, ha az ebből a csúcsból induló két élvektorát  $a$  illetve  $b$  jelöli?
- b) Hogyan határozza meg egy trapéz csúcsából az átlóinak felezőpontjába mutató vektort, ha az ebből a csúcsból induló két élvektorát  $a$  illetve  $b$  jelöli, és az  $a$  vektorral párhuzamos oldalának a hossza éppen  $|a|/2$ ?
- c) Hogyan határozza meg egy általános négyszög középvonalainak metszéspontjába mutató vektort, ha a sík egy pontjából a négyszög csúcsaihoz vezető vektorok rendre  $a, b, c, d$ ?
35. Jelölje az egység élhosszúságú szabályos tetraéder egy csúcsából kiinduló élvektorait  $a, b$  és  $c$ . Mi az eredménye a következő műveleteknek:
- a)  $(a + b) \cdot c$
- b)  $(a+b)(b+c)$
- c)  $(a+b+c)(a-c)$ ?

## Kombinatorika, valószínűségszámítás

- Legalább hány 13 tippes totószelvény kitöltésével biztosítható, hogy legyen legalább 5-ös találatunk?
- Hány lottószelvényt kell kitöltenünk a biztos telitalálathoz?
- Május 35-én a lottót úgy játsszák, hogy az 1, 2, 3, ..., 20 számokból 18-at húznak ki.
  - Hány szelvényt kell kitöltenünk a biztos telitalálathoz?
  - Hány kell ahhoz, hogy biztosan legyen legalább 15 találatunk?
- Két iskola legjobb sakkozói versenyeztek egymással. Mindenki mindenkivel egy játszmát játszott. Először az egy-egy iskolán belüli játszmákra: összesen 66 játszmára került sor. Az egész körmérkőzés 136 játszmából állt. Hány versenyző indult az egyik és hány a másik iskolából?
- Hány olyan egymáshoz nem hasonló háromszög van, amely tompaszögű, továbbá nem egyenlő szárú és mindegyik szöge fokokban mérve egész számot ad?
- Egy egyfordulós futballbajnokságon a csapatok sorrendjét a gólarányok figyelembevételével egyértelműen meg lehetett határozni. A bajnokságon volt olyan csapat, amelyet a nála jobb helyezést elért csapatok valamelyike nem győzött le. Bizonyítsuk be, hogy a bajnokság folyamán volt döntetlen mérkőzés is. (Egyfordulós futballbajnokságon minden csapat minden csapattal egyszer játszik. Minden egyes mérkőzés után a győztes csapat két pontot, döntetlen esetén mindkét csapat egy-egy pontot kap.)
- Hány téglalapot lehet kijelölni egy  $6 \times 10$ -es négyzetrácsban úgy, hogy oldalaik rácsegyenesek legyenek?
- A sakktabla bal alsó sarkából a jobb felső sarokba hányféle útvonalon juthat el a bástya, ha a bástyát csak jobbra és fölfelé lehet tolni?

9. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan hatjegyű számot készíthetünk, amely osztható
- a) 2-vel,
  - b) 3-mal,
  - c) 4-gyel,
  - d) 5-tel,
  - e) 6-tal,
- feltéve, hogy mindegyik számot csak egyszer használjuk fel.
10. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből hány olyan hatjegyű számot készíthetünk, amely osztható 3-mal, feltéve, hogy egy-egy számjegyet többször is felhasználhatunk? Mennyi ezeknek a számoknak az összege?
11. Mi a valószínűbb: két dobókockával legalább egy 6-ost vagy négy dobókockával legalább két 6-ost dobni?
12. Igaz-e, ha egy szobában véletlenszerűen összegyűlik 5 ember, akkor valószínűbb, hogy van köztük két olyan, aki a hét ugyanazon napján született, mint az hogy nincs két ilyen ember? Miért?

***Az egységes érettségi feladatgyűjtemény***

129, 140, 157, 172, 205, 208, 227, 232, 237, 242, 2584, 2586, 2612, 2615, 2619, 2609, 2604, 2658, 2662, 2667, 2677, 2710, 2727, 2729, 2739, 2747, 2761, 2777, 2770, 2779, 2894, 2927, 2918, 2912, 2809, 2863, 2957, 2958, 2960, 2949 sorszámú feladatai.