Kitűzött feladatok

BSc Elemi matematika 2

I. rész

1. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogóján vegyük fel a D és az E pontokat úgy, hogy AC = AD és BC = BE legyen. Mekkora az ECD szög?
2. Egy ABD háromszög szögei rendre α, β, γ. Mekkora szöget zár be egymással
   a. az A és B csúcsokból induló szögfelezők
   b. az A és B csúcsokból induló magasságvonalak
   c. Az A csúcsból induló szögfelező és magasságvonal.

3. Egy ABC háromszögnek adott az AB oldala, valamint tudjuk, hogy a háromszög A illetve B csúcsából induló szögfelezők 120˚-os szöget zárnak be egymással. Szerkesztendő a háromszög körülírt köre!
4. Adott egy ABC háromszög *k* körülírt köre és ezen rögzítve az A és B csúcsok. Szerkesztendő
   a. a beírt körök középpontjainak mértani helye
   b. a magasságpontok mértani helye
   c. a súlypontok mértani helye

   ha a C csúcs körbefut a kör kerületén.
5. Mutasd meg, hogy a háromszög ugyanazon oldalhoz tartozó felező merőlegese és szögfelezője a körülírt körön metszi egymást.
6. Az ABC szabályos háromszög körülírt körén felveszünk egy D pontot az AB közötti köríven. Mutasd meg, hogy a DC = DA + DB!
7. ABC háromszög körülírt körének középpontját jelölje O. Mutasd meg, hogy az A csúcsból induló szögfelező felezi a magasságvonal és az AO sugár által bezárt szöget!

8. Az ABC háromszög A csúcsából induló belső szögfelező a BC oldalt a D pontban, az AD szakasz felezőmerőlegese az AC oldalt az E pontban metszi. Az E pontra illeszkedő és az AD-vel párhuzamos egyenes a BC oldalt az F pontban metszi.
   a) Bizonyítsa be, hogy az ED párhuzamos az AB-vel!
   b) Igaz-e, hogy az EF felezi a CED szöget?
9. Egy ABC háromszög C csúcsából merőlegeseket bocsátunk az A illetve B csúcsokból induló külső és belső szögfelezőkre. Mutassuk meg, hogy az így nyert négy merőleges talppontjai egy egyenesen vannak!

10.
   a) Igaz-e, hogy ha két háromszögben van két-két azonos hosszúságú oldal és van egy-egy azonos nagyságú szög, akkor egybevágóak?
   b) Igaz-e, hogy ha két háromszögben van két azonos hosszúságú oldal és két azonos nagyságú szög, akkor egybevágóak?
   c) Lehet-e egy ponthalmaz egybevágó a részhalmazával?

11. Adott egy AB szakasz. Színezd a sík azon pontjait!
    Pirosra azokat a pontokat, melyekre ABC háromszög derékszögű
    Kékre azokat a pontokat, melyekre ABC háromszög hegyesszögű
    Zöldre azokat a pontokat, melyekre ABC háromszög tompaszögű
12.
    a) Egy egyenlőszárú háromszög alapján felvett tetszőleges P pontból párhuzamosokat húzunk, melyek a szárakat X és Y pontokban metszik. Mutasd meg, hogy PX + PY nem függ a P megválasztásától.
    a) Egy egyenlőszárú háromszög alapjának meghosszabbításán felvett tetszőleges P pontból párhuzamosokat húzunk, melyek a szárak egyeneseit X és Y pontokban metszik. Mutasd meg, hogy $|PX - PY|$ nem függ a P megválasztásától.
13.
    a) Mi azon pontok halmaza, melyek egy félegyenestől adott d távolságra vannak?
    b) Mi azon pontok halmaza, melyek egy szakasztól adott d távolságra vannak?
    c) Mi azon pontok halmaza, melyek szögvonaltól adott d távolságra vannak?
    d) Mi azon pontok halmaza, melyek egy két pontból álló alakzattól adott d távolságra vannak?
    e) Mi azon pontok halmaza, melyek egy két félegyenesből álló alakzattól adott d távolságra vannak?
    f) Mi azon pontok halmaza, melyek egy két szakaszból álló alakzattól adott d távolságra vannak?
14. Egy ABCD rombusz AB oldalát rögzítjük, az A csúcsnál levő szögét 0-tól 180 fokig változtatjuk. Mi lesz az átlók metszéspontjának a halmaza?

15. Szerkesztendő háromszög, ha adott két oldalának a különbsége, a harmadik oldala és egy szöge. Hány megoldása lehet a feladatnak?
16. A háromszög alábbi adatai – tehát az oldalak, szögek, magasságok és súlyvonalak - közül adott tetszőleges három. Szerkesztendő a háromszög!
    a, b, c,
    α, β, γ,
    m_a, m_b, m_c,
    s_a, s_b, s_c,

17. Egy ABC háromszög AC és BC oldalára kifelé ACB' és BCA' szabályos háromszögeket állítunk. Mutasd meg, hogy AA' = BB' és hogy ezek 60 º-os szöget zárnak be egymással.
18. Egy hatszög minden szöge 120º. Mutasd meg, hogy két szomszédos oldal összege megegyezik a szembenlévő szomszédos oldalak összegével.
19. Egy trapéz hosszabbik alapja *a*, rövidebbik alapja *b* hosszúságú. Szárai derékszöget zárnak be egymással. Mutasd meg, hogy az alapok felezőpontját összekötő szakasz hossza $a - b$.

20. Mutasd meg, hogy egy *a* és *b* oldalú parallelogramma szögfelezői téglalapot határoznak meg, melyben az átlók hossza éppen egyenlő $a - b$.

22. Egy ABCD négyszög belsejében felvett P pontot kössünk össze a négyszög csúcsaival.

a) Keressük meg azt a pontot, melyre az AP + BP +CP + DP összeg minimális lesz.

b) Bizonyítsuk be, hogy ez az összeg nagyobb a négyszög kerületének felénél

23. Egy ABC háromszög belsejében felvett P pontot kössünk össze a háromszög csúcsaival.

a) Bizonyítsuk be, hogy az AP + BP +CP összeg nagyobb a háromszög kerületének felénél, de kisebb a háromszög kerületénél.

b) (Nehéz ***)
Keressük meg azt a pontot, melyre az AP + BP +CP összeg minimális lesz.

24. Mutasd meg, hogy minden négyszögben van olyan oldal, amelyik kisebb valamelyik átlónál.

25. Egy sokszög belsejében felveszünk egy tetszőleges P pontot. Bizonyítsd be, hogy ha ebből a pontból merőlegest állítunk a sokszögnek a P-hez legközelebbi oldalára, a merőleges talppontja ennek az oldalnak a belsejébe fog esni.

26. Egy ABC háromszög valamely belső P pontját tükrözzük az oldalakra, majd a kapott képet összekötjük ennek az oldalnak a végpontaival. Az így nyert P_1, P_2 és P_3 pontok és a háromszög csúcsai tehát kifeszítenek egy hatszöget. Mi a feltétele annak, hogy ez a hatszög konvex legyen?

27. Adott egy egyenes és rajta kívül két különböző pont, A és B.

a) Az egyenes mely P pontjára lesz az AP + BP összeg minimális?

b) Az egyenes mely Q pontjára lesz az AQ - BQ különbség abszolút értéke maximális?

28. Adott egy szögtartomány belsejében egy R rögzített ponttal. Szerkesszünk minimális kerületű háromszöget, melynek egyik csúcsa R, másik két csúcsa pedig a szög szárain van.

29. (nehéz*) Mutasd meg, hogy egy hegyesszögű háromszögbe beírható háromszögek közül a legkisebb kerületűnek a csúcsai a magasságtalppontok.

30. Mutasd meg, hogy egy háromszög

a) a középvonalak által alkotott háromszög súlypontja megegyezik az eredeti háromszög súlypontjával

b) a középvonalak által alkotott háromszög magasságpontja megegyezik az eredeti háromszög körülírt körének középpontjával

c) hozzáírt köreinek középpontjai által alkotott háromszög magasságpontja megegyezik az eredeti háromszög beírt körének középpontjával

31. a) Ha egy hegyesszögű háromszögben összekötjük a magasságtalppontokat, megkapjuk középen a talpponti háromszöget, és a csúcsoknál még három darab

háromszöget. Mutassuk meg, hogy a csúcsoknál keletkező háromszögek hasonlóak az eredeti háromszöghöz.

b) Bizonyítsuk be, hogy a talpponti háromszög körülírt körének középpontja megegyezik az eredeti háromszög magasságpontjával.

32. Egy körnek AB átmérőjén úgy választjuk a C és D pontokat, hogy azok a kör középpontjától egyenlő távolságra legyenek. Mutassuk meg, hogy ha e két pontot a kör kerületének egy tetszés szerinti P pontjával összekötjük, akkor a

$$CP^2 + DP^2$$

összeg állandó.

33. Bizonyítsd be, hogy egy parallelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az összes oldalai négyzetének összegével. Tehát

$$2a^2 + 2b^2 = e^2 + f^2$$

34. Bizonyítsd be, hogy egy „térbeli parallelogramma”, vagyis egy parallelepipedon átlóinak négyzetösszege megegyezik az összes oldalai négyzetének összegével. Tehát

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 = e^2 + f^2 + g^2$$

35. Mutasd meg, hogy egy háromszög oldalai és súlyvonalai között fennáll a következő összefüggés:

$$a^2 + 4s_a{}^2 = b^2 + c^2$$

II. rész

1. Egy lakatlan szigetre érkezik két rabló a zsákmánnyal. Szeretnék ravaszul elásni, hogy ha később visszajönnek ők megtalálják, de más ne. Két nagy csúcsos szikla, s egy jellegzetes pálmafa van a szigeten. Egyiküknek a következő ötlete támad. Az egyik szikla körül 90 fokkal a másik irányába elforgatják a pálmafát, így kapják az első segédpontot. Ugyanezt megismétlik a másik szikla körül is. A kapott két segédpont által meghatározott szakasz felezőpontjába ássák el a kincset. Ez tetszik a másiknak is, elvégzik a munkát. Két év múlva visszatérnek, s kiderül, hogy a pálmafa nyomtalanul eltűnt, kiszáradt vagy tövestől kiszedték. Vajon megtalálják-e a kincset?

2. Egy háromszög három oldala fölé egy-egy négyzetet szerkesztünk. A négyzetek háromszögtől különböző csúcsai egy hatszöget alkotnak. Állításunk, hogy ennek a hatszögnek minden második oldala az eredeti háromszög egy súlyvonalának hosszával egyezik meg. Miért?

3. Adva van egy sokszög minden oldalfelező merőlegese sorban. Hogyan szerkeszthető meg a sokszög? Először próbálkozz háromszöggel, négyszöggel, s próbálj általánosítani!

4. Adva van egy tetszőleges háromszög. Minden oldala fölé szabályos háromszöget rajzolva milyen lesz ezen háromszögek középpontjai által meghatározott háromszög? Mi a helyzet négyszögek és négyzet esetén?

5. Egy háromszög csúcsaira vonatkozó középpontos tükrözések egymásutánja mi lesz? Mi a helyzet a térben tetraéderrel?

További feladatok a kétkötetes Egységes érettségi feladatgyűjteményből I. kötet:
1853, 1860, 1864, 1865, 1872, 1890

12. Bizonyítsd be, hogy a háromszög szögfelezőjét a szögfelezők metszéspontja a következő
arányban osztja: A csúcs melletti rész úgy aránylik a másik részhez, mint a szögfelezőt közrefogó két oldal összege a harmadik oldalhoz.

13.. Szögfelező tétel és az Apolloniosz kör. Bizonyítsd be, hogy két ponttól azonos távolságarányú pontok halmaza a síkban egy kör!

14. Ptolemaiosz-tételének általánosítása:
Igazold, hogy ha egy négyszög négy oldala a, b, c, d hosszúságú, míg átlói e, illetve f, akkor
a következő egyenlőtlenség mindig fennáll: $ac + bd \geq ef$! Mikor lesz egyenlőség?

15. Milyen hasonlósági transzformációk viszik a derékszögű háromszöget a magasság behúzásával keletkező kisebb derékszögű háromszögekbe? (Magasság és befogótétel!)

16. Egy külső pontból körhöz húzott érintő illetve a szelőszakaszokra vonatkozó összefüggés
levezetése. Ismét a hasonlósági transzformáció meghatározását is végezd el!

17. Egy tetraéderben a szögfelező sík hogyan osztja a szemközti lap területét?

18.* Igazold, hogy három kör külső hasonlósági pontjai mindig egy egyenesen lesznek!

19. Egy fényképen a kamerától 12 méterre álló fa 7 cm „magas”. Ugyanazon a képen a fa előtt,
a kamerához képest 2 méterrel közelebb álló barátunk 4 cm magasságúnak látszik.
a) Ha tudjuk, hogy a barátunk 1,80 méter magas, akkor mit lehet mondani a fáról?
b) Hányadrészére kicsinyítette a kép a „valóságot” ?

20. Egy utca a Budapest térképen az A3 négyzetben van, míg egy másik a D7-ben. Ha egy négyzet 4x4 cm-es a térképen, míg a lépték 1:25 000-hez, akkor milyen tartományban mozoghat két a fenti utcákban lévő ház „légvonalbeli” távolsága?

21. Két egymástól 90 km-re levő adótorony hatósugara 75 illetve 60 km. A két tornyot összekötő szakaszra merőlegesen a nagyobb hatósugarútól 60 km-re halad egy egyenes út.
a) Vegyen fel egy koordinátarendszert úgy, hogy az egyik adó legyen a kezdőpont, s ebben adja meg a másik adó koordinátáit, illetve az út egyenletét!
b) Határozza meg az út azon szakaszát, ahol mindkét adó fogható!
c) Hol nem fogható egyáltalán adás?

22. Egy körív alakú hidat helyezzen el úgy egy koordinátarendszerben, hogy a híd legmagasabb pontja legyen a rendszer kezdőpontja.
Mi lesz az ív egyenlete, ha a hídfők távolsága 100 méter, és a híd „magassága” 5 méter?

23. a) Adja meg az $A = (2; 1)$ $B = (0; 4)$ és $C = (-5; -2)$ pontok által meghatározott háromszög súlypontjának koordinátáit!
b) Adja meg az *ABC* köré írt kör középpontjának koordinátáit!
c) Adja meg *ABC* magasságpontjának koordinátáit!

24. Egy négyszög súlypontjának koordinátáit úgy kapjuk meg, hogy a négy csúcs megfelelő koordinátáinak vesszük a számtani közepét.
a) Mutassa meg, hogy a négyszög két átlójának felezőpontját összekötő szakaszon rajta van a négyszög súlypontja!
b) Milyen arányban osztja a súlypont a két átló felezőpont által meghatározott szakaszt?

25. Egy *ABCD* konvex négyszögben az *AB* szakasz *A*-hoz közelebbi harmadoló pontját *H*-t kössük össze a *DC* szakasz *D*-hez közelebbi harmadoló pontjával *J*-vel, valamint az *AD* szakasz ismét *A*-hoz közelebbi harmadoló pontját *K*-t a *BC* szakasz *B*-hez közelebbi harmadoló pontjával *I*-vel.
Milyen arányban osztja a *HJ* szakaszt az *IK* szakasz?

26. Egy parabola keresztmetszetű tükröt helyezzen el úgy egy koordinátarendszerben, hogy a parabola „fenékpontja” éppen az origóban legyen. Ekkor a tükör egyik szélső pontjának koordinátái: (4; 4).
a) Mi lesz a parabola egyenlete?
b) Mi annak a körnek az egyenlete, amelyik átmegy a megadott (4; 4) pontot, a parabola fenékpontján és a sugara 5 egység?

27. Egy koordinátarendszerben az *y* tengellyel párhuzamos tengelyű parabola keresztülhalad az $A = (1; -1)$, a $B = (-2; 2)$ és a $C = (0; 3)$ ponton. Adja meg a parabola egyenletét!

28. Bizonyítsuk be, hogy egy négyszög átlói akkor és csak akkor merőlegesek egymásra, ha a
szemközti oldalak négyzetösszege egyenlő!

29. a) Hogyan határozza meg egy parallelogramma csúcsából az átlóinak felezőpontjába mutató vektort, ha az ebből a csúcsból induló két élvektorát **a** illetve **b** jelöli?
b) Hogyan határozza meg egy trapéz csúcsából az átlóinak felezőpontjába mutató vektort, ha az ebből a csúcsból induló két élvektorát **a** illetve **b** jelöli, és az **a**-ral párhuzamos oldalának a hossza éppen $|\mathbf{a}|/2$?
c) Hogyan határozza meg egy általános négyszög középvonalainak metszéspontjába mutató vektort, ha a sík egy pontjából a négyszög csúcsaihoz vezető vektorok rendre **a**, **b**, **c**, **d** ?

30. Jelölje az egység élhosszúságú szabályos tetraéder egy csúcsából kiinduló élvektorait **a**, **b**, **c**. Mi az eredménye a következő műveleteknek:
a, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot\mathbf{c}$
b, $(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}+\mathbf{c})$
c, $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})(\mathbf{a}-\mathbf{c})$?

31. Egy repülőgép szélcsendes időben 900 km/h-ás sebességgel tud haladni. Ha egy viharos napon repül az eredeti irányához képest 15°-os szöget bezáró irányban, akkor ugyannyi idő alatt ér célba, mint szélcsendben.
a) Készítsen vektorábrát a feladat feltételeinek megfelelően!
b) Szerkessze is meg a szélerősség vektorát!
c) Mekkora a szél erőssége km/h-ban?

32. Az *ABC* háromszögben az *A* és *B* csúcsból induló súlyvonalak merőlegesek egymásra. Igazoljuk, hogy ennek a háromszögnek a *C* csúcsnál fekvő γ szögére:

$$\cos\gamma \geq \frac{4}{5} .$$

33*. Az *ABCD* tetraéder súlypontját jelölje *S*. Igazoljuk, hogy az $SA^2+SB^2+SC^2+SD^2$ összeg egyenlő a tetraéder élei négyzetösszegének negyedrészével.

34*. Egy *n*x*n*-es táblázat minden mezőjén 1, -1 vagy 0 áll. Bármelyik két sort választjuk is ki, és a két sor azonos oszlopban álló elemeit összeszorozzuk, akkor a kapott szorzatok összege zérus. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a táblázatban található számok összege nem nagyobb, mint $n\sqrt{n}$.

35.* Egy körön vegyünk fel *n* (≥3) pontot. Képezzük a összes lehetséges pontpár esetén a távolságaik négyzetösszegét! Mikor lesz a négyzetösszeg maximális?