Elemi matematika 2 **Kitűzött feladatok**

Aritmetika, elemi számelmélet

1. Béla egy papírlapot tetszőleges módon felosztott 7 részre. Az így kapott részek közül az egyik részt felosztotta 13 részre, majd a kapott részek egyikét ismét 7 részre, és így folytatta, arra sem ügyelve, hogy a 7, illetve a 13 részre osztást váltogatva végezze. Bizonyos számú osztás után megszámolta a kapott részeket, és azt állította, hogy 2007 részt kapott. Lehet-e, hogy jól számolt?
2. Helyezz a számok közé (ahol szükséges) műveleti jeleket, zárójeleket úgy, hogy az eredmény 2011 legyen.

   1 2 3 4 5 6 7 8 9 = 2011
3. Előáll-e a 2011 szomszédos természetes számok összegeként?
   Hányféleképpen?
   Előáll-e szomszédos páros számok összegeként?
   Előáll-e szomszédos páratlan számok összegeként?
4. Egy táblára felírtuk az 1, 2, 3, … , 2010, 2011 számokat (az első 2011 darab pozitív egészet). Ezek közül két tetszőleges számot letöröltünk, és helyettük a különbségüket írtuk fel. Ezt az eljárást addig ismételjük, amíg egyetlen szám marad. Páros ez, vagy páratlan?
5. Állapítsd meg, hogy az alábbi következtetések közül melyik helyes!

   a) $6 \mid x$ és $5 \mid x$ és $11 \mid x \Rightarrow 330 \mid x$

   b) $6 \mid x$ és $20 \mid x \Rightarrow 120 \mid x$

   c) $13 \mid 120x \Rightarrow 13 \mid x$

   d) $7 \mid x^2 \Rightarrow 7 \mid x \Rightarrow 49 \mid x^2$

   e) $15 \mid x^2 \Rightarrow 15 \mid x \Rightarrow 225 \mid x^2$

   f) $12 \mid x^2 \Rightarrow 12 \mid x \Rightarrow 144 \mid x^2$

   g) $11 \mid xyz \Rightarrow 11 \mid x$ vagy $11 \mid y$ vagy $11 \mid z$

   h) $15 \mid xy \Rightarrow 15 \mid x$ vagy $15 \mid y$
6. Tartalmaz-e a mindig eggyel több kettes számjegyet tartalmazó számok 2, 22, 222, 2222, … sorozata végtelen sok
   a) hárommal
   b) héttel
   c) kilenccel
   d) 111-gyel osztható számot?

   Figyeld meg ugyanezt, más számmal való oszthatóságokra is!
7. Hány 0-ra végződik a 100!?
8. Add meg prímtényezős alakban azt a legkisebb számot, melyre igaz az állítás:
   a) 5-tel osztható négyzetszám
   b) 10-zel osztható négyzetszám
   c) 21-gyel osztható négyzetszám
   d) 3-mal osztható páros négyzetszám
   e) 5-tel osztható 0-ra végződő négyzetszám
   f) 12-vel osztható köbszám
   g) 27-tel és 24-gyel osztható négyzetszám
   h) páros, 3-mal osztható, de 18-cal nem osztható négyzetszám
   i) 20-szal osztható és a duplája négyzetszám
9. Keress megfelelő m, n, k számokat, amelyekre az alábbi valamelyik feltétel teljesül!
   a) $(m\,;n) = 12$, $(m\,;k) = 80$ és $(n\,;k) = 77$
   b) $(m\,;n) = 21$ és $[m\,;n] = 3689$

c) $(m\,;n) = 120$ és $5mn$ négyzetszám.

10. Bizonyítsd be, hogy ha egy ötjegyű szám osztható 271-gyel, akkor, ha néhány számjegyet levágunk a végéről és a szám elejére tesszük, az így kapott szám is osztható lesz 271-gyel.
11. Keressük meg 59-nek azt a legkisebb többszörösét, amely 4 darab 1-es számjegyre végződik!
12. Hat kosárban tojások voltak. Némelyikben tyúktojások, másokban kacsatojások. Az egyes kosarakban sorra 5, 6, 12, 13, 23 és 29 tojás volt. "Ha eladom ezt a kosár tojást, akkor kétszer annyi tyúktojásom marad, mint kacsatojásom." Melyik kosárra gondolt?
13. Milyen p prímszámokra igaz az, hogy akármilyen egész szám a,
    $(a + 1)^2 + (a + 2)^2 + \ldots + (a + p)^2$ osztható p-vel?
14. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy szám páros osztóinak összege kisebb legyen a páratlan osztók összegénél?
15. Hány olyan különböző számpár van, amelyeknek legnagyobb közös osztója 7 és legkisebb közös többese 186 340?
16. a) Igaz-e az az egyiptomi észrevétel, hogy minden 0 és 1 közötti törtszám kifejezhető különböző véges sok törzstört összegeként, ahol a törzstört alatt 1 számlálójú törtet értünk? Legfeljebb hány tagú összeget kapunk, amikor ez sikerül?

    b) Mutassa meg, hogy a k/n tört bármely $k < n$ esetén előállítható *pontosan n darab* különböző törzstört összegeként.

Algebra, szöveges feladatok

Az egységes érettségi feladatgyűjtemény

566, 570, 641, 646, 650, 686, 707, 717, 724, 739, 744, 844, 850, 864, 875, 878, 908, 909, 582, 586b, 609, 611, 613, 699, 736, 745, 786, 787, 788, 819 sorszámú feladatai.

1. Minden délben és éjfélkor egy-egy hajó indul el New Yorkból Lisszabonba s egy másik, ugyanazon az útvonalon, Lisszabonból New Yorkba. A hajóút pontosan nyolc napig tart. Múltkoriban ezzel a hajójárattal mentem New Yorkból Lisszabonba. Hány szembejövő hajót számolhattam meg? (Az induláskor érkező és az érkezéskor induló hajót is szembejövőnek tekintettem.)

   (Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)
2. Budapesttől Debrecen közelítőleg 200 km-re fekszik. Budapestről Debrecenbe és visszautazunk repülővel. A repülőgép sebessége 150 km/ó. Azt észleltük, hogy az utazás egész időtartama alatt egyenletesen erős, 30 km/ó gyorsaságú szél fújt Budapest- Debrecen irányban. Amíg Budapestről repültünk Debrecenbe, addig a szél elősegítette a repülést, sebességünket növelte. Visszafelé természetesen ugyanennyivel csökkentette a szél a sebességünket. Végeredményben tehát az utazás időtartamát nem változtatta meg a szél sebessége. Helyes a végkövetkeztetésünk?

   (Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)
3. Egy állásra három fiatalember pályázott. A felvételt intéző tesztviselő csak egy kérdést tett fel nekik. - Mint tudják, a kezdő fizetés havi 1000 forint, amit félhavi részletekben fizetünk ki; ha azonban munkájuk megfelel, fizetésüket minden hónapban emeljük. Mit kívánnak Önök inkább? Azt, hogy fizetésüket havi 15 forinttal, vagy azt, hogy félhavonkénti 5 forinttal emeljük? Két pályázó rögtön az első lehetőséget választotta, míg a harmadik kis gondolkodás után a második lehetőség mellett döntött. Őt vették fel. Miért?

   (Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)
4. Megérkezvén a szállodába, három amerikai kényelmes szállást kér a tulajdonostól; egy háromszobás lakosztályt rendeltek. 30 dollárért felkínáltak nekik egy gyönyörű lakosztályt, s a turisták felmentek, hogy megnézzék. Megfelelőnek találtak mindent, s így fejenként 10-10 dollárt összeadtak, s átnyújtották az őket felkísérő háziszolgának. Mikor a háziszolga átadta a tulajdonosnak a 30 dollárt, az akkor jött rá, hogy tévedett; a háromszobás lakosztály ára csak 25 dollár. Így a háziszolgával visszaküldött 5 db egydollárost. A háziszolga felfelé menet arra gondolt, hogy nehéz volna az 5 egydollárost három ember

között szétosztani, s ezért kettőt zsebre vágott s a három turistának 1-1 dollárt adott vissza. Így mindenki 9 dollárt fizetett. Mivel $3 \cdot 9 = 27$ dollár; két dollár a háziszolga zsebében maradt, s ez összesen $27 + 2 = 29$ dollár, pedig eredetileg hárman 30 dollárt adtak össze. Hová tűnt a harmincadik dollár?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

5. a) Az asztalon áll két egyforma pohár. Az egyikben tiszta víz, a másikban pontosan ugyanolyan mennyiségű bor van. Egy kiskanál bort átteszünk a másikba, jól összekeverjük, majd ugyanazzal a kiskanállal egy kiskanálnyi keveréket visszateszünk a borospohárba. Az a kérdés, hogy a vizespohárban lesz több bor, vagy a borospohárban lesz több víz?

   b) Az asztalon áll egy pohár, színültig tele narancslével. A folyadék tetején jégkockák úsznak, mint tudjuk, körülbelül egy tized részük a víz felett van. Ebből természetesen következik, hogy ha hagyjuk elolvadni a jégkockákat, akkor az ital már nem fog beleférni a pohárba, kicsordul belőle. Vagy mégsem?

   c) Egy csónakban nagy kő van. A halász beevez a tóba, majd a tó közepén kidobja a követ a csónakból a tavacskába. Vajon változik-e ettől – akár csak kicsi mértékben is – a tó szintjének magassága?

6. Egy apa vagyona négy fiára maradt. Fiai a következőképp osztották el egymás közt a vagyont: Az elsőé legyen 3000 livres-rel kevesebb, mint a vagyon fele. A másodiké legyen 1000 livres-rel kevesebb, mint a vagyon harmada. A harmadiké legyen épp a vagyon negyede. A negyediké legyen 600 livres-rel több a vagyon ötödénél. Mekkora volt a vagyon, és mennyi jutott egy fiúra?

(Pólya György: A problémamegoldás iskolája)

7. A sakktáblám mellett voltam, oldalamnál fiam és lányom ültek. A kislány számtan házi feladatán dolgozott, írásbeli osztásokat kellett gyakorlásul elvégeznie. Míg pár pillanatra kiment a szobából, kis öccse nagy szolgalommal kezdte az osztás szemjegyeit sakkfigurákkal lefedni. Mire odanéztem, már csak két számjegy maradt szabadon. A következő ábrát láttam:

$$
\begin{array}{l}
p_v\, p_v\, p_v\, p_v\, p_v\, p_v\, p_v : h_v h_v = b_v\, f_v\, 8\, f_v\, b_v \\
\underline{k_v\, p_s\, n_s\;\;} \\
\qquad\; f_s\, f_s \\
\qquad\; \underline{b_s\, b_s\qquad} \\
\qquad\quad p_s\, p_s\, p_s \\
\qquad\; \underline{\;\; p_s\, p_s\, p_s} \\
\qquad\qquad\quad 1
\end{array}
$$

(A p_v h_v b_v f_v k_v n_s f_s b_s jelek a világos, illetve sötét paraszt, huszár, bástya, futár, király, királynő helyét jelzik. Semmi jelentőségük nincs, azon kívül, hogy eltakarják az alattuk álló számot.) Ha lesöpröm az asztalról a figurákat, a fiam kezd el bömbölni, ha rajtahagyom, leányom méltatlankodik majd a megzavart házi feladat miatt. Mit tehettem mást, nekifogtam, hogy a figurák elmozdítása nélkül kitaláljam, mi volt az osztás. Mire leányom visszajött, egy másik papírra leírtam neki, meddig jutott el az osztásban. Mint látják, Sanyi, ha nem is biztos, hogy jó pedagógus, de jó rejtvényfejtő s ez hozzásegítette egy családi vihar elkerüléséhez. Vajon mi is meg tudtuk volna ezt tenni helyében?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

8. – Nos – mondta a szállítmányvezető a helyettesének –, mint tudja, a szállítmányt 1000 mérföldre kell elvinnünk. Mibe fog ez kerülni?

   – Ez sokban függ a szállítási sebességtől – szólt a válasz. – Az alapdíj mérföldenként 1 font s a pótdíj, 10 mérföld/óra felett a sebesség minden mérföld/órája után, természetesen szintén mérföldenként, egy shilling. Így pl. ha 20 mérföld/ órával megyünk, akkor 1 font 10 shillinget kell fizetnünk egy-egy mérföld útért. (20 shilling 1 font).

   – Tehát akkor legjobb, ha 10 mérföld/órával megyünk?

   – Nem egészen, elfelejti, hogy minden 20 órán felüli óráért, ameddig a szállítás tart, 25 font bánatpénzt kell fizetnünk. Mi a szállítmány optimális sebessége?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

9. Cambridge-ből Northyba két mérföldes szerpentin autóút vezet; az út első mérföldje nehéz hegyi úton a Northy feletti magas hegy tetejére vezet s a második mérföldön ereszkedik alá Northyba. Egy neves autóversenyző vállalkozott arra, hogy a rendkívül nehéz terep ellenére 30 mérföld/óra átlagsebességgel jut el Cambridbe-ből Northyba. A felfelé vezető úton, mint ahogy azt a hegy tetején elhelyezkedő

megfigyelők konstatálták, csak 15 mérföld/óra sebességgel tudott haladni, mégis csak alig néhány másodperces késéssel ért Northy városába. Harmadnap temették. Ugyan miért halt meg?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

10. Caius és Sempronius közös lakomát rendeztek. Erre Caius 7, Sempronius pedig 8 tál ételt hozott. Váratlan vendégként megérkezett Titus is, s egyenlően megosztották az ételt egymás közt. A Titus által elfogyasztott étel 30 dénárius értékű volt, s így Titus ezt mondta: – A hozott ételmennyiség aránya 7 : 8, ebben az arányban osztom el a pénzem. S fizetett Caiusnak 14 és Semproniusnak 16 dénáriust. Sempronius azonban tiltakozott a pénz ilyen felállása ellen, s mivel társai nem hallgattak rá, a bírósághoz fordult. Mi volt a bíróság helyes ítélete?

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

11. Tomi – ismervén gyöngémet a kevés számot megadó szorzás-rejtvények iránt – születésnapomon az ábrán látható rejtvénnyel lepett meg.
– Az o betű mindenütt ugyanazt a számjegyet jelöli, s egyetlen x sem lehet o betű. Nem nehéz a rejtvény, ha igyekszel, talán a következő születésnapodra kész is leszel. Hát azért olyan sokáig nem tartott. Remélem, önök is hamarabb elkészülnek vele!

```
x x o x x x o · x x x x o x
x x x o x x x x
  x x o o o x o x
    o o x x o x x o
        x x o x x x o
        x x x x x x x x
          x o x x x x x x
_________________________
o x x o x x x x o x x x x
```

(Grätzer György: Elmesport egy esztendőre)

12. Edison híres volt elmés technikai megoldásairól. Egyszer egy vendége azonban így panaszkodott neki.
– Nehezen nyílik a kapud. Te, aki egy technikai zseni vagy, miért nem javítod meg?
Edison így válaszolt:
– A kapum nem véletlenül nyílik nehezen. Ugyanis minden ember, aki kinyitja, 15 liter vizet pumpál fel a ciszternámba. Éppen ellenkezőleg, azt tervezem, hogy a jelenlegi pumpát kicserélem, úgy, hogy minden ajtónyitáskor 20 liter víz jusson a ciszternába. Ha ezt megtenném, akkor hattal kevesebb vendég elég lenne a ciszterna feltöltéséhez.
a) Hány literes Edison ciszternája?
b) A feladat számadatai: 15, 20 és 6. Diszkutáld a feladatot, állapítsd meg, hogyan lehet ezeket az adatokat megválasztani, hogy a feladatnak legyen megoldása.

13. Hét ember elmegy kókuszdiót gyűjteni. Találnak is jó sokat, de rájuk esteledik, így az osztozkodást reggelre hagyva lefekszenek aludni. Éjszaka egyikük felébred, s nem bízván a társaiban, egymaga kívánja 7 részre osztani a dió-kupacot. Ezt 1 maradékkal meg is tudja tenni. Az "egy heted" részt eldugja, a maradékot a fa tetején figyelő majomnak dobja, s visszafekszik aludni. Az éjszaka során mind a 6 társa egymás után ugyanígy jár el (mindig 1 dió marad), s reggel – mintha éjszaka mi sem történt volna – közösen is elosztják a kupacot (s az 1 maradékot a majomnak adják). Legalább hány diót gyűjtöttek összesen?

14. Melyek azok a háromjegyű számok, melyekben a jegyek összege 18, százasokra kerekített értékük 900 és a jegyeik között vannak egyformák?

(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 5. osztály)

15. Egy egységnyi oldalú négyzet oldalait 2, 3, 4 illetve öt egyenlő részre osztottuk fel és a csúcsokhoz legközelebbi osztópontokat összekötve, levágtuk a négyzet sarkait. Mekkora a maradék területe?

(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 7. osztály)

** Általánosítsd a feladatot!

16. Egy kétjegyű számból kivontuk a jegyek felcserélésével kapott számot, és így 27-et kaptunk. Azt is eláruljuk, hogy a szám jegyeinek különbsége 3. Melyik ez a szám?
**Milyen más számok állhatnak 27 és 3 helyén, hogy a feladatnak legyen megoldása?

17. A $26 \cdot 93$ szorzat különleges. Ha a szorzótényezőkön belül a számjegyeket felcseréljük, akkor a $62 \cdot 39$ szorzatot kapjuk, amelynek értéke meglepő módon megegyezik az eredetiével, $26 \cdot 93 = 62 \cdot 39$. Mi a „titka” ezeknek a számoknak? Keress más ilyen szorzatokat!

(Apáczai Kiadó Matematika tankönyv 8. osztály)

18. Görögországi nyaraláskor egy 86 fős turistacsoport két részre oszlott aszerint, hogy ki melyik programot választotta. Az egyik csoport meglátogatta a híres Meteora kolostorokat, a másik csoport a tengerparti fürdőzést választotta. A Meteorákhoz ment a társaság nagyobbik fele. A következő állítások mindegyike igaz, de nem áruljuk el, hogy a fürdőzőkről, vagy a kirándulókról szól-e. Írj melléjük F vagy K betűt aszerint, hogy melyik szól a fürdőzős csoportról, és melyik a kirándulós társaságról!

☐ Ehhez a társasághoz tartozó emberek számának a negyedrésze is több mint a másik társaság létszáma.

☐ Ebben a társaságban 6-szor annyi nő van, mint férfi.

☐ Ebben a társaságban csak házaspárok vannak.

☐ Ennek a társaságnak a létszáma osztható 4-gyel.

☐ Ennek a csoportnak a létszáma 9-cel osztható szám.

☐ Ebben a társaságban az emberek száma 7 többszöröse.

☐ Ebben a társaságban 8-szor annyian vannak az 50 év alattiak, mint az 50 évnél idősebbek. Tudod-e, hogy melyik csoportban hányan vannak?

(Korgyemszkij: Matematikai fejtörők)

19. Valaki 5 órán keresztül gyalogolt. Először sík úton, majd hegynek fel, aztán megfordult és ugyanazon az úton tért vissza kiindulási pontjához. Sík talajon 4, hegynek fel 3, völgynek le 6 km-t tett meg óránként. Mekkora utat járt be? Elegendők az adatok a megoldáshoz? Miért? Elemezd a kérdést.

(Pólya: Problémamegoldás iskolája I)

20. Néhány kereskedőnek 8240 korona közös tőkéje van; mindegyikük negyvenszer annyi koronát ad az üzletbe, mint ahányan társultak, és az egész összeghez annyi százalékot nyernek, mint ahányan vannak. Ha a hasznot felosztják, mindegyikük tízszer annyi koronát kap, mint ahányan vannak, és még megmarad 224 korona. Számítsuk ki hányan társultak!

(Euler)

21. Egy 3 km hosszú villamos-vonal két végállomásáról 5 percenként egyszerre indítanak egy-egy villamost. A villamosok menetideje 10 perc. Az egyik villamos indítása után 2 perccel egy gyalogos elindul a sínek mentén és 45 perc múlva ér a másik végállomásra.
a) Útközben hány szembejövő villamossal találkozik?
b) Hány vele egy irányba haladó előzi meg?

22. Oldd meg az alábbi egyenleteket:
a) $\sqrt{2x+20}+\sqrt{1-x}=5$; b) $\sqrt{x+5}=x^2-5$; c) $x^2-24x+142=\sqrt{x-10}+\sqrt{14-x}$;
d) $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1$; e) $\sqrt{x+4p+16}=2\sqrt{x+2p+4}-\sqrt{x}$, ahol p valós paraméter. Milyen p értékekre van megoldás?

23. Milyen a paraméter érték esetén teljesülnek minden x-re a következő egyenlőtlenségek?
a) $(a-3)x^2-(a+2)x+a+5\geq 0$
b) $(a+3)x^2-6x+a-5\leq 0$

24. Mely valós számhármasok elégítik ki a következő egyenletrendszert?

$$\frac{xy}{5x+4y}=6;\qquad \frac{xy}{3x+2z}=8;\qquad \frac{yz}{3y+5z}=6\qquad (x,y,z\neq 0)$$

25. Határozd meg $\frac{a+b}{a-b}$ értékét, ha $2a^2+2b^2-5ab$ és $b\geq a\geq 0$!

26. Az $x^3+px+q=0$ egyenletben p és q valós számok, $q\neq 0$. Ennek az egyenletnek a gyökei legyenek a, b, c. Írja fel azt az egyenletet, amelynek gyökei: $(a-b)^2$, $(b-c)^2$ és $(c-a)^2$!

27. A k paraméter mely értékei mellett lesz az $x^2-(3k-11)x+2k^2-19k+40=0$ egyenlet valós gyökeinek négyzetösszege minimális?

28. Van két edényünk. Az egyik 8 literes és tele van 87,5 %-os alkohollal; a másik 10 literes és üres. Az első edényből áttöltünk valamennyi alkoholt a másodikba, majd feltöltjük vízzel. Ezzel a keverékkel újra

teletöltjük az első edényt. Így ott 70 %-os alkohol keletkezik. Határozza meg, hogy először mennyi alkoholt öntöttünk át a második edénybe!

29. 50 csavar annyiba kerül, ahány csavart 7200 Ft-ért kapunk. Mennyibe kerül egy csavar?

30. Egy munka elvégzésére három gépet használnak. Ezt a munkát az első és a második együtt 7,2 nap; az első és a harmadik együtt 9 nap; a második és a harmadik gép együtt 12 nap alatt végezné el. Hány nap alatt végeznék el a munkát külön-külön?

31. Egy apa oly módon kívánja gyermekét biztosítani, hogy az 25 éves korától kezdve 15 éven át évi előleges 1500 Ft-ban részesüljön. Mekkora összeget kell evégből a gyermek születésekor a takarékpénztárba tenni, ha az összetett kamatok kamatlába 4%?

(*érettségi feladat 1893 budapesti V. kerületi állami főreáliskola*)

32. A pedagógus szakszervezet azért küzd, hogy a következő öt évben a tanárok fizetése egyenletesen évente 5%-kal növekedjen.
    a) Ha ma valakinek 50 000 Ft a fizetése, akkor mennyi lesz három, illetve öt év múlva, ha a kormányzat teljesíti a követelést?
    b) Mennyi idő alatt duplázódna meg a pedagógusfizetés, ha ez a növekedési tendencia állandó maradna?

33. Az élő szervezetek anyagcseréjük során folyamatosan vesznek fel a környezetükből – és aztán le is adnak – különböző szénvegyületeket. A légkörben – és így minden élő szervezetben – állandó a radioaktív C_{14} szénizotóp aránya, amelynek felezési ideje 5760 év. Egy szervezet halála után a benne levő C_{14} izotóp exponenciálisan csökken. Egy babiloni város ásatásakor, amelyet Hammurabi király idejében építettek, találtak egy fadarabot, amelyben már csak 64%-a található az eredeti (állandó) C_{14} izotópnak. Ennek alapján mikor élhetett körülbelül Hammurabbi király?

(Egységes érettségi feladatgyűjtemény)

34. A légnyomás a magassággal exponenciálisan csökken, és körülbelül 5500 m magasan éri el a tengerszinten levő légnyomás felét. a) Adja meg a légnyomás értékét h a tengerszint feletti magasság függvényében. b) Ha a tengerszinten a légnyomás egységnyi (kb. 10^5 Pa, vagy régies mértékegységekkel 1000 mbar, 1 atmoszféra, 760 Hgmm), akkor mennyi a nyomás a Mount Blanc, a Kilimandzsáró, illetve a Mount Everest csúcsán? A fenti hegyek tengerszint feletti magassága rendre: 4807 m, 5895 m, illetve 8848 m.

35. A 137-es cézium felezési ideje kb. 30 év.
    a) Adja meg a bomlási képletet $N(t) = N0\cdot e^{-\lambda t}$ alakban!
    b) Mikorra fog a csernobili baleset okozta cézium szennyeződés a maximális érték 10%-ára csökkenni?

36. Manapság egyre gyakrabban használnak információátvitelre üvegszálból készült kábeleket a korábbi drótkábel és árammal történő információátvitel helyett. A fény intenzitása az üvegszálon történő haladás közben exponenciálisan csökken. Egy különlegesen tiszta üvegszálon 100 m haladás alatt a fény intenzitása 0,2%-kal csökken.
    a) Adja meg a forrástól d távolságra az üvegszálban a fényintenzitás, ha d-t km-ben mérjük.
    b) 12 km hosszan hány százalékára csökken az intenzitás? c) Mekkora távolságra kell fényerősítőket beépíteni az üvegszálas kábelbe, ha a besugárzott fényintenzitásának legalább 20%-a el kell hogy érje az erősítőt, ahhoz, hogy a hibákat elkerüljük?

(Egységes érettségi feladatgyűjtemény)

37. Kölcsönt szeretnék felvenni lakásvásárláshoz. Szükségem lenne 1 000 000 Ft-ra. Két bankot kerestem fel. Az egyik azt hirdeti, hogy különösen kedvező, mindössze 9%-os évi kamatra ad kölcsönt és legfeljebb 5 év futamidővel. A másik bank évi 19%-os kamat mellett ad kölcsönt, ugyanakkora 5 éves futamidővel. A beszélgetés során kiderül azonban, hogy a két bank másként számol. Az első bank számítási eljárása a következő: Kiszámítja, hogy az 1 000 000 Ft mennyit érne 5 év múlva a 9%-os kamatos kamatszámítással. Ezt az összeget fizetteti vissza 60 hónap alatt, tehát a kamatos kamattal kapott összeg 60-adrésze a havi törlesztő részlet. A másik bank eljárása a szokásos: Az évi kamatból kiszámítják a havi kamatot, s minden hó végén megnézik a mérleget, az aktuális tartozásomat felszorozzák a havi kamattal, s levonják az aktuális havi törlesztő részletet. Ez az eljárás 60 hónap alatt

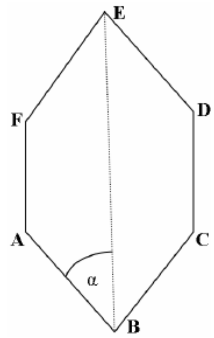
kell, hogy 0-ra fusson, tehát elfogyjon a tartozásom.
a) Mekkora havi részletet fizetnék az első banknál?
b) Mekkora a havi részlet a második banknál?
c) Tényleg különösen kedvező az első bank? Mi a véleménye a két eljárásról?

Halmazok, sorozatok, függvények

1. a) Ábrázolja az f: $x \to 2x$, illetve a g: $x \to 2^x$ függvényeket, az $0 < x < 6$ intervallumon.
b) Ha x = 1, 2, 3, 4, ..., akkor milyen sorozatot alkotnak az $f(1)$, $f(2)$, ... $f(10)$, illetve a $g(1)$, $g(2)$, ..., $g(10)$ számok?
c) Mennyi az összege az első 10 elemnek (x = 10-ig) az első, illetve a második esetben?
d) Megbecsülhető a grafikonról a két összeg viszonya?
2. Egy színházteremben, amelyik felülről nézve egy körgyűrű-cikk, a következőket tudjuk az ülőhelyekről. Az első sorban 18 hely van, utána minden sorban 3-mal több, és 24 sor van. Minden sor 20 cm-rel magasabban van, mint az előző.
a) Hány férőhelyes a színház?
b) Mennyivel van magasabban az utolsó sor, mint az első?
3. Egy négyzet alapú piramis építéséhez egyforma kőtömböket használtak. Felfelé haladva minden sorba eggyel kevesebb kőtömb kerül.
a) Hány sor van egymás fölött, ha egy kőtömb magassága 80 cm, és a piramis egyetlen záróköve a tetején 42,4 méter magasan van?
b) Hány kőtömb határolja a piramis felületét?
4. Állapítsuk meg az $y = \dfrac{2x^2+6x+6}{x^2+4x+5}$ függvény minimumát és maximumát!
5. Szeretnénk egy 80 x 80 cm-es kartonból dobozt készíteni. Mekkora lehet a legnagyobb térfogatú doboz? Mi a helyzet, ha a karton mérete 80 x 120 cm?
6. Henger alakú, elhanyagolható vastagságú fémdobozba pl. üdítőitalt akarunk tölteni. Milyen méretű hengert válasszunk,
a) ha éppen 1 liter térfogatút akarunk?
b) Ilyenek a „valóságban” ezek az üdítők? Ha nem, vajon miért nem?
7. Adott kerületű háromszögek közül melyiknek a legnagyobb a területe? Mi a helyzet négyszögek esetén?
8. Bizonyítsa be, hogy ha az a, b, c valós számokra fennáll az $a + 2b + 3c \geq 14$ egyenlőtlenség, akkor érvényes az $a^2 + b^2 + c^2 \geq 14$ egyenlőtlenség is. Mikor áll fenn egyenlőség?
9. Bizonyítsa be, hogy ha $a + b = 1$, és a, b pozitívak, akkor $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\dfrac{1}{b}\right)^2 \geq \dfrac{25}{2}$.
10. Igazolja, hogy $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n > 2$ fennáll minden pozitív egész n-re.
11. Határozza meg az $S = \dfrac{a}{a+b+d} + \dfrac{b}{a+b+c} + \dfrac{c}{b+c+d} + \dfrac{d}{a+c+d}$ kifejezés értékkészletét, ha a, b, c, d pozitív számok!
12. Adja meg az alábbi függvények szélsőértékeit:
a) $F(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+3}$; b) $G(x) = \dfrac{1}{x^2+2x-3}$; c) $H(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.
13. Határozza meg az alábbi függvény minimumát: $f(x) = \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{(b-x)^2+c^2}$, ahol a, b, c adott pozitív számok.
14. Mekkora az $a^6 + b^6$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értéke, ha a és b olyan valós számok, amelyekre $a^2 + b^2 = 1$?

15. Adott felszínű téglatestek (dobozok) közül melyikbe fér a legtöbb „töltelék”, azaz melyiknek van legnagyobb térfogata?

16. Egy kartonból készült, harmonikaszerűen mozgatható tartót használunk növények felnevelésére. Egy „cella” hatszög alakú, minden oldala 3 cm. Szimmetria miatt, mindössze egyetlen szögtől függ a cella területe (lásd az ábrát).
    a) Hány fokos az α szög, ha a *BE* távolság 4 cm?
    b) Igazolja, hogy a cella területét az alábbi formula adja:
    $T = 18 \cdot \sin\alpha + 18 \cdot \sin\alpha\cos\alpha$.
    c) Milyen α értékre maximális a terület?
    Milyen hatszöget kapunk ekkor?



17. Egy utca páros oldalán a házszámok összege egyik saroktól a másikig 78, ezen a szakaszon legalább 5 ház van. Mennyi lehet a saroktól számított negyedik ház házszáma?

18. Igazoljuk, hogy az

$$x \longmapsto \frac{9x+7}{3x+12}$$

függvény grafikonja szimmetrikus a (-4;3) pontra.

19. Oldjuk meg a $10x - 5 = 9[x]$ egyenletet a valós számok halmazán (ahol $[x]$ az x egész részét jelenti).

20. Oldjuk meg a következő egyenletet a valós számok halmazán:

$$\sin^2(x+y) - \cos^2(x-y) = 1.$$

Az egységes érettségi feladatgyűjtemény

1069, 1079, 1298, 1303, 1304, 1364, 1368, 1369 sorszámú feladatai.