Bevezető matematika feladatgyűjtemény

Gémes Margit, Szentmiklóssy Zoltán

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Természettudományi Kar
Matematikai Intézet

2014. augusztus 10.

Tartalomjegyzék

1. feladatsor: vegyes feladatok

1.1. Hol a hiba?

$\lg \frac{1}{2} = \lg \frac{1}{2}$ és $3 > 2.$

Tehát $3 \cdot \lg \frac{1}{2} > 2 \cdot \lg \frac{1}{2}.$

Így $\lg \left(\frac{1}{2}\right)^3 > \lg \left(\frac{1}{2}\right)^2.$

A $\lg x$ függvény szigorúan monoton nő, ezért $\left(\frac{1}{2}\right)^3 > \left(\frac{1}{2}\right)^2,$

vagyis $\frac{1}{8} > \frac{1}{4}.$

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán! (Zöld könyv 1084., 1054., 1070.)

1.2. $\lg(x^2 - 5x - 9) - \lg(2x - 1) = 0$

1.3. $\lg(x - 1) = 2 - \lg 4$

1.4. $\lg(x - 9) + 2\lg\sqrt{2x - 1} = 2$

1.5. $\lg(10 - x) + \lg(x - 10) = -4$

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán! (Rábai Imre: Elemi Matematikai Példatár I. Trigonometria - Koordináta-geometria, 13. alapfeladat)

1.6. $4\sin^2 x - 8\cos^2 x = 1$

1.7. $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$

1.8. $8\cos 2x + 4\sin^2 x = -1$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

1.9. $(x-2)(2x+5) > 0$

1.10. $(x+3)(3x-4) \leq -12$

1.11. $\dfrac{(x+3)(x-5)}{x} \geq 0$

1.12. $\dfrac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x+5}}{3x-10} > 0$

1.13. Rajta van-e az $A(3;5)$ pont az $x^2-2y=-1$, illetve az $y^2-2x=-1$ egyenletű alakzatokon?

Hol helyezkedik el a $B(-4;3)$ pont a következő feladatokban szereplő alakzatokhoz képest?

1.14. $4x-3y=7$

1.15. $2x+3y=1$

1.16. $x+y=0$

1.17. $x^2+y^2=50$

1.18. $x^2+y^2=1$

1.19. $x^2+y^2=25$

1.20. $|x|+|y|=7$

1.21. $|x+y|=1$

Hol helyezkednek el a derékszögű koordinátarendszer síkjában azok a pontok, amelyek koordinátái eleget tesznek a következő egyenleteknek, illetve egyenlőtlenségeknek?

1.22. $2|x|+3|y|=0$

1.23. $|x|-|y|=0$

1.24. $|x|+|y|=1$

1.25. $|x|+|y|>1$

1.26. $|x+y|=1$

1.27. $|x-y|=1$

1.28. $|x-y|<1$

1.29. $x^2+y^2=1$

1.30. $x^2+y^2<1$

1.31. Két 1 forintost feldobunk. Mi a valószínűsége annak, hogy az eredmény két "fej" lesz?

1.32. Egy derékszögű háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő tagjai. A háromszög területe 150cm^2. Mekkorák a háromszög oldalai? (Zöld könyv 3540.)

1.33. Egy derékszögű háromszög oldalainak hosszúsága egy mértani sorozat első három tagja. Határozza meg a háromszög szögeit! (Zöld könyv 3595.)

2. feladatsor: vegyes feladatok

2.1. Egy háromszög csúcspontjai: $A(2;4), B(-3;-5), C(3;-7)$. Számítsuk ki a háromszög kerületét és területét!

2.2. Adott az $A(2;4)$ és a $B(8;3)$ pont. Határozzuk meg az x tengely azon P pontját, amely esetén az $AP + PB$ távolság a lehető legkisebb lesz!

2.3. Az $y = \frac{1}{4}x^2$ egyenletű parabolának melyik pontja van a legközelebb a $(0;5)$ ponthoz? (Zöld könyv 3412.)

2.4. Egy növekvő számtani sorozatnak a 2 és a 4 is tagja. Igazoljuk, hogy e sorozatnak a tagjai között szerepel valamennyi pozitív páros szám! (Zöld könyv 3529.)

2.5. Van-e olyan nem állandó mértani sorozat, amelynek minden tagja négyzetszám? (Zöld könyv 3598.)

2.6. Egy 5×5-ös sakktábla minden mezőjén ül egy szöcske. Adott jelre minden szöcske átugrik valamelyik szomszédos mezőre. (Két mező akkor szomszédos, ha van közös oldaluk.) Bizonyítsuk be, hogy az ugrás után lesz üres mező!

2.7. Varázsországban a Nagy Zöld Sárkánynak 100 feje van. A mesebeli Vitéznek olyan kardja van, amivel egy csapásra csak 33 vagy 21 vagy 17 fejét tudja levágni. Igen ám, de az első esetben a Sárkánynak 18 új feje nő ki, a második esetben 36, a harmadik esetben pedig 14.Ha a Sárkánynak az összes feje lehullott, akkor már nem nő ki több. Le tudja-e győzni a Vitéz a Sárkányt? (Imrecze Zoltánné, Reiman István, Urbán János: Fejtörő feladatok felsősöknek, III. fejezet, Számelméleti feladatok 30.)

3. feladatsor: logika, kombinatorika

Matematika országban a bíró csak a bizonyítékoknak hisz. Például, ha L azt állítja, hogy van fekete oroszlán, akkor állításának helyességéről meggyőzheti a bírót azzal, ha mutat neki egy fekete oroszlánt.

3.1. F azt állítja, hogy minden oroszlán fekete. Elég bizonyíték-e, ha mutat a bírónak egy fekete oroszlánt?

3.2. F azt állítja, hogy minden oroszlán fekete, G pedig azt állítja, hogy F téved. Hogyan bizonyíthatná G az állítását?

3.3. P azt állítja, hogy a 2-re végződő négyzetszámok száma páros. Q szerint P téved. Melyikük állítása igaz? Hogyan lehet erről meggyőzni a bírót?

Döntsük el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak! A válaszokat indokoljuk!

3.4. Ha egy csoportban 14 tanuló van, akkor biztosan van köztük legalább 3, akiknek ugyanabban a hónapban van a születésnapja.

3.5. Ha egy csoportban 2 tanulónak ugyanabban a hónapban van a születésnapja, akkor legalább 13 tanuló van a csoportban.

3.6. Ha $x > y$, akkor $x^2 > y^2$. (Pósa Lajos: Matematika összefoglalás I., 184. alapján)

3.7. Ha $x > y$, és egyik szám sem 0, akkor $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$. (Pósa Lajos: Matematika összefoglalás I., 185. alapján)

3.8. Ha $x > y$ és $a > b$, akkor $x - a > y - b$.

Adjunk meg olyan pozitív egész számot, amelyre a feladatokban szereplő három állítás közül pontosan kettő igaz!

3.9. n osztható 6-tal, n nem osztható 2-vel, n jegyeinek összege 12

3.10. n nem négyzetszám, n 2-re végződik, n osztható 3-mal

Lehet-e a következő állításokba a betűk helyére olyan számokat írni, hogy a feladatban szereplő két állítás közül pontosan az egyik legyen igaz?

3.11. **A:** $x + y = 5$ **B:** $x^2 + y^2 + 2xy = 25$

3.12. **P:** $a - b = 10$ **Q:** $ab - b^2 = 10b$

3.13. Képezzünk hatjegyű számokat az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből úgy, hogy minden számjegyet csak egyszer használhatunk fel. Hány ilyen számot tudunk képezni? Közülük hány lesz osztható 3-mal, 4-gyel, illetve 5-tel?

3.14. Képezzünk hatjegyű számokat az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből úgy, hogy a számjegyeket többször is felhasználhatjuk. Hány ilyen számot tudunk képezni? Közülük hányban nem szerepel a 3-as számjegy? Hányban szerepel az 5-ös számjegy? Mi a valószínűsége annak, hogy az összes ilyen számból véletlenül kiválasztva egyet, a kiválasztott szám minden számjegye különböző lesz?

3.15. Hány részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, \ldots 100\}$ halmaznak? Ezek közül hányban van benne a 2? Hányban van benne a 2 és az 5? Hányban van benne a 2 vagy a 4? Hányban nincs benne 2?

3.16. A Fogröntgen szigeten az embereket fénykép helyett a fogászati röntgenképükkel azonosítják. Ez azért egyszerű, mert a szigeten nincs 2 olyan ember, akinek pont ugyanazok a fogai hiányoznának. Hány ember élhet legfeljebb a szigeten?

4. feladatsor: logika, kombinatorika

4.1. Egy osztály 28 tanulója közül 8-an felvételiznek matematikából, 6-an fizikából, 4 tanuló matematikából is és fizikából is. Hányan nem felvételiznek egyik említett tárgyból sem? (Zöld könyv 224.)

4.2. Egy dobozban van 10 piros 15 fehér, 20 zöld golyó. Hány golyót kell kivennünk ahhoz, hogy a kivettek között biztosan legyen 2 piros? Két piros és 2 fehér? 2 piros vagy 2 fehér? Hány golyót kell kivennünk ahhoz, hogy a kivettek között biztosan több piros legyen, mint fehér? Hány golyót kell kivennünk ahhoz, hogy a kivettek között biztosan több zöld legyen, mint fehér?

4.3. Mutassuk meg, hogy öt darab 10-nél nagyobb prímszám közül mindig kiválasztható 2, melyek különbsége osztható 10-zel! (Róka Sándor: Szakköri feladatok matematikából, 12. fejezet, 1. példa)

Mi a logikai kapcsolat a feladatokban szereplő állítások között, azaz melyikből következik a másik? A választ indokoljuk!

4.4. **A:** $x > 5$

B: $x^2 > 25$

4.5. **A:** $\sqrt{x^2 - 5} < 3$

B: $x^2 - 5 < 9$

4.6. **A:** $\sqrt{x^2 - 5} > -4$

B: $x^2 - 5 > 16$

4.7. **A:** $x^2 - x - 6 = 0$

B: $x = 2$

4.8. **A:** $x^2 - x - 6 > 0$

B: $x > 2$

4.9. **A:** $x < 7$ és $y < 3$

B: $x - y < 4$

4.10. **A**: $|x - 5| < 0,1$ és $|y - 5| < 0,1$

B: $|x - y| < 0,2$

4.11. Egy 13 jegyű kódszámban bármely 3 szomszédos számjegy összege 11. A kód második jegye 6, a tizenkettedik jegy pedig 4. Mi a 13-adik jegy?

4.12. Valaki pozitív egész számokat ír fel egy papírlapra. Hány felírt szám esetén lehetünk biztosak abban, hogy kiválasztható közülük (a) kettő, (b) három, amelyek mind azonos számjeggyel kezdődnek, továbbá az is igaz, hogy utolsó számjegyeik is azonosak? (Például 3518, 328, 38) (Kosztolányi, Mike, Vincze: Érdekes matematikai feladatok, 251.)

4.13. A hím oroszlán elejtett egy antilopot, s elvitte magának és a családjának: párjának és három kölykének ebédre. Ha csak maga fogyasztaná el, akkor három óra alatt megenné, ha csak a párja, akkor az négy óra alatt enné meg. És ha csak egy-egy kölyökoroszlán enne belőle, az tíz óra alatt fogyasztaná el. Mennyi ideig tart az oroszláncsalád együttes ebédje? (Kosztolányi, Mike, Vincze: Érdekes matematikai feladatok, 39.)

4.14. Egy futballcsapat 11 játékosának átlagéletkora 22 év. Meccs közben az egyik játékos megsérült, le kellett mennie a pályáról (csere nélkül). Így a játékosok átlagéletkora 21 év lett. Hány éves a sérült játékos? (Kosztolányi, Mike, Vincze: Érdekes matematikai feladatok, 51.)

4.15. Egy 4×4-es táblázat egy mezője fekete, a többi fehér. Egy lépésben bármely sor vagy oszlop minden mezőjét ellenkező színűre változtathatjuk. Elérhető-e néhány lépés elvégzésével, hogy minden mező fehér legyen? (Kosztolányi, Mike, Vincze: Érdekes matematikai feladatok, 283.)

5. feladatsor: hatvány, gyök, logaritmus

5.1. Adjunk meg két racionális számot $\frac{a}{b}$ alakban, ahol a és b egész számok, úgy, hogy mindkét szám $\frac{4}{113}$ és $\frac{5}{113}$ között legyen!

5.2. Adjunk meg (a) 1000-nél nagyobb, (b) $0,001$-nél kisebb pozitív irracionális számot!

5.3. Adjunk meg két irracionális számot úgy, hogy mindkét szám $\frac{4}{113}$ és $\frac{5}{113}$ között legyen!

Alakítsuk szorzattá a következő kifejezéseket!

5.4. $x^2 - 4$

5.5. $4x^2 - 9b^2$

5.6. $a^3 - b^3$

5.7. $x^3 - 1$

5.8. $a^3 + b^3$

5.9. $y^3 + 1$

5.10. $8a^3 - 27$

5.11. $27x^3 + 8$

5.12. $8a^3 + b^6$

Melyik szám nagyobb?

5.13. $\sqrt{2}$ vagy $1,4$

5.14. $\frac{3}{7}$ vagy $\frac{5}{11}$

5.15. $\sqrt[5]{4}$ vagy $\sqrt[4]{5}$

5.16. $5\sqrt{2} - 7$ vagy $\frac{1}{5\sqrt{2} + 7}$

Gyöktelenítsük a következő törtek számlálóját!

5.17. $\frac{\sqrt{7} - \sqrt{11}}{3}$

5.18. $\frac{\sqrt{a+1} - \sqrt{a}}{ab}$

5.19. $\frac{\sqrt{n^2+2} - n}{5}$

5.20. $\frac{\sqrt{n^4+2} - \sqrt{n^4-2}}{5}$

5.21. Hozzuk az $\dfrac{\left(a^{1/2}\,b^{2/3}\right)^{-\frac{3}{4}}\cdot\left(a^{1/3}\,b^{1/4}\right)^{2}}{\left(a^{1/12}\right)^{-\frac{1}{2}}}$ kifejezést egyszerűbb alakra, ahol a és b pozitív számok! (Zöld könyv 397.)

Határozzuk meg a következő számok pontos értékekét számológép használata nélkül! (Pósa Lajos: Matematika összefoglalás I. 295., 299., 303., 306. feladatok alapján.)

5.22. 9^{-2}

5.23. $8^{\frac{2}{3}}$

5.24. $\log_3 81$

5.25. $\log_{81} 3$

5.26. $\log_9(-3)$

5.27. $\log_{-2} 8$

5.28. $\log_{\sqrt{3}} 9$

5.29. $\lg 1$

5.30. $\lg\sqrt{10}$

5.31. $2^{\log_2 5}$

5.32. $4^{\log_2 3}$

5.33. $5^{1-3\cdot\log_5 2}$

5.34. $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-\dfrac{1}{2}}$

5.35. $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\dfrac{1}{2}}$

5.36. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{(\log_9 16)-\dfrac{1}{2}}$

Melyik szám a nagyobb?

5.37. $\log_5 7$ vagy $\log_7 5$

5.38. $\log_5 \dfrac{1}{2}$ vagy $\log_7 \dfrac{1}{2}$

5.39. $\log_3\left(\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ vagy $\log_5\left(\dfrac{1}{2}\log_7 49\right)$

Igazak-e a következő állítások azon a halmazon, ahol az egyenlőség mindkét oldala értelmes? Indokoljuk a válaszokat!

5.40. $a^n\cdot a^k = a^{n\cdot k}$

5.41. $(a^n)^k = a^{n\cdot k}$

5.42. $a^n + a^k = a^{n\cdot k}$

5.43. $a^{n^k} = a^{n\cdot k}$

5.44. $\log_a b - \log_a c = \dfrac{\log_a b}{log_a c}$

5.45. $\log_a b - \log_a c = \log_a \dfrac{b}{c}$

5.46. $\log_a(b-c) = \dfrac{\log_a b}{\log_a\ c}$

5.47. $\sqrt{a^2+b^2} = a+b$

5.48. $(a-b)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2}$

5.49. $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b$

5.50. $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$

5.51. $\log_a c = \dfrac{\log_b a}{\log_b c}$

5.52. $\log_a c = \dfrac{\log_a b}{\log_c b}$

5.53. Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán!

$\sqrt{x-5} + |x-3| + \log_7 x^4 = 2\log_7 x^2$

6. feladatsor: hatvány, gyök, logaritmus

Melyik szám a nagyobb?

6.1. $\sqrt[4]{4}$ vagy $\sqrt[5]{5}$

6.2. $\lg 10^{\sqrt{2}}$ vagy $\log_{\sqrt{5}} 5$

6.3. $\sin \frac{3 \cdot 2^{1000}+1}{3}\pi$ vagy $\log_3 \sqrt{3}$

6.4. Hozzuk a kifejezést egyszerűbb alakra! (Zöld könyv 428.)

$$\log_a \frac{(\sqrt{a})^3 \, a^{1/2} \, (a^2)^3}{a^{-1}}, \quad \text{ahol } a > 0 \quad \text{és} \quad a \neq 1$$

Melyik szám a nagyobb?

6.5. $\log_7 \frac{2}{11}$ vagy $-\log_7 \frac{11}{2}$

6.6. $\sqrt{\log_5 125}$ vagy $\log_5 \sqrt{125}$

6.7. $\log_7(5\sqrt{2}-7)$ vagy $-\log_7(5\sqrt{2}+7)$

Legyen $a > 0$ valós szám. Milyen összefüggést tudunk mondani az egy feladatban szereplő kifejezések között? (Pósa Lajos: Matematika összefoglalás I. 307.)

6.8. $\log_4 a$ és $\log_2 a$

6.9. $\log_9 a$ és $\log_3 a$

6.10. $\log_8 a$ és $\log_2 a$

Igazak-e a következő egyenlőségek minden olyan esetben, amikor az egyenlőség oldalán álló mindkét kifejezés értelmes? (Egységes érettségi feladatgyűjtemény, Matematika I., 418., 419., 426. alapján)

6.11. $a^{\lg b} = b^{\lg a}$

6.12. $\log_{a^k} a^n = \dfrac{n}{k}$

6.13. $\log_a \dfrac{1}{b} = \log_{\frac{1}{a}} b$

Igazak-e a következő állítások?

6.14. $3^2 \cdot 3^5 = 3^{10}$

6.15. $4^{\frac{1}{2}} + 9^{\frac{1}{2}} = (4+9)^{\frac{1}{2}}$

6.16. Ha $a > b \quad (a, b \neq 0)$, akkor $a^{-1} < b^{-1}$

6.17. Ha $c > 0, c \neq 1$, akkor $\log_c \dfrac{3}{4} > \log_c \dfrac{4}{5}$

6.18. Ha $c > 0, c \neq 1$, akkor $\log_c \dfrac{17}{11} > \log_c \dfrac{15}{13}$

6.19. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^a > \left(\dfrac{4}{5}\right)^a$

6.20. $\left(\dfrac{17}{11}\right)^a > \left(\dfrac{15}{13}\right)^a$

6.21. $3^5 \cdot 3^{10} = 3^{15}$

Mi a logikai kapcsolat az egy feladatban szereplő állításpárok között, azaz melyik állításból következik a másik?)

6.22. **P:** $n^2 > 100$
Q: $n > 7$

6.23. **P:** $n^2 > 100$
Q: $n > 10$

6.24. **P:** $n^2 > 100$
Q: $n > 17$

6.25. **P:** $\sqrt{n} > 20$
Q: $n > 500$

6.26. **P:** $\sqrt{n} > 20$
Q: $n > 100$

6.27. **P:** $\sqrt{n} > 20$
Q: $n > 100$

6.28. **P:** $10^x < 8$
Q: $\lg x < 1$

6.29. $\dfrac{5}{n} < 100, \quad (n > 0)$
Q: $n > 100$

6.30. **P:** $2n^2 + 3n + \frac{5}{n} > 100$

Q: $n > 10$

Számológép használata nélkül végezzük el a következő osztásokat!

6.31. $\frac{25^3 - 7^3}{18}$

6.32. $\frac{25^3 + 7^3}{32}$

6.33. $\frac{8 \cdot 12^3 - 1}{23}$

6.34. $\frac{27 \cdot 125 + 1}{16}$

6.35. $\frac{11^3 + 1}{12}$

6.36. $\frac{13^3 - 1}{12}$

6.37. Oldjuk meg az $\frac{2^x \cdot (x^2+5) \cdot \log_3 \frac{x-2}{6}}{x+10} = \frac{2^x \cdot (x^2+5) \cdot \log_3 \frac{x-2}{6}}{x+7}$ egyenletet!

Mivel a két tört számlálója megegyezik, ezért a nevezőknek is meg kell egyezniük, ezért $x + 10 = x + 7$, ami lehetetlen. Tehát az egyenletnek nincs megoldása. Jó-e az előbbi érvelés? Van-e megoldása az eredeti egyenletnek?

7. feladatsor: egyenletek, egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

7.1. $\dfrac{8x-5}{2x+5} = 5 - \dfrac{3x+7}{3x-2}$

7.2. $x^2 - (2\sqrt{2}-1)x - (2\sqrt{2}+1) = 0$

7.3. $(x+3)^3 - (x+2)^3 = 19$

7.4. $9^{x+\frac{1}{2}} + 26 \cdot 3^{x-1} = 1$

7.5. $\lg \dfrac{x}{2} = 2 - \lg 25$

7.6. $2\lg \dfrac{2}{10} + \lg(5^{\sqrt{x}} + 1) = \lg(5^{1-\sqrt{x}} + 5)$

7.7. $x^{\lg x} = 1000x^2$

7.8. $(2x+1)^{\lg(2x+1)-3} = 0,01$

7.9. $\log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)] = 1$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

7.10. $\dfrac{1}{x} < 3$

7.11. $\sqrt{15-x} < 2$

7.12. $\sqrt{15-x} > x$

7.13. $\sqrt{x} \geq x$

7.14. $\dfrac{1}{x} \leq x$

7.15. $\dfrac{1}{x^2} \leq x$

7.16. $3^x < 9$

7.17. $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq 9$

7.18. $\log_3 x \leq 9$

7.19. $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 9$

Oldjuk meg a következő paraméteres egyenleteket! (A paraméter a, az ismeretlen x.)

7.20. $3 + ax = 2(x + 4)$

7.21. $\dfrac{x}{x - a} = a + 1$

7.22. $\dfrac{x}{a + 1} = 2x - a$

A p paraméter mely értékeire van a következő egyenleteknek negatív gyökük?

7.23. $\dfrac{2}{x - 1} = 4 - p$

7.24. $6(2 + x) = px$

7.25. $px^2 - 7x + 2 = 0$

7.26. A k mely értékeire lehet a $2x^2 + x + k$ polinomból az $(x + 3)$-at kiemelni?

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

7.27. $x^2 - 4x - 5 \geq 0$

7.28. $x^2 - 4x + 5 \geq 0$

7.29. $x^2 - 4x + 5 < 0$

7.30. $-x^2 + 4x + 5 > 0$

7.31. $-x^2 - 2x - 1 \leq 0$

7.32. $\dfrac{7x - 3}{5x - 4} < 0$

7.33. $\dfrac{7x + 2}{5x + 1} < 1$

7.34. $\dfrac{7x - 2}{5x - 3} < \dfrac{1}{x}$

7.35. $x^2 \leq |x|$

7.36. $\sqrt{x+6} > x - 6$

7.37. $|x+6| \geq x + 6$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket!

7.38. $2^x + 5 \cdot 7^y = 7$
$2^x - 3 \cdot 7^y = -1$

7.39. $\log_5 x + \log_5 y = 1$
$2^x - 4 \cdot 8^y = 0$

7.40. $x^2 + y^2 = 80$
$xy = 32$

7.41. Ha egy téglalap rövidebb oldalát 3cm-rel meghosszabbítjuk, akkor olyan négyzetet kapunk, amelynek területe 24cm^2-rel nagyobb, mint a téglalap területe. Mekkorák a téglalap oldalai?

7.42. A $3,6\text{m}$ magas lépcsőházban 3-mal több lépcsőt kellene elhelyezni, ha minden lépcső magassága 4cm-rel kisebb volna. Hány lépcsője van a lépcsőháznak?

7.43. Egy raktár alaprajza téglalap, amelynek külső hossza 21m, szélessége 10m. A raktár belső alapterülete 180m^2. Milyen vastag a raktár fala?

7.44. Egy derékszögű háromszög kerülete 24cm, területe 24cm^2. Mekkorák az oldalai?

8. feladatsor: egyenletek, egyenlőtlenségek

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

8.1. $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

8.2. $2x^2 - 5x - 3|x-2| = 0$

8.3. $|x^2 - 9| + |x^2 - 4| = 5$

8.4. $\sqrt{6x^2 + 8x - 8} - \sqrt{3x - 2} = 0$

8.5. $\sqrt[3]{x^3 + 4x^2 + 3x - 3} = x + 1$

8.6. $\log_8[4 - 2\log_6(5 - x)] = \dfrac{1}{3}$

8.7. $x^{\lg x} + 10x^{-\lg x} = 11$

8.8. $\log_2 x - 2\log_4 x = 3\log_8 x + 1$

8.9. $\log_x 8 - \log_{4x} 8 = \log_{2x} 16$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

8.10. $\log_3 x \leq 0$

8.11. $\log_{\frac{1}{3}} x \leq 0$

8.12. $\log_x 3 \leq 0$

8.13. $\log_x 3 > 0$

Oldjuk meg a következő paraméteres egyenleteket! (A paraméter a, az ismeretlen x.)

8.14. $(5a - 1)x^2 + (5a - 2)x - 7a - 2 = 0$

8.15. $x^2 - 2(a - 3)x + a^2 - 4 = 0$

A p paraméter mely értékeire van a következő egyenleteknek negatív gyökük?

8.16. $(p - 1)x^2 - 2px + p - 2 = 0$

8.17. $2^{px} = \dfrac{1}{p}$

8.18. $\log_2(px) = p$

8.19. A k paraméter mely értékeire lehet a $4x^2 - 6x + k$ polinomból az $(x-3)$-at kiemelni?

8.20. Az m paraméter mely értékeire lesz az $\frac{x}{x-m} - \frac{2m}{x+m} = \frac{x^2-4x+8m^2}{x^2-m^2}$ egyenlet gyöke kisebb, mint m? Mekkora az m paraméter értéke, ha az egyenlet megoldása $\frac{4}{5}$?

Azonosságok-e a következő egyenlőségek a valós számok halmazán?

8.21. $\sqrt{x^2} = x$

8.22. $\log_3 x + \log_3 y = \log_3 xy$

8.23. $\frac{x^2-1}{x+1} = x - 1$

8.24. $\frac{x^4-1}{x^2+1} = x^2 - 1$

8.25. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$

8.26. $\sqrt{x^{12}y^8} = x^6y^4$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

8.27. $|x+3| < 5$

8.28. $|x+3| + |x-9| < 1$

8.29. $|x-6| < \frac{1}{7}$

8.30. $\left|\frac{1}{x} - 7\right| < \frac{1}{6}$

8.31. Egy autó 100km-en történő benzinfogyasztását v sebesség mellett a $c(v-80)^2+6$ képlettel próbáljuk leírni. Hány liter benzint fogyaszt az autó $100\frac{\text{km}}{h}$ sebesség esetén a képlet szerint? Milyen sebesség mellett fogyasztja a legkevesebb üzemanyagot? Határozzuk meg a c együttható értékét, ha tudjuk, hogy az autó $120\frac{\text{km}}{\text{h}}$ sebesség mellett 9 liter benzint fogyaszt 100km-en! Milyen sebességek esetén lehet reális a képlet? Mondjunk olyan sebességet, ahol a képlet biztosan rossz eredményt ad!

Oldja meg a következő egyenleteket és egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán! (Rábai Imre: Matematika mérőlapok, 54.2/a,b, 55.2/a,b, 56.6/a,c, 20.6)

8.32. $2\sqrt{x^2} = x^2 - 8$

8.33. $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$

8.34. $x^2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$

8.35. $\log_4(\log_2 x) + \log_2(\log_4 x) = 2$

8.36. $2^{2x+1} + 3 \cdot 2^x - 2 > 0$

8.37. $\log_2(2x^2 + 3x + 2) < 2$

8.38. $\sqrt{-x^2 + 2x + 3} > 4 - 2x$

8.39. $\sqrt{-x^2 + 2x + 3} \leq 4 - 2x$

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán! (Rábai Imre: Matematika mérőlapok, 16.1, 64.1, 68.8)

8.40.
$$x^2y + xy^2 = -12$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = -\frac{4}{3}$$

8.41.
$$\frac{1}{xy} + \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}$$
$$x^2y + xy^2 = -2$$

8.42.
$$x^2 = 1 + 6\log_4 y$$
$$y^2 = y \cdot 2^x + 2^{2x+1}$$

9. feladatsor: sorozatok

Írjuk fel a sorozatok első 5 tagját! Írja fel a sorozatok k-adik, $k+1$-edik és $k-1$-edik tagjait!

9.1. $a_n = 2n - 3$

9.2. $b_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

9.3. $c_n = \dfrac{1}{n} + 5$

9.4. $d_n = \dfrac{n+3}{n^2+2}$

9.5. Egy sorozat első tagja 3, a többi tagot pedig az előző tag segítségével adjuk meg: $a_{n+1} = -3a_n + 2$. Írjuk fel a sorozat első 5 tagját!

9.6. Egy sorozat első tagja 3, a többi tagot pedig az előző tag segítségével adjuk meg: $a_n = 2a_{n-1} - 4$. Írjuk fel a sorozat első 5 tagját!

9.7. Egy sorozat első tagja $\frac{3}{2}$, a második tagja 2 a többi tagot pedig az előző két tag segítségével adjuk meg: $a_{n+1} = 2a_{n-1} - 3a_n$. Írjuk fel a sorozat első 5 tagját!

Írjuk fel a következő sorozatok első 5, a 123-adik és 1024-edik tagját!

9.8. $a_n = \begin{cases} 3, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 4, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$

9.9. $b_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{ha } 5 | n \\ \dfrac{1}{n^2}, & \text{ha } 5 \nmid n \end{cases}$

9.10. $c_n = \begin{cases} 3, & \text{ha } n \leq 100 \\ 4, & \text{ha } n > 100 \end{cases}$

9.11. Egy papírlapra felírták egy sorozat első néhány tagját: $1, 3, 5$. Lehet-e a sorozat számtani sorozat? Biztos-e, hogy a sorozat számtani sorozat?

9.12. Legyen $a_n = 8 \cdot \left\{\dfrac{n}{4}\right\} - 1$. Igaz-e, hogy a_n számtani sorozat? (A feladatban $\left\{\dfrac{n}{4}\right\}$ az $\dfrac{n}{4}$ szám törtrészét jelöli.)

Döntsük el, hogy a következő sorozatok közül melyik számtani, illetve melyik mértani sorozat! Számtani vagy mértani sorozat esetén írjuk fel a sorozat első 15, valamint első k tagjának összegét! (Zöld könyv 3478. alapján)

9.13. $a_n = 5n - 2$

9.14. $b_n = \frac{5}{n} - 3$

9.15. $c_n = 2 + n^2$

9.16. $d_n = \frac{n^2 - 9}{n + 3}$

9.17. $e_n = 8$

9.18. $f_n = \sin n\pi$

9.19. $g_n = \frac{3^{n+1}}{2^n}$

9.20. $h_n = \log_5 3^n$

9.21. $i_n = 3^{\log_3 2n+5}$

9.22. $j_n = (-1)^n$

Van-e olyan számtani, illetve mértani sorozat, amelyre teljesülnek a következő feladatok feltételei? Minden választ indokoljunk! (Zöld könyv 3555. alapján)

9.23. a hetedik tag és a huszadik tag is negatív,

9.24. az első tag negatív, a hetedik tag pozitív,

9.25. az első tag pozitív és a huszadik tag negatív?

9.26. Egy sorozat első n tagjának összege $3n^2$ minden pozitív egész számra. Határozzuk meg a sorozat n-edik tagját n függvényében! Igaz-e, hogy ez a sorozat számtani sorozat? Igaz-e, hogy ez a sorozat mértani sorozat?

9.27. Egy sorozat első n tagjának összege $2^n - 1$ minden pozitív egész számra. Határozzuk meg a sorozat n-edik tagját n függvényében! Igaz-e, hogy ez a sorozat számtani sorozat? Igaz-e, hogy ez a sorozat mértani sorozat?

Írjuk fel a következő mértani sorozatok első 9, 23, illetve n tagjának az összegét!

9.28. $a_1 = 3, \quad q = 5$

9.29. $b_1 = -2, \quad q = \frac{1}{3}$

9.30. $c_1 = 7, \quad q = -\frac{3}{5}$

10. feladatsor: sorozatok

10.1. Összeszoroztuk a 2 első tíz pozitív egész kitevőjű hatványát. A 2-nek hányadik hatványát kaptuk?

10.2. Összeszoroztuk $\sqrt{3}$-nak az első tíz pozitív egész kitevőjű hatványát. Háromnak hányadik hatványát kaptuk? És $\frac{1}{3}$-nak hányadik hatványa ez?

10.3. Egy mértani sorozatban az első hat tag összege -7-szerese az első három tag összegének. Mennyi lehet a mértani sorozat hányadosa (kvóciense)?

Van-e olyan mértani sorozat, amelyben a feladatokban szereplő mindhárom szám előfordul?

10.4. $27, \quad 36, \quad 64$

10.5. $1, \quad 2, \quad 3$

10.6. Az a_n sorozat n-edik tagja az n indexnek másodfokú függvénye, ahol n pozitív egész szám. A sorozat első három tagja: $0, 3, 8$. Határozzuk meg a sorozat negyedik és ötödik tagját! Írjuk fel az n-dik tag képletét!

10.7. A pozitív egészek sorozatában a 2-től kezdve minden harmadik szám előjelét negatívra változtattuk. Az így kapott sorozat $(1, -2, 3, 4, -5, 6, 7, -8, \dots)$ első 1000 tagja között melyik az utolsó negatív előjelű szám? Határozzuk meg az első 1000 tag összegét!

Igazak-e minden számtani sorozatban következő összefüggések?

10.8. $a_7 - a_6 = a_3 - a_2$

10.9. $a_{13} = a_{12} \cdot a_{14}$

10.10. $S_n = \frac{n}{2} \cdot [2a_1 + (n-1)d]$

10.11. $S_n = \frac{a_n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$

Igazak-e minden mértani sorozatban következő összefüggések?

10.12. $\frac{a_9}{a_8} = \frac{a_8}{a_7}$

10.13. $\sqrt{a_{13}} = a_{12} \cdot a_{14}$

10.14. $S_n = a_1 \frac{q-1}{q^n-1}$

10.15. $S_n = a_1 \frac{q^n-1}{q-1}$

10.16. Határozzuk meg 5 első n pozitív egész kitevőjű hatványának az összegét és szorzatát! (Pósa Lajos: Matematika összefoglalás I. 376.)

10.17. Határozzuk meg a következő állításpárok logikai kapcsolatát! (Melyik állításból következik a másik?) (Pósa Lajos: Matematika összefoglalás I. 395.)

10.18. **P:** 2^{a_n} mértani sorozat

Q: a_n számtani sorozat

10.19. **P:** a_n mértani sorozat

Q: a_n^2 számtani sorozat

10.20. **P:** a_n^2 mértani sorozat

Q: a_n számtani sorozat

10.21. **P:** a_n mértani sorozat, $a_n \neq 0$

Q: $\frac{1}{a_n}$ számtani sorozat

10.22. Egy mértani sorozatban $a_n = 1, \quad q = 2$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $S_{n+1} = 2S_n + 1$ minden $n \geq 2$ egész esetén, ahol S_n a sorozat első n tagjának összege!

10.23. Hány tagot kell összeadnunk az első tagtól kezdve az $a_n = 3 \cdot 2^n$ sorozatból, hogy az összeg 1 milliónál nagyobb legyen? (Zöld könyv 3561.)

10.24. Egy háromszög oldalhosszúságai egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Jelöljük e sorozat hányadosat q-val! Bizonyítsuk be, hogy $\frac{\sqrt{5}-1}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ (Zöld könyv 3602.)

10.25. Egy mértani sorozatban $a_1 + a_3 + a_5 = 63$ és $a_2 + a_4 = 30$. Határozzuk meg a sorozat első tagját és a hányadosát! (Zöld könyv 3575.)

11. feladatsor: halmazok, függvények

Hány eleme van a következő halmazoknak? Melyik halmaz intervallum, és melyik nem?

11.1. $A = \{a : a \in \mathbb{R}, a < 5\}$

11.2. $B = \{b : b \in \mathbb{Z}, b^2 < 5\}$

11.3. $C = \{c : c \in \mathbb{N}, -4 \leq c < 7\}$

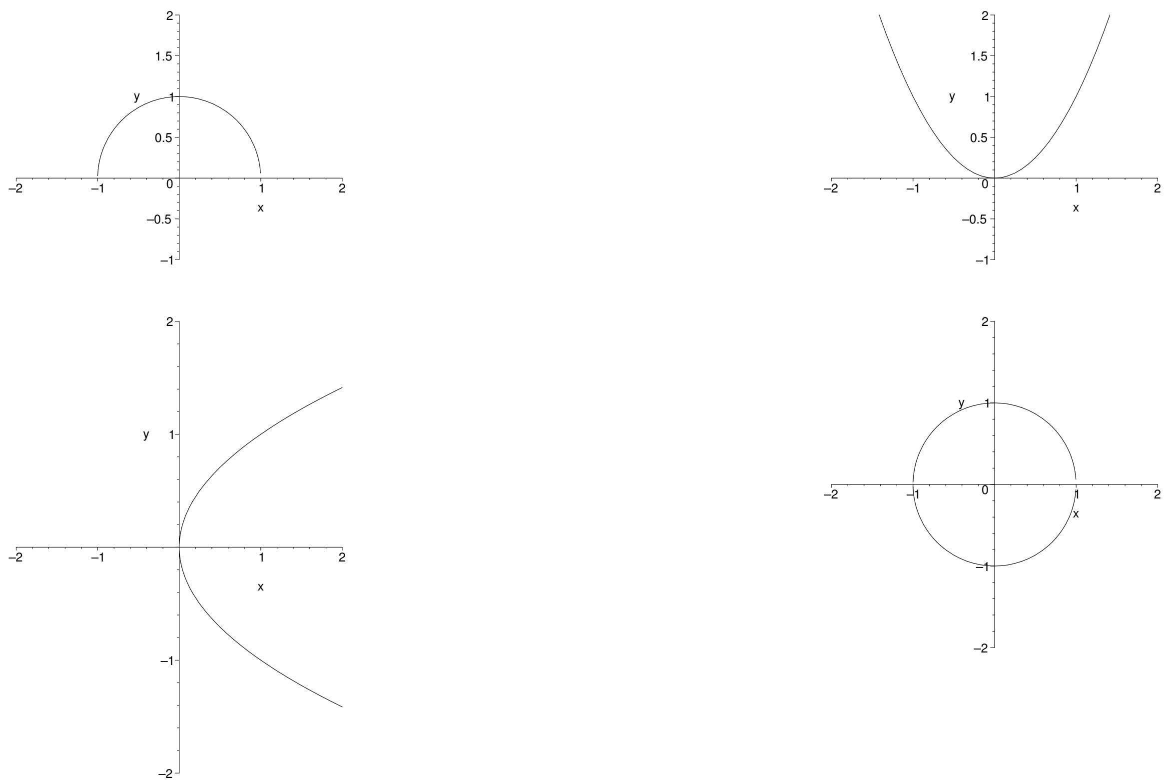
11.4. $F = \{f : f \in \mathbb{R}, -3 < f \leq 7\}$

Igazak-e tetszőleges A, B, C halmazokra a következő feladatok állításai?

11.5. $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

11.6. $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$?

11.7. A következő görbék közül melyik lehet valamilyen $f(x)$ függvénye grafikonja?



Ábrázoljuk az egy feladatban szereplő függvényeket közös koordinátarendszerben!

11.8. $x, \quad x^2, \quad \sqrt{x}$

11.9. $x, \quad x^3, \quad \sqrt[3]{x}$

11.10. $\sin x, \quad \sin 2x, \quad (\sin 2x) + 3$

11.11. $\cos x, \quad \cos\frac{x}{2}, \quad \cos\frac{x}{2} - 2$

11.12. $\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{tg}(x-1)$

11.13. $\operatorname{ctg} x, \quad \operatorname{ctg}(x+1)$

11.14. $|x|, \quad 2|x|, \quad 2|x| + 3$

11.15. $\log_2 x, \quad \lg x$

11.16. $2^x, \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x$

11.17. $\log_{\frac{1}{2}} x, \quad \log_{\frac{1}{2}}(-x), \quad -\log_{\frac{1}{2}} x$

11.18. $x, \quad [x], \quad \{x\}$

11.19. $x^2, \quad -2(x+3)^2 + 4$

Igaz-e hogy az egy feladatban szereplő f és g függvények egyenlők, ha minden függvény a lehető legbővebb halmazon van értelmezve?

11.20. $f(x) = \log x^2, \quad g(x) = 2\log x$

11.21. $f(x) = 1 + x, \quad g(x) = \dfrac{1-x^2}{1-x}$

11.22. $f(x) = \sqrt{(1+x)^2}, \quad g(x) = |1+x|$

11.23. $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \sqrt{1-\cos^2 x}$

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát!

11.24. $\sqrt{1+\sin x}$

11.25. $\sqrt{1+\lg x}$

11.26. $\sqrt{\sin(x+1)}$

11.27. $\log_2 x^6 + \operatorname{tg} x$

11.28. $\sqrt{\log_3(\sin x)}$

11.29. $\dfrac{\sqrt{16-x^2}}{\lg \sin x}$

Írjuk fel az annak az elsőfokú függvénynek – ha van ilyen függvény – a hozzárendelési szabályát $y = mx + b$ alakban, amelyre teljesülnek a következő feladatok feltételei!

11.30. A függvény grafikonja átmegy a $P(2;3)$ ponton és a meredeksége -2.

11.31. A függvény grafikonja átmegy a $P(2;3)$ és $Q(-5;-7)$ pontokon.

11.32. A függvény grafikonja átmegy a $P(-2;3)$ ponton és a meredeksége 5.

11.33. A függvény grafikonja átmegy a $P(2;3)$ és $Q(2;-7)$ pontokon.

Lehetnek-e a következő egyenesek valamilyen lineáris grafikonjai? Ha igen, határozzuk meg a lineáris függvények meredekségét!

11.34. $2y - 3x = 4$

11.35. $-3y + 2x = 5$

11.36. $4y = -12$

11.37. $3y + 5x = 20$

11.38. $4x = 24$

11.39. Milyen m paraméter esetén lesz az $mx^2 + 4x + 1$ függvény minden értéke

(a) negatív, **(b)** pozitív?

11.40. Milyen m paraméter esetén lesz az $4x^2 + mx + 1$ függvény minden értéke

(a) negatív, **(b)** pozitív?

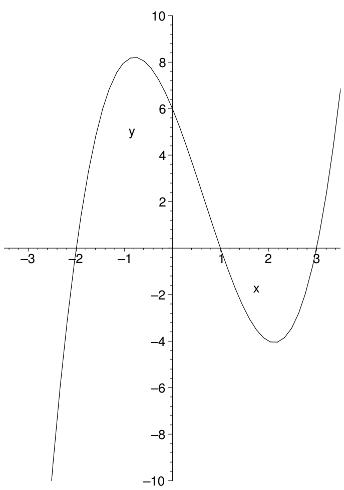
12. feladatsor: függvények

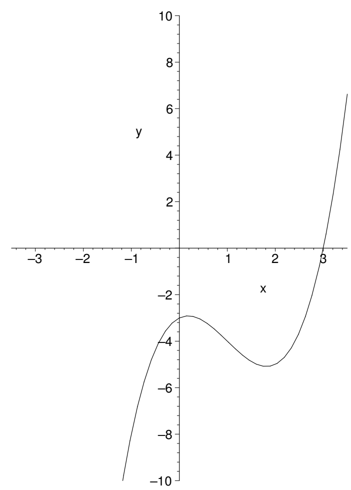
12.1. Mely függvényeket ábrázoltuk a következők közül? Keressük meg a grafikonokhoz tartozó képleteket!

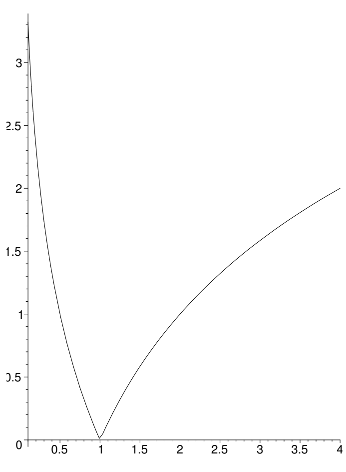
(a) $|\log_2 x|$ **(b)** x^2+1 **(c)** $(x+2)(x-1)(x-3)$

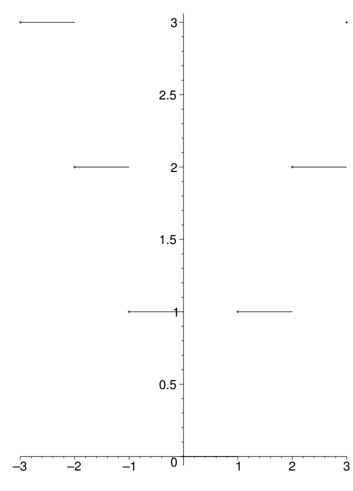
(d) $[|x|]$ **(e)** $|[x]|$ **(f)** $(x-2)(x+1)(x+3)$

(g) $(x-3)(1+x^2)$ **(h)** $\left|\left(\frac{1}{2}\right)^x\right|$ **(i)** $\log_2 |x|$









Ábrázoljuk a következő függvényeket!

12.2. $-[x]$

12.3. $[-x]$

12.4. $-\{x\}$

12.5. $\{-x\}$

12.6. $\sqrt{1-\sin^2 x}$

12.7. $\frac{1}{x}+5$

12.8. $\frac{1}{(x+1)^2}$

12.9. $|\sin x|$

12.10. $|x^2-9|$

12.11. $x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$

12.12. $(x^2+1) \cdot \operatorname{sgn} x$

12.13. $\{x\} \cdot \operatorname{sgn} x$

12.14. Legyen $f(x) = x^2 - 100$. Melyik az a legkisebb egész szám, amelyre a függvény értéke negatív? Ábrázoljuk a függvényt!

12.15. Mely pontokban metszi az $f(x) = \log_2(x+8)$ függvény a derékszögű koordinátarendszer x és y tengelyét? Ábrázoljuk a függvényt!

Határozzuk meg a c paramétert úgy, hogy az $f(x) = x^2 + 2x + c$ függvény kielégítse a feladatok feltételeit!

12.16. A függvény grafikonja érintse az x-tengelyt!

12.17. A függvény minimuma -5 legyen!

12.18. A függvény csak negatív értéket vegyen fel!

12.19. Ábrázoljuk az $\frac{x^2-9}{x^2-3x}$ függvényt! Felveszi-e a függvény a $0, 1, 2$ értékeket? Ha igen, akkor hol?

12.20. Adjuk meg a $\sin 2x + \cos 3x$ függvény legkisebb pozitív periódusát!

12.21. Milyen m paraméter esetén lesznek az $f(x) = mx + 5$ és a $g(x) = 5x - m$ lineáris függvények grafikonjai egymásra merőlegesek, illetve egymással párhuzamosak?

12.22. Az m paraméter mely értékeire metszi az $x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 4$ függvény grafikonja az x-tengelyt két pontban? Milyen m esetén lesz mindkét metszéspont x koordinátája pozitív?

12.23. Egy másodfokú függvény minimuma -3, zérushelyeinek összege 2. Határozzuk meg a függvény értékét az $x = 1$ helyen!

Határozzuk meg a következő függvények paritását, monotonitási szakaszait, szélsőértékeit!

12.24. x^2

12.25. $\sin x$

12.26. $[x]$

12.27. $\{x\}$

12.28. $(x-1)^2$

12.29. x^3+1

12.30. 3

12.31. 0

12.32. $|\log_{\frac{1}{2}} x|$

12.33. $\mathrm{sgn} x \cdot x^2$

12.34. $[|x|]$

12.35. $(x+2)(x-3)$

12.36. Hogyan függ k értékétől a $3x^2 - 2(3k-4)x + 3k^2 - 8k - 3$ függvény zérushelyeinek különbsége?

13. feladatsor: geometriai számítások

13.1. Egy kocka élei egységnyi hosszúak. Milyen távol vannak a kocka csúcsai a kocka valamelyik testátlójától?

13.2. Hogyan aránylanak egymáshoz egy adott kocka csúcsain átmenő, illetve a kocka éleit érintő, illetve a kocka lapjait érintő gömbök sugarai? (Zöld könyv 2412.)

13.3. Egy derékszögű háromszög átfogóját a magasság két olyan szakaszara bontja, amelyek különbsége 1cm. A háromszög kisebbik befogója 1cm-rel rövidebb az átfogónál. Mekkorák a háromszög oldalai? (Zöld könyv 1950.)

13.4. A derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága az átfogót harmadolja. A háromszög legkisebb oldala 4cm. Mekkora a többi oldal? (Zöld könyv 1949.)

13.5. Egy derékszögű háromszög egyik befogója a másik befogó és az átfogó mértani közepe. Fejezzük ki a befogókat az átfogó segítségével! (Zöld könyv 1955.)

13.6. Egy körbe írt trapéz átlói merőlegesek egymásra, és harmadolják egymást. Mekkora a trapéz kerülete és területe, ha az átlók hossza 30cm? (Zöld könyv 2091.)

13.7. Egy adott körbe írt téglalap oldalainak aránya $1 : 3$. Hány százaléka a téglalap területe a körének ?

13.8. Egy háromszög mindegyik oldalát ugyanabban a körüljárási irányban hosszabbítsuk meg saját hosszával! A végpontok összekötésével kapott háromszög területe hányszorosa az eredetinek?

13.9. Egy téglalap területe 60cm^2, átlója 13cm. Mekkorák az oldalak? (Zöld könyv 2060.)

13.10. Mekkora a szimmetrikus trapéz kerülete, ha a szárai egyenlők az adott k középvonallal? Bizonyítsuk be, hogy az ilyen trapézban a szárhoz, mint átmérőhöz tartozó Thalész-kör a középvonalat felezi! (Zöld könyv 1729.)

13.11. Egy rombusz egyik szöge 60 fok, magassága $\sqrt{6}\text{cm}$. Számítsuk ki oldalának és átlóinak hosszát, valamint a rombusz területét! (Zöld könyv 2064.)

13.12. Egy trapéz párhuzamos oldalai 3cm és 7cm hosszúságúak. Milyen arányban osztják egymást az átlók? Mekkora az átlók metszéspontján átmenő, az alapokkal párhuzamos egyenesnek a trapézba eső szakasza? (Zöld könyv 1913.)

13.13. Egy téglalap oldalai $2,4$dm és $1,8$dm hosszúságúak. Egy hozzá hasonló téglalap kerülete 52cm. Mekkorák az oldalai? (Zöld könyv 1910.)

13.14. Hány fokos középponti, illetve kerületi szög tartozik a kör $\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{6}, 0,3$ részéhez? Adjuk meg a szögeket radiánban is! (Geometriai feladatok gyűjteménye I. 951.)

13.15. Mekkora szöget zár be a háromszög két belső szögfelezője, ha a harmadik szög 85 fok? (Zöld könyv 1699.)

14. feladatsor: geometriai számítások

14.1. Egy kocka egyik csúcsa a testátlótól 4cm-re van. Mekkora a kocka éle? (Zöld könyv 2237.)

14.2. Mekkorák a derékszögű háromszög befogói, ha átfogója 4 egység, és teljesül, hogy az átfogóhoz tartozó súlyvonal mértani középarányos a két befogó között? (Zöld könyv 1952.)

14.3. Egy kocka legnagyobb szabályos háromszögmetszetének területe $140\mathrm{cm}^2$. Mekkora a kocka éle? (Zöld könyv 2236.)

14.4. Egy 12cm élhosszúságú kocka minden csúcsánál levágunk a kockából egy olyan háromoldalú gúlát (tetraédert), amelynek oldalélei a kockaélek 4cm hosszú darabjai. Mekkora a megmaradt test térfogata és felszíne? (Zöld könyv 2270.)

14.5. Írjunk egy forgáskúpba érintőgömböt! Számítsuk ki a gömb és a kúp térfogatának, majd a gömb és a kúp felszínének az arányát, és mutassuk meg, hogy e két arány egyenlő! (Zöld könyv 2438.)

14.6. Egy téglalap egyik oldala 2 egység. A téglalap átlójának mérőszáma megegyezik területének mérőszámával. Bizonyítsuk be, hogy a téglalap átlója az egyik oldallal 30 fokos szöget zár be! (Zöld könyv 2061.)

14.7. Egy trapéz területe $576\mathrm{cm}^2$. A trapéz magassága 6cm-rel, egyik alapja 12cm-rel nagyobb, mint a másik alapja. Mekkorák a trapéz alapjai és a magassága? (Zöld könyv 2068.)

14.8. A 12cm sugarú körbe írt szabályos hatszög területe hány területének? (Zöld könyv 2095.)

14.9. Szerkesszünk háromszöget, ha adott a kerülete, és tudjuk, hogy oldalainak az aránya $4 : 5 : 7$. (Zöld könyv 2173.).

14.10. Adott az a és b metsző egyenespár és síkjukban egy P pont, amelyik nem illeszkedik sem a-ra, sem b-re. Szerkesszünk olyan P-n átmenő egyenest, amelynek a-val és b-vel való A és B metszéspontjaira fennáll, hogy $\frac{PA}{PB} = \frac{1}{3}$. (Zöld könyv 2195.).

14.11. Az ABC egyenlő szárú háromszögben $AC = BC$. Legyen az AC szár A-hoz közelebbi harmadolópontja P, a BC szár C-hez közelebbi harmadolópontja Q. A P és Q pontokon áthaladó egyenes az alap egyenesét K-ban metszi. Határozzuk meg $\frac{AK}{BK}$-t! (Zöld könyv 1906.)

14.12. Egy trapéz párhuzamos oldalai 2 egység és 6 egység, a szárai 4 egység és 5 egység hosszúak. Mekkorák a kiegészítő háromszög oldalai? Milyen arányban osztják egymást a trapéz átlói? (Zöld könyv 1915.)

14.13. Valamely kör köré írt egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalainak hossza a és b. A nem párhuzamos oldalak a kört az M, illetve N pontban érintik. Fejezzük ki az MN távolságot az adatokkal!

14.14. Mutassuk meg, hogy a háromszög bármely külső szögének felezője és a szemközti oldal felező merőlegese a háromszög köré írt körön metszik egymást! (Geometriai feladatok gyűjteménye I. 969.)

14.15. Egy körben két ív hossza 10cm és 16cm. A kisebbikhez tartozó kerületi szög 35 fok. Mekkora kerületi szög tartozik a nagyobb körívhez?

15. feladatsor: vektorok, koordinátageometria

A feladatok Rábai Imre: Elemi matematikai példatár, Trigonometria-koordináta-geometria példatárából származnak, vagy azok alapján készültek.

Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátái kielégítik a következő feldatok feltételeit!

15.1. $x + |x| = y + |y|$

15.2. $x^2 - y^2 = x - y$

15.3. $|x| + |y| = 4$

15.4. $|x| + |y| < 4$

15.5. $(x-3)(y+5) \leq 0$

15.6. $x^2 + y^2 \leq 16$ és $y \geq -x^2 + 3$

15.7. Adott az $ABCD$ négyzet. Írjuk fel a $\overrightarrow{DA}$ és $\overrightarrow{CD}$ vektorokat az $\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{DB}$ átlóvektorok segítségével!

15.8. Legyen Q az $ABCD$ paralelogramma síkjában egy tetszőleges pont. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QD}$.

15.9. Adott két pont:$A(3;-1)$ és $B(2;1)$. Határozzuk meg az A pont B-re vonatkozó tükörképét!

Írjuk fel a megfelelő egyenesek egyenletét a következő adatok alapján! (Az adott pontok az egyenes pontjai, v az egyenes irányvektora, n az egyenes normálvektora, m az egyenes meredeksége.)

15.10. $A(2;-1)$, $B(4;5)$

15.11. $P(3,-2)$, $\mathbf{v}(2;3)$

15.12. $Q(-2;5)$, $\mathbf{n}(3,-2)$

15.13. $B(4,5)$, $m = 2$

15.14. Határozzuk meg, hogy az $ax - 2y - 1 = 0$ és a $6x - 4y - b = 0$ egyenesek az a és b milyen értéke esetén

(a) metszik egymást

(b) párhuzamosak

(c) egybeesők!

Döntsük el a következő kétismeretlenes másodfokú egyenletekről, hogy kör egyenletei-e! Ha igen, akkor határozzuk meg a kör sugarát és középpontját!

15.15. $x^2 + y^2 - 4x = 0$

15.16. $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = 0$

15.17. $x^2 + y^2 + 10x - 4y + 29 = 0$

15.18. $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 15 = 0$

15.19. Egy egyenesen fekszenek-e az $A(0; -3)$, $B(3; 3)$ és $C(5; 7)$ pontok? Ha igen, határozzuk meg az egyenes meredekségét! Milyen hosszú a BC szakasz?

15.20. Adott az ABC háromszög: $A(4; 6)$, $B(-4; 0), C(-1; -4)$. Írjuk fel

(a) az AB oldal egyenletét,

(b) a C csúcshoz tartozó súlyvonal egyenletét,

(c) az AB oldal felezőmerőlegesének egyenletét!

(d) Számítsuk ki a háromszög kerületét!

15.21. Írjuk fel az $A(-1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(0; 2)$ és $D(0; 0)$ pontokból az $x^2 + y^2 = 2x$ körhöz húzható érintők egyenletét!

15.22. Határozzuk meg, hogy a b milyen értékei mellett lesz az $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ körnek és a $3x - 4y = b$ egyenesnek 2, 1 vagy 0 közös pontja!

15.23. Milyen r esetén lesz az $x^2 + y^2 = r^2$ és az $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9$ köröknek 0, 1 vagy 2 közös pontja?

16. feladatsor: koordináta-geometria

A koordináta-geometria feladatokat Rábai Imre: Elemi matematikai példatár, Trigonometria-koordináta-geometria példatárából származnak, vagy azok alapján készültek.

Ábrázoljuk derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátái kielégítik a következő feladatok feltételeit!

16.1. $x^2 \geq 9$ és $y^2 \geq 4$

16.2. $x^2 \geq 4$ és $y^2 \geq 9$

16.3. $xy(y+1)^2 \geq 0$

16.4. $|x| - 2 \leq y$ és $y^2 \leq 2|x| - x^2$

16.5. $y > |2x - 4|$ és $y < -x^2 + 4x + 1$

16.6. Egy kocka A csúcsából kiinduló élvektorok: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$. Fejezzük ki ezek segítségével az A-ból a kocka középpontjába mutató vektort!

16.7. Legyen az $ABCD$ síkbeli négyszög AB és CD oldalának felezőpontja E és F. Bizonyítsuk be, hogy $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$.

16.8. Adott két pont: $A(3; -1)$ és $B(2; 1)$. Legyen C az AB szakasz B-hez közelebb eső harmadoló pontja. Határozzuk meg a A pont C-re vonatkozó tükörképét!

Írjuk fel a megfelelő egyenesek egyenletét a következő adatok alapján! (Az adott pontok az egyenes pontjai, v az egyenes irányvektora, n az egyenes normálvektora, m az egyenes meredeksége.)

16.9. $A(2; -1)$, $B(2; 5)$

16.10. $P(3, -2)$, $\mathbf{v}(2; 0)$

16.11. $Q(-2;5)$, $\mathbf{n}(0,-2)$

16.12. $B(4,5)$, $m=-\frac{1}{2}$

16.13. Határozzuk meg, hogy az $ax-2y-1=0$ és a $6x-4y-b=0$ egyenesek az a és b milyen értéke esetén merőlegesek egymásra!

Döntsük el a következő kétismeretlenes másodfokú egyenletekről, hogy kör egyenletei-e! Ha igen, akkor írja fel az adott körrel koncentrikus, de kétszer akkora sugarú kör egyenletét!

16.14. $x^2+y^2=0$

16.15. $2x^2+y^2+2x-10y+1=0$

16.16. $3x^2+3y^2-12y=0$

16.17. $x^2-y^2+2x-10y+1=0$

16.18. Adott az ABC háromszög: $A(4;6)$, $B(-4;0), C(-1;-4)$. Írjuk fel

(a) az AB oldallal párhuzamos középvonal egyenletét,

(b) az AB oldalhoz tartozó magasságvonal egyenletét,

(c) a B csúcshoz tartozó szögfelező egyenletét!

(d) Számítsuk ki a háromszög területét!

16.19. Egy háromszög csúcspontjai: $A(5;5)$, $B(-2;6)$, $C(-4;2)$. Határozzuk meg a háromszög S súlypontját, M magasságpontját és a háromszög köré írható kör K középpontját! Bizonyítsuk be, hogy az M, S és K pontok egy egyenesre esnek! Milyen arányban osztja S az MK szakaszt?

16.20. Milyen r érték mellett metszi, érinti vagy kerüli el a $3x-4y=-1$ egyenes az $(x+1)^2+(y-2)^2=r^2$ kört?

16.21. Egy kör egyenlete $x^2+y^2=8$. Egy másik kör középpontja $C(-12;0)$, sugara r. Határozzuk meg r értékét, ha a két körnek van az $y=x$ egyenessel párhuzamos közös érintője!

17. feladatsor: trigonometria

A feladatok Rábai Imre: Elemi matematikai példatár, Trigonometria-koordináta-geometria példatárából származnak, vagy azok alapján készültek.

Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tatományát! Igazoljuk, hogy azon a halmazon, ahol a megfelelő egyenlőség mindkét oldala értelmes, az egyenlőség azonosság!

17.1. $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

17.2. $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x = \operatorname{tg}^2 x \cdot \sin^2 x$

17.3. $\sin 2x = \frac{2 \operatorname{ctg} x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$

17.4. $\cos 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{\operatorname{ctg}^2 x + 1}$

17.5. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

17.6. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

A feladatokban megadott sz0gfüggvény értékek alapján számítsuk ki a többi szögfüggvény értéket!

17.7. $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

17.8. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

17.9. $\operatorname{tg} x = \sqrt{2}$

17.10. $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

17.11. $\sin x = 1$

17.12. $\sin x = 0$

17.13. $\cos x = -\frac{1}{2}$

17.14. $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

17.15. $\operatorname{tg} x = 1$

17.16. $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$

17.17. $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

17.18. $\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

17.19. $4\sin x + 4\cos^2 x - 1 = 0$

17.20. $\cos x - 5 = \sin^2 x$

17.21. $\sin \frac{x}{2} = 1 - \cos x$

17.22. $\sin x + \cos x - \sin x \cos x = 1$

17.23. $\sin x + \cos x = 1$

17.24. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = -1$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

17.25. $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

17.26. $\cos x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$

17.27. $|\operatorname{tg} x| < \sqrt{3}$

17.28. $\cos^2 x > \frac{1}{2}$

17.29. Oldjuk meg a $\sin x = \sin b$ egyenletet a valós számok halmazán, ahol x az ismeretlen, b pedig a paraméter!

17.30. Ábrázoljuk a derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátáira teljesül, hogy $\sin y = \sin x$.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

17.31.

$$\sin x + \cos x = 0$$
$$\sin x \cdot \sin y = -\frac{1}{2}$$

17.32.

$$\cos x - \sin y = \frac{1}{2}$$
$$\cos 2x + \cos 2y = \frac{3}{2}$$

17.33. Egy paralelogramma két oldalának hossza 21cm, illetve 24cm, és egyik szöge $60°$-os. Határozzuk meg meg annak a négyszögnek a területét, amelynek csúcspontjai a paralelogramma oldalfelező pontjai!

17.34. Igazoljuk, hogy a háromszög területe $T = \frac{abc}{4R}$, ahol a, b, és c a háromszög oldalai, R pedig a háromszög köré írható kör sugara!

17.35. Egy trapéz két párhuzamos oldala $4,2$dm és 27dm, egyik szára $20,5$dm, a másik szára a hosszabb párhuzamos oldallal $58°7'$ szöget zár be. Számítsuk ki a trapéz másik szárát és területét!

17.36. Határozzuk meg annak a fának az x magasságát, amely a fától b méter távolságban lévő, h magasságú pontból β szögben látszik!

18. feladatsor: trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek

A feladatok Rábai Imre: Elemi matematikai példatár, Trigonometria-koordináta-geometria példatárából származnak, vagy azok alapján készültek.

Határozzuk meg a következő kifejezések értelmezési tatományát! Igazoljuk, hogy azon a halmazon, ahol a megfelelő egyenlőség mindkét oldala értelmes, az egyenlőség azonosság!

18.1. $\sin^2 x = \dfrac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

18.2. $\cos^2 x = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$

18.3. $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

18.4. $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 x2}$

18.5. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

18.6. $\dfrac{1-\cos x}{\sin x} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$

18.7. Számítsuk ki a többi szögfüggvény értéket, ha

18.8. $\sin x = s$

18.9. $\cos x = c$

18.10. $\operatorname{tg} x = t$

18.11. $\operatorname{ctg} x = g$

Oldjuk meg a következő trigonometrikus egyenleteket a valós számok halmazán!

18.12. $\sin\dfrac{x}{2}\cdot\cos\dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{4}$

18.13. $4\sin x\cos x\cos 2x = 1$

18.14. $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$

18.15. $8\cos 2x\cdot 4\sin^2 x = -1$

18.16. $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$

18.17. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x} = 2 - \operatorname{tg} x$

18.18. $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

18.19. $\sin^2 2x + \sin^2 x = \frac{3}{4}$

Oldjuk meg a következő egyenlőtlenségeket a valós számok halmazán!

18.20. $\sin x + \sqrt{3} \cos x > 1$

18.21. $2\cos^2 2x < 1$

18.22. $\sin x > \cos x$

18.23. $\sin x + \cos x > 1$

18.24. $|\sin x| + |\cos x| > 1$

18.25. Oldjuk meg a $\cos x = \cos b$ egyenletet a valós számok halmazán, ahol x az ismeretlen, b pedig a paraméter!

18.26. Ábrázoljuk a derékszögű koordinátarendszerben azokat a pontokat, amelyek koordinátáira teljesül, hogy $\cos y = \cos x$.

Oldjuk meg a következő egyenletrendszereket a valós számpárok halmazán!

18.27.
$$x + y = \frac{\pi}{4}$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1$$

18.28.
$$\sin x \cdot \cos y = \frac{3}{4}$$
$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 3$$

18.29. Egységnyi területű rombusz hegyesszöge $30°$. Számítsuk ki a rombusz oldalát és átlóit!

18.30. Egy derékszögű háromszög egyik hegyesszögének szögfelezője az egyik befogót $1 : 2$ arányban osztja. Határozzuk meg a háromszög hegyesszögeit!

18.31. Egy derékszögű trapéz rövidebb átlójának hossza megegyezik a nagyobb párhuzamos oldal hosszával. A trapéz területe $T = 28,5 \text{cm}^2$, hegyesszöge $\alpha = 58°38'$. Mekkorák a trapéz oldalai?

18.32. Határozzuk meg annak a β szögű emelkedő tetején álló fának az x magasságát, amely abból a pontból, amelyik a fa aljától s távolságra van lefele a lejtőn, α szög alatt látszik!

19. feladatsor: függvények, grafikonok

Határozzuk meg a következő függvények lehető legbővebb értelmezési tartományát!

19.1. $\log_2(2x+3)$

19.2. $\log\sqrt{x}$

19.3. $\sqrt{\log_7 x}$

19.4. $\log(\sin x)$

19.5. $\sqrt{\cos x}$

19.6. $\log_3 x^2$

19.7. $\log_{\sin x} 5$

19.8. $\log_{|x|}\cos x$

Igazak-e az alábbi következtetések? Minden választ indokoljunk!

19.9. Ha $\sin x = \sin c$, akkor $x = c$.

19.10. Ha $\log_2 x = \log_2 c$, akkor $x = c$.

19.11. Ha $x^3 = c^3$, akkor $x = c$.

19.12. Ha $\sqrt{x} = \sqrt{c}$, akkor $x = c$.

19.13. Ha $\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{c}$, akkor $x = c$.

19.14. Ha $2^x = 2^c$, akkor $x = c$.

19.15. Ha $|x| = |c|$, akkor $x = c$.

19.16. Igaz-e, hogy (a) $\operatorname{sgn} x \cdot x^2 = x^3$, illetve, hogy (b) $|x^3| = x^2$?

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

19.17. $\log_2 \sin x = 0$

19.18. $\lg x^2 = 2\lg x$

19.19. $\lg x + \lg\sin\frac{\pi}{6} + \lg\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \lg\sin\frac{\pi}{3} = 0$

19.20. $\lg 2 + \lg \sin \frac{\pi}{6} + \lg \cos \frac{\pi}{6} - \lg \sin x = 0$

Lehetnek-e valamilyen x változójú függvény grafikonjai a derékszögű koordináta rendszerben a feladatban megadott alakzatok?

19.21. y-tengellyel párhuzamos egyenes

19.22. x-tengellyel párhuzamos egyenes

19.23. ellipszis

19.24. Olyan egyenes, amelyik átmegy a $P(-3;5)$ és $Q(-3;-7)$ pontokon.

19.25. Olyan egyenes, amelyik átmegy a $P(-8;5)$ és $Q(-3;-7)$ pontokon.

Tegyük fel, hogy az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenség megoldása: $(-\infty, 2] \cup [5, \infty)$. Lehet-e $f(x)$ a feladatokban megadott függvény? Ha valamelyik feladat esetén a válasz "lehet", akkor mutassunk konkrét példát!

19.26. elsőfokú polinom

19.27. másodfokú polinom

19.28. harmadfokú polinom

19.29. negyedfokú polinom

Tegyük fel, hogy az $f(x) \geq 0$ egyenlőtlenség megoldása: $(-\infty, 2] \cup [5, 7]$. Lehet-e $f(x)$ a feladatokban megadott függvény? Ha valamelyik feladat esetén a válasz "lehet", akkor mutassunk konkrét példát!

19.30. elsőfokú polinom

19.31. másodfokú polinom

19.32. harmadfokú polinom

19.33. negyedfokú polinom

Az m paraméter milyen értékei mellett teljesülnek az alábbi feladatok állításai?

19.34. Az $mx^2 + 20x + 5$ kifejezés értéke minden valós x esetén negatív.

19.35. Az $mx^2 - 3mx - x^2 + 5m + 4 > 0$ kifejezés értéke minden valós x esetén pozitív.

19.36. Az m paraméter milyen értékeinél lesz az alábbi egyenletrendszer gyökeinek összege, azaz $x + y$ nagyobb, mint 5?

$4x - y = 0$

$mx + y = 1$

20. feladatsor: szöveges feladatok

20.1. Melyik az a szám, amelyet hozzáadva a 30-hoz, az 50-hez és a 80-hoz, három olyan számot kapunk, amelyek közül az első úgy aránylik a másodikhoz, mint a második a harmadikhoz?

20.2. Egy négyjegyű szám utolsó jegye 7. Ha ezt a végéről töröljük, és a többi számjegy elé írjuk, akkor az eredeti számnál 2826-tal nagyobb számot kapunk. Melyik ez a négyjegyű szám?

20.3. Két szám különbsége 100. Ha az első számot a másodikkal elosztjuk, a hányados 6, a maradék 5. Melyik ez a két szám?

20.4. Egy tört számlálója 3. Ha a nevezőjéből 12-t kivonunk, 4-szer akkora törtet kapunk. Mekkora az eredeti tört nevezője?

20.5. Egy kétjegyű szám számjegyeinek összege 12. Ha a jegyeket felcseréljük, a szám értéke 75%-kal növekszik. Melyik ez a szám?

20.6. Az üzemvezető 5 szivattyút leállított, hogy az üzemanyag 12 óra helyett 16 órára legyen elegendő. Hány szivattyú működött eredetileg?

20.7. A tej tömegének $7,3\%$-a tejszín. A tejszín tömegének 62%-a vaj. Hány kilogramm tejből készíthető 5kg vaj?

20.8. Egy kétjegyű szám egyik számjegye 2-vel nagyobb, mint a másik. A szám és a jegyek felcserélésével kapott szám négyzetösszege 4034. Melyik ez a szám?

20.9. Mekkora p és q értéke, ha $-x^2 + px + q = 0$ egyenlet két gyöke 2 és 4?

20.10. Adjuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $f(x) = mx + 5$ lineáris függvény meredeksége nagyobb legyen, mint a $P(-3; 5)$ és $Q(2; 15)$ függvény meredeksége!

20.11. Adjuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy a $\cos mx$ függvény legkisebb periódusa fele akkora legyen, mint a $\sin 3x$ függvény legkisebb periódusa!

20.12. Határozzuk meg az m paraméter értékét úgy, hogy az $f(x) = x^2 + 2x + m$ függvény grafikonjának és az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű körnek egy közös pontja legyen!

A következő függvények közül melyiknek van abszolút minimuma? Melyik monoton növő a teljes értelmezési tartományán? Melyik páros? Melyik se nem páros, se nem páratlan? Melyiknek van zérushelye? Melyik periodikus? Melyik polinom?

20.13. $|x^2|$

20.14. $\sin x$

20.15. $|x^3|$

20.16. $\{x\}$

20.17. $\dfrac{1}{x^2}$

20.18. $x^3 + 1$

20.19. 3

20.20. 0

20.21. $|\log_{\frac{1}{2}} x|$

20.22. $x^2 \cdot \operatorname{sgn} x$

20.23. $\log_2 x$

20.24. $(x+2)(x-3)$

21. feladatsor: szerkesztések, bizonyítások

A feladatok többsége Geometriai feladatok gyűjteményének I. kötetéből származik. A feladatok végén zárójelben szerepel a feladat sorszáma.

Vegyünk fel egy szakaszt! Szerkesszük meg azt a szakaszt, amelynek hossza az eredeti szakasz hosszának a feladatokban szereplő többszöröse! Írjuk le a szerkesztéseket!

21.1. 2 **21.2.** $\frac{1}{3}$ **21.3.** $\sqrt{5}$ **21.4.** $\sqrt{6}$

Mekkorák azoknak a konvex sokszögeknek a szögösszegei, amelyeknek az oldalszáma a következő feladatokban szerpel? (69.)

21.5. 4 **21.6.** 8 **21.7.** 13 **21.8.** 86 **21.9.** n

21.10. Hány oldalú az a sokszög, amelyben a szögösszeg $1620°$? (70.)

21.11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög egyik szöge $15°$-os, akkor az átfogóhoz tartozó magasság negyede az átfogónak! (141.)

21.12. Mi a mértani helye azon ABC háromszögek C csúcsainak, amelyek A és B pontjai rögzítettek, és az ABC háromszög köré írt kör sugara ugyanakkora? (213.)

21.13. Adott három egyenes. Szerkesszünk egyenlő oldalú háromszöget, amelynek az egyik egyenes szögfelezője, a másik kettő pedig egy-egy csúcsán megy át! (363.)

21.14. Adott egy négyszög és belsejében egy pont. Írjunk a négyszögbe olyan paralelogrammát, amelynek középpontja az adott pont! (411.)

21.15. Egy szög szárai közé helyezzünk el úgy egy adott hosszúságú szakaszt, hogy az a szögszárakból egyenlő darabokat messen le! (498.)

21.16. Egy háromszög szögei $62°$ és $43°$. Mekkora szögben látszanak az oldalak (a) a beírt kör középpontjából; (b) a magasságpontból? (564.)

21.17. Két egymást metsző kör egyik közös pontjából húzzuk meg mindkettőben az átmérőt. Bizonyítsuk be, hogy az átmérők végpontjait összekötő egyenes átmegy a körök másik közös pontján! (607.)

21.18. Szerkesszünk rombusz, ha adott (a) oldala és egyik szöge; (b) két átlója; (c) oldala és magassága; (d) egyik szöge és magassága! (732.)

21.19. Egy paralelogramma kerülete 48cm, magasságainak aránya $5 : 7$. Mekkorák az oldalai? (1205.)

21.20. Egy $120°$-os szög két szárát és szögfelezőjét metszi az AB egyenes. Számítsuk ki, hogy a szögfelezőnek a szög C csúcsától az AB egyenesig terjedő CC_1 darabja milyen hosszú, ha ismerjük a $120°$-os szög két szárának a csúcstól az egyenesig terjedő $CA = p$ és $CB = q$ darabját! (1226.)

21.21. Határozzuk meg a szimmetrikus trapéz területét, ha alapjai 7 és 9, szárai 5cm-esek! (1456.)

21.22. Szerkesszük meg egy négyzet átlóján azt a pontot, amelyet a négyzet három csúcsával összekötve, három egyenlő területű idomot kapunk! (1520.)

21.23. Mekkora a kör sugara, ha benne egymástól 22cm távolságra egy 40cm-es és egy 48cm-es párhuzamos húrpár helyezhető el? (1619.)

21.24. A háromszög egyik oldala 60cm, a hozzá tartozó súlyvonal, illetve magasság 13cm, illetve 12cm. Mekkora a másik két oldal? (1674.)

22. feladatsor: szerkesztések, bizonyítások

A feladatok a Geometriai feladatok gyűjteményének I. kötetéből származnak. A feladatok végén zárójelben szerepel a feladat sorszáma.

22.1. Egy sokszög szögösszege s. Hogyan változik a szögösszeg, ha az oldalak számát kétszeresére növeljük? (77.)

22.2. Bizonyítsuk be, hogy minden konvex sokszög külső szögeinek összege $360°$. (83.)

22.3. Igazoljuk, hogy ha P az ABC háromszög belső pontja, akkor $PB+PC < AB+AC$. (172.)

22.4. Mi a mértani helye azon ABC háromszögek C csúcsainak, amelyeknek az A és B csúcsai rögzítettek, és a C csúcshoz tartozó magasságuk ugyanakkora? (212.)

22.5. Megrajzoltuk a háromszög három (egy ponton átmenő) szögfelezőjét, és megadjuk az egyik oldal egy pontját. Szerkesszük meg a háromszöget! (368.)

22.6. Adott két kör és egy pont. Szerkesszünk a ponton át szelőt a körökhöz úgy, hogy annak a körök közé eső szakaszát a pont felezze! (419.)

22.7. Írjunk egy háromszögbe paralelogrammát úgy, hogy három csúcsa három oldalegyenesen legyen, egyik oldala pedig egy adott szakasszal legyen párhuzamos és egyenlő! (504.)

22.8. Igazoljuk, hogy egy négyszög két-két szomszédos oldalának felezőpontjait összekötve, párhuzamos és egyenlő hosszú szakaszokat nyerünk! (557.)

22.9. Egy téglalap négy oldalán adott egy-egy pont, továbbá adott a téglalap egyik oldalának hossza. Szerkesszük meg a téglalapot! (611.)

22.10. Bizonyítsuk be, hogy minden négyszög középvonalai felezik egymást! (776.)

22.11. Az $ABCD$ paralelogramma AC átlójának E pontjából húzzunk párhuzamost a BC oldallal! Határozzuk meg, hogy ez a párhuzamos mekkora részekre osztja az AB oldalt, ha az E pont az AC átlót $m:n$ arányú részekre osztja! (1223.)

22.12. Egy trapéz oldalai $a = 10$cm, $b = 6$cm, $c = 3$cm és $d = 4$cm, ahol az alapok a és c. Számítsuk ki a kiegészítő háromszög oldalait! (1231.)

22.13. Határozzuk meg annak a konvex négyszögnek a területét, amelynek átlói 8cm és 12cm hosszúak, és az átlók merőlegesek egymásra! (1464.)

22.14. Egy 7cm sugarú körhöz középpontjától 25cm távol levő P pontból két érintőt húzunk. Határozzuk meg az érintési pontok távolságát! (1628.)

22.15. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegének $\frac{3}{4}$ részével egyenlő! (1676.)

23. feladatsor: vegyes gyakorlófeladatok

Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán!

23.1. $\lg(x-9)^3 + 6\lg\sqrt{2x-1} = 6$

23.2. $4\cos 2x + 2\sin^2 x = -\frac{1}{2}$

23.3. Egy háromszög csúcspontjai: $A(2;4), B(-3;-5), C(3;-7)$. Számítsuk ki a háromszög szögeit!

23.4. Hol helyezkednek el a koordinátarendszerben azok a pontok, amelyeknek a koordinátáira igaz, hogy $\sin x = \sin y$?

23.5. Melyik nagyobb: $\log_{1/2}\left(2 \cdot \sqrt{5}\right) - 7$ vagy $\log_{1/3}\left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\right) + 7$?

23.6. Milyen p értékek esetén igaz, hogy a $px^2 - 7x + 2$ függvény csak negatív értéket vesz fel?

23.7. Oldjuk meg a $\log_2(2x^2 + 3x + 2) < 2$ egyenlőtlenséget!

23.8. Hány tagot kell összeadnunk az első tagtól kezdve az $a_n = 3 \cdot 2^n$ sorozatból, hogy az összeg 1 milliónál nagyobb legyen?

23.9. Határozzuk meg p és m értékét úgy, hogy a $px^2 + mx + 3$ függvény grafikonja átmenjen az $(1,2)$ és $(-1,5)$ pontokon!

24. feladatsor: Rábai Imre: Matematika mérőlapok 6. feladatsora

24.1. Egy derékszögű háromszög egyik befogója $6,5$ egység, az átfogóhoz tartozó magasság 6 egység. Számítsuk ki a másik befogó és az átfogó hosszát!

24.2. Az ABC háromszögben $AB = 1$ egység, $BAC\measuredangle = 45°$, $ABC\measuredangle = 120°$. Számítsuk ki az AC és BC oldalak hosszának pontos értéket!

24.3. Öt szám közül az első négy egy számtani, az utolsó három egy mértani sorozat egymást követő tagjai. Melyik ez az öt szám, ha az első négy összege -36, a második és a harmadik szorzata 72?

24.4. A P pont koordinátái $(4; 1)$, az e egyenes egyenlete $x - y = -1$, az f egyenesé $x + 2y = 11$. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a P ponton, és az e és f közé eső szakaszának f-hez közelebbi harmadolópontja P.

24.5. Oldjuk meg a $\sqrt{4\log_2 x - (\log_2 x)^2} = p$ egyenletet a valós számok halmazán, ha p valós paraméter!

24.6. Oldjuk meg az $\dfrac{x^2}{(1-\sqrt{1-x})^2} < 9 - x$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

24.7. Igazoljuk, hogy ha a háromszög szögei α, β, γ, akkor

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1.$$

24.8. Határozzuk meg azokat a k és n egész számokat, amelyek esetén a

$$(2k-1)nx^2 + (2k-1)n(k-n-4)x - 2(2k-1)n(k-n-2) - 1 = 0$$

egyenlet gyökei szintén egész számok!

25. feladatsor: vegyes gyakorlófeladatok

Hozzuk egyszerűbb alakra a következő kifejezéseket!

25.1. $\log_b \left(\sqrt{b\sqrt{b\sqrt{b}}} \cdot \sqrt[3]{b^2\sqrt{b}} \right)$, ahol $b > 0$, $b \neq 1$

25.2. $a^{2-\log_{a^3} 27}$, ahol $a > 0$, $a \neq 1$

25.3. Van-e olyan értéke a p paraméternek, amelyre a következő egyenletnek nincs valós gyöke?

$$\frac{x}{x^2-4} + \frac{p}{x^2+2x} + \frac{x}{x^2-x-2} = 0$$

25.4. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3} < 1$$

25.5. Az m valós paraméter mely értékei mellett lesznek a $p(x) = x^2 - (8m-2)x - 2m - 7$ polinom bármely valós számhoz tartozó helyettesítési értékei pozitív számok?

25.6. Van-e olyan háromszög, amelyben az egyik szög szinusza egyenlő egy másik szög koszinuszával, és a háromszög oldalai egy számtani sorozat szomszédos tagjai? (Ha nincs ilyen, bizonyítsuk, hogy nincs, ha van ilyen, mutassunk rá példát!)

25.7. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $(-4;3)$ ponton, és a koordinátatengelyekkel 25 egységnyi területű háromszöget zár be!

25.8. Hány olyan n természetes szám van, amelyre az $\frac{n+17}{n-3}$ kifejezés értéke szintén természetes szám?

25.9. Van kilenc, külsőre egyforma érménk, de az egyik nehezebb a többinél, amelyek egyforma súlyúak. Keresse meg a nehezebb érmét egy kétkarú mérleg segítségével, amelyen két mérést végezhet!

26. feladatsor: vegyes gyakorlófeladatok

26.1. Fejezzük ki $\lg 15$-öt p és q segítségével, ha tudjuk, hogy $\lg 75 = p$ és $\lg 45 = q$.

26.2. Ha egy téglalap egyik oldalát $4\mathrm{m}$-rel megrövidítjük, másik oldalát pedig $3\mathrm{m}$-rel meghosszabbítjuk, akkor olyan négyzetet kapunk, amelynek területe $3\mathrm{m}^2$-rel nagyobb, mint az eredeti téglalapé volt. Mekkorák a téglalap oldalai?

26.3. Oldjuk meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$\sqrt{x^2+4x+4} < x+6$

26.4. Határozzuk meg a k valós paraméter értékét úgy, hogy a $p(x) = (5-k)x^2-2(1-k)x+2-2k$ polinom bármely valós számhoz tartozó helyettesítési értékei negatív számok legyenek!

26.5. Egy háromszög oldalai olyan számtani sorozat egymás utáni tagjai, amelynek különbsége 1. A legnagyobb szög kétszerese a legkisebbnek. Mekkorák a háromszög oldalai?

26.6. Írjuk fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3;5)$ ponton, és a koordinátatengelyekből egyenlő szakaszokat vág le!

26.7. Előállítható-e 2^{20} legalább kettő, egymást követő pozitív egész szám összegeként?

26.8. A 8×8-as sakktábláról a bal alsó és a jobb felső sarokban lévő mezőket levágtuk. Le lehet-e fedni hézagmentesen és átfedés nélkül ezt a csonka sakktáblát 1×2-es dominókkal?

27. feladatsor: vegyes gyakrolófeladatok

27.1. Az paraméter mely értéke esetén merőlegesek egymásra a $2x - 3y = 7$ és $6x + ay = 8$ egyenesek?

27.2. Számítsuk ki az $y - 10^{-9}x = 10^{-6}$, az $y = 10^{-6}$ és a $2y = 10^{-9}x + 10^{-6}$ egyenesek által közrezárt háromszög területét!

27.3. Határozzuk meg az $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$ egyenlettel megadott kör középpontját és sugarát! Bizonyítsuk be, hogy a $3x + 4y = 43$ egyenletű egyenes érinti a kört, és adja meg az érintési pontot!

27.4. Egy trapéz egyik alapjának hossza 6cm, és egyik átlója 5cm hosszú. A trapéz átlói merőlegesek egymásra, és tudjuk, hogy van olyan átlója, amely $30°$-os szöget zár be az alapokkal.

(a) Határozzuk meg az ismeretlen átló hosszát!

(b) Mekkora a trapéz területe?

(c) Mennyi a trapéz kerülete?

27.5. Az α szögre $\cos\alpha = \dfrac{5}{13}$. Határozzuk meg $\cos 2\alpha$ és $\sin 2\alpha$ lehetséges értékeit!

27.6. Bizonyítsuk be, hogy az x minden valós értéke mellett $\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

27.7. Oldjuk meg a következő egyenletet!

$\log_{\sin x} \cos x = \log_{\cos x} \sin x$

27.8. Határozzuk meg az alábbi kifejezés pontos értékét:

$\lg 6 + \lg 4 + \lg 20 - \lg 3 - \lg 16$

27.9. Melyik nagyobb: $\log_4 9$ vagy $\log_9 25$? (Segédeszköz használata nélkül kell megoldani!)

Megoldások

1. feladatsor: vegyes feladatok

1.4. Az egyenletben szereplő összes kifejezés akkor értelmes, ha $x > 9$. Ekkor az eredeti egyenletet átalakítva a $\lg(x-9) + \lg(2x-1) = 2$, majd a $\lg(x-9)(2x-1) = 2$, végül a $\lg(x-9)(2x-1) = \lg 100$ egyenlethez jutunk. A $\lg x$ függvény szigorú monotonitását felhasználva $(x-9)(2x-1) = 100$. Az utolsó egyenlet megoldásai: $x_1 = 13$ és $x_2 = -\frac{7}{2}$. Az eredeti feladatnak az értelmezési tartomány miatt csak az x_1 megoldása.

1.7. Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát:
$\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^4 x - (\cos^2 x)^2 = \sin^4 x - \left(1 - \sin^2 x\right)^2$.
Tehát az eredeti egyenlet ekvivalens a következő, egyenlettel: $2\sin^2 x - 1 = \frac{1}{2}$,
amiből $\sin^2 x = \frac{3}{4}$, vagyis $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ vagy $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. A megoldások: $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ és $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, ahol k tetszőleges egész szám.

1.10. Az eredeti egyenlőtlenség ekvivalens a $3x^2 + 5x \leq 0$, illetve az $x(3x+5) \leq 0$ egyenlőtlenségekkel. A megoldás: $-\frac{5}{3} \leq x \leq 0$.

1.15. Mivel a B pont koordinátái kielégítik az egyenletet, a pont az egyenesen van.

1.18. Mivel $(-4)^2 + 3^2 = 25 > 1$, a B pont a körön kívül van.)

1.24. Az abszolút érték definíciója miatt az első síknegyedben a pontok az $x + y = 1$, a második síknegyedben a $-x + y = 1$, a harmadikban a $-x - y = 1$, a negyedikben az $x - y = 1$ egyenesen vannak. Ha az előbbi egyeneseknek csak az adott síknegyedbe eső szakaszát nézzük, megkapjuk a keresett halmazt, egy olyan négyzetet, amelynek csúcspontjai: $(1;0), (0;1), (-1;0), (0;-1)$.

1.28. A feladat szerint x és y eltérése 1-nél kisebb, tehát teljesül, hogy $x - 1 < y < x + 1$. Ez azt jelenti, hogy a keresett pontok az $y = x - 1$ és az $y = x + 1$ egyenesek között vannak. A szigorú egyenlőtlenség miatt a két egyenes nem tartozik a megoldáshoz.

2. feladatsor: vegyes feladatok

2.2. Útmutatás: Számítsuk ki, hogy hol metszi az x tengelyt az A pontot a a B pont X tengelyre vett tükörképével összekötő szakasz!

2.3. Útmutatás: Írjuk fel a $(0;5)$ pont és a parabola egy tetszőleges $\left(x;\frac{1}{4}x^2\right)$ pontjának a távolságát x függvényében! Ennek a függvénynek keressük a minimumát!

2.4. Útmutatás: Határozzuk meg a számtani sorozat lehetséges differenciáit!

2.7. Útmutatás: Vizsgáljuk meg mindhárom esetben, hogy mennyivel változik a sárkányfejek száma!

3. feladatsor: logika, kombinatorika

3.3. Útmutatás: Egyrészt határozzuk meg a 2-re végződő négyzetszámok számát, másrészt fogalmazzuk meg, hogy milyen számokat nevezünk párosnak!

3.6. Útmutatás: Vizsgáljunk negatív számokat is!

3.15. Amikor egy részhalmazt képezünk, minden H-beli elemnél eldöntjük, hogy beválasztjuk-e a részhalmazba. Tehát H minden eleménél 2 lehetőség van, így a részhalmazok száma 2^{100}. Ha egy részhalmazban benne van a 2 is és az 5 is, akkor csak 98 szám esetében van 2 lehetőségünk, tehát 2^{98} darab olyan részhalmaz van, amelyben benne van a 2 is, és az 5 is. Hasonló meggondolással beláthatjuk, hogy 2^{98} olyan rész halmaz van, amelyikben sem a2, sem a 4 nincs benne. Tehát $2^{100} - 2^{98} = 3 \cdot 2^{98}$ olyan részhalmaz van, amiben benne van a 2 vagy a 4. A 2 pedig 2^{99} darab részhalmazban nincs benne.

4. feladatsor: logika, kombinatorika

4.3. Útmutatás: Határozzuk meg, hogy a 10-nél nagyobb prímszámok hányféle maradékot adhatnak 10-zel osztva!

4.4. Az **A** állításból következik a **B** állítás, de **B**-ből nem következik **A**.

4.6. Útmutatás: Az **A** állítás mindig teljesül. (Miért?) A **B** állítás nem mindig teljesül.

4.9. Útmutatás: Egyik állításból sem következik a másik. Mutassunk ellenpéldákat!

4.10. Az **A** állítás szerint x is, és y is $4,9$ és $5,1$ között van. Ez azt jelenti, hogy x és y eltérése $0,2$-nél kisebb. Tehát **A**-ból következik **B**. A fordított irányú következtetés nem iga, **B**-ből nem következik **A**. Keressünk ellenpéldát!

4.14. Útmutatás: Határozzuk meg a játékosok életkorának az összegét!

5. feladatsor: hatvány, gyök, logaritmus

5.1. A két adott szám különbsége $\frac{1}{113}$, tehát, ha a kisebbik számhoz $\frac{1}{113}$-nál kisebb racionális számot adunk, például $\frac{1}{226}$-ot, akkor az eredmény olyan racionális szám lesz, amelyik $\frac{4}{113}$ es $\frac{5}{113}$ közé esik.

5.2. A feladat első részének megoldása az $1000\sqrt{2}$, mert irracionális (miért?), és 1000-nél nagyobb. Hasonlóan gondolkozva kitalálhatjuk, hogy $\frac{\sqrt{2}}{10000}$ is irracionális (miért?), és $0,001$-nél kisebb.

5.15. Útmutatás: Írjuk fel mindkét számot olyan alakban, ahol a gyökkitevő megegyezik!

5.16. Útmutatás: Gyöktelenítsük a második szám nevezőjét!

5.25. Útmutatás: $81^{1/4} = 3$.

5.33. $5^{1-3\cdot\log_5 2} = \frac{5}{5^{3\cdot\log_5 2}} = \frac{5}{5^{\log_5 8}} = \frac{5}{8}$

5.37. Útmutatás: $\log_5 7 > 1$ (miért?), $\log_7 5 < 1$ (miért?)

5.40. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.41. Igaz. Keressük meg a bizonyítást a középiskolai tankönyvben!

5.42. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.43. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.44. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.45. Igaz. Keressük meg a bizonyítást a középiskolai tankönyvben!

5.46. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.47. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.48. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.49. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.50. Igaz. Keressük meg a bizonyítást a középiskolai tankönyvben!

5.51. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.52. Nem igaz. Keressünk ellenpéldát!

5.53. Vegyük észre, hogy $\log_7 x^4 = 2\log_7 x^2$, ezért az eredeti egyenlet ekvivalens a $\sqrt{x-5} + |x-3| = 0$ egyenlettel. A bal oldalon levő tagok nem negatívak, ezért az összegük csak úgy lehet nulla, ha mindkét tag nulla. Ez viszont semmilyen x-re nem teljesül. Tehát az egyenletnek nincs megoldása.

6. feladatsor: hatvány, gyök, logaritmus

6.2. Útmutatás: adjuk meg a számok pontos értékét!

6.3. Útmutatás: adjuk meg a számok pontos értékét!

6.7. Útmutatás: Vegyük észre, hogy $-\log_7(5\sqrt{2}+7) = \log_7 \frac{1}{5\sqrt{2}+7}$, majd hasonlítsuk össze a logaritmus mögötti számokat!

6.9. Útmutatás: Gondoljuk végig a logaritmus definícióját! Találjuk ki, hogy ha $3^x = a$, és $9^y = a$, akkor mi az összefüggés x és y között!

6.17. Útmutatás: A logaritmus függvény szigorúan monoton nő, ha a logaritmus alapja 1-nél nagyobb, és szigrúan monoton csökken, ha az alap 1-nél kisebb.

6.24. Útmutatás: **P**-ből nem következik **Q**, de **Q**-ból következik **P**.

6.31. $\frac{25^3-7^3}{18} = \frac{(25-7)(25^2+25\cdot 7+7^2)}{18} = \frac{18\cdot(25^2+25\cdot 7+7^2)}{18} = 25^2+25\cdot 7+7^2 = 625+175+49=849$

7. feladatsor: egyenletek, egyenlőtlenségek

7.7. Útmutatás: egyenlet csak pozitív x-ekre értelmes. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, így $\lg x \cdot \lg x = 3 + 2\lg x$. Ez az egyenlet $\lg x$-re nézve egy másodfokú egyenlet.

7.9. A $\log_3 x$ függvény szigorúan monoton, ezért $1+\log_2(1+3\log_2 x) = 3$, továbbá $1+3\log_2 x = 2^2$, amiből $\log_2 x = 1$, tehát $x = 2$. Az eredményt az eredeti egyenletbe való behelyettesítéssel ellenőrizhetjük.

7.11. Az egyenlőtlenség $x \leq 15$ esetén van értelmezve. Mivel az egyenlőtlenség kisebbik oldala sem negatív, az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve nem biztosan változik meg az egyenlőtlenség jel iránya. Tehát $15 - x < 4$, azaz $x > 11$.

7.12. Útmutatás: Az egyenlőtlenség $x \leq 15$ esetén van értelmezve. Ha $x < 0$, akkor az egyenlőtlenség biztosan teljesül, mert $\sqrt{15 - x} \geq 0$. Ha $x \geq 0$, akkor az egyenlőtlenség mindkét oldalát négyzetre emelve nem biztosan változik meg az egyenlőtlenség jel iránya.

7.17. Útmutatás: Az $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ függvény szigorúan monoton csökken.

7.19. Útmutatás: A $\log_{\frac{1}{3}} x$ függvény szigorúan monoton csökken.

7.21. Az egyenlet csak $x \neq a$ esetén értelmes. Az egyenletet átalakítva az $ax = a^6 + a$ egyenlethez jutunk. Ha $a = 0$, akkor minden $x \neq 0$ szám megoldás lesz, ha $a \neq 0$, akkor $x = a + 1$.

7.26. Ha a polinomból $x + 3$ kiemelhető, akkor a $2x^2 + x + k = 0$ egyenlet egyik gyöktényezője $x + 3$, tehát az előbbi egyenlet egyik gyöke -3. Ebből $2 \cdot (-3)^2 + (-3) + k = 0$, tehát $k = -15$.

7.27. Útmutatás: Másodfokú egyenlőtlenség megoldásakor mindig nagyon ajánlott a másodfokú függvény ábrázolása! A megoldást könnyen leolvashatjuk a grafikonról.

7.32. Útmutatás: Egy tört értéke pontosan akkor negatív, ha a számláló és a nevező előjele különböző.

7.33. Útmutatás: Mindkét oldalból vonjunk ki 1-et, majd vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz a számláló és a nevező előjele különböző.

7.34. Útmutatás: Mindkét oldalból vonjunk ki $\frac{1}{x}$-et, a bal oldalon hozzuk a két törtet közös nevezőre, majd a kivonás után vizsgáljuk meg, hogy mikor lesz a számláló és a nevező előjele különböző.

7.35. Útmutatás: Ábrázoljuk az x^2 és az $|x|$ függvényeket közös koordinátarendszerben, és a megoldást olvassuk le a grafikonokból!

7.38. Útmutatás: Vezessünk be új változókat, legyen $2^x = a$ és $7^y = b$.

7.39. Útmutatás: Az első egyenlete átalakítva a $\log_5 xy = 1$ egyenlete kapjuk, amiből $xy = 5$. A második egyenletet átalakítva a $2^x = 2^{2+3y}$ egyenletet kapjuk, amiből az exponenciális függvény szigorú monotonitását felhasználva $x = 2 + 3y$.

8. feladatsor: egyenletek, egyenlőtlenségek

8.2. $x_1 = 3, x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

8.3. $-3 \leq x \leq -2$ vagy $2 \leq x \leq 3$

8.8. Útmutatás: Írjuk át az összes logaritmust 2-es alapú logaritmusra! A végeredmény: $x = \dfrac{1}{2}$.

8.10. Útmutatás: Ábrázoljuk a $\log_3 x$ függvényt!

8.11. Ábrázoljuk a $\log_{\frac{1}{3}} x$ függvényt!

8.12. Útmutatás: A $\log_x 3$ kifejezés $x > 0, x \neq 1$ esetén értelmes. Az egyenlőtlenség megoldása előtt írjuk át a logaritmus 10-es alapra!

8.17. Útmutatás: Mivel $2^{px} > 0$, az egyenletnek csak akkor lehet megoldása, ha $\dfrac{1}{p} > 0$, vagyis $p > 0$. Vegyük mindkét oldal 10-es alapú logaritmusát, fejezzük ki x-et, és vizsgáljuk meg, hogy x értéke mikor negatív!

8.21. Útmutatás: Vizsgáljuk meg, hogy milyen x-ekre értelmes a bal oldal, és hogy milyen x-ekre értelmes a jobb oldal!

8.22. Ha $x = y = -1$, akkor az egyenlőség bal oldala nem értelmes, a jobb oldala értelmes, tehát az egyenlőség nem azonosság a valós számok halmazán.

8.27. Az egyenlőtlenséget átalakítva $|x - (-3)| < 5$, tehát az egyenlőtlenséget azok a számok oldják meg, amelyeknek az eltérése -3-tól kisebb, mint 5, tehát $-8 < x < 2$.

8.30. Útmutatás: $7 - \dfrac{1}{6} < \dfrac{1}{x} < 7 + \dfrac{1}{6}$.

9. feladatsor: sorozatok

9.11. Ha a megadott három szám például a sorozat első három tagja, akkor sorozatot lehet az $a_n = 2n1$ képlettel definiált sorozat. Ez számtani sorozat. Tehát a sorozat lehet számtani sorozat. Ugyanakkor az is lehet, hogy a például sorozatot tagjai ismétlődnek, tehát a sorozat így néz ki: $1, 3, 5, 1, 3, 5, 1, 3, 5, 1...$, ekkor viszont nem számtani sorozat.

9.12. Számoljuk ki a sorozat első néhány tagját:
$a_1 = 8 \cdot \left\{\frac{1}{4}\right\} - 1 = 8 \cdot \frac{1}{4} - 1 = 1$, $a_2 = 8 \cdot \left\{\frac{2}{4}\right\} - 1 = 8 \cdot \frac{2}{4} - 1 = 3$,
$a_3 = 8 \cdot \left\{\frac{3}{4}\right\} - 1 = 8 \cdot \frac{3}{4} - 1 = 5$, $a_4 = 8 \cdot \left\{\frac{2}{4}\right\} - 1 = 8 \cdot 0 - 1 = -1$.
Látható, hogy $a_2 - a_1 = 2 \neq 6 = a_4 - a_3$, tehát a sorozat nem számtani sorozat.

9.26. A sorozat tagji: $a_1 = S_1 = 3$, továbbá $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 3(n+1)^2 - 3n^2 = 6n + 3$. A sorozat szomszédos tagjainak különbsége $a_{n+1} - a_n = 6n + 3 - (6(n-1) + 3) = 6$, tehát állandó, ezért a sorozat számtani sorozat. A szomszédos tagok hányadosa $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{6n+3}{6(n-1)+3}$ nem állandó, mert n-től függ, ezért a sorozat nem mértani sorozat.

10. feladatsor: sorozatok

10.2. $\left(\sqrt{3}\right)^1 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 \cdots \left(\sqrt{3}\right)^{10} = \left(\sqrt{3}\right)^{1+2+3+\cdots+10} = \left(\sqrt{3}\right)^{55} = \left(3^{1/2}\right)^{55} =$
$= 3^{55/2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-55/2}$

10.3. A feladat szerint $\dfrac{S_6}{S_3} = \dfrac{a_1 \cdot \frac{q^6-1}{q-1}}{a_1 \cdot \frac{q^3-1}{q-1}} = \dfrac{q^6-1}{q^3-1} = q^3+1 = -7$. Ebből $q = -2$.

10.4. Igen van, például legyen $a_1 = 27$ és $q = \dfrac{4}{3}$.

10.5. Tegyük fel, hogy van ilyen mértani sorozat, azaz vannak olyan j, k, n pozitív egész számok és van olyan q valós szám, amelyekre teljesül, hogy $a_j = 1, a_k = 2, a_n = 3$, továbbá $a_j = a_1 \cdot q^{j-1}, a_k = a_1 \cdot q^{k-1}, a_n = a_1 \cdot q^{j-1}$. Ekkor $q^{k-j} = 2$ és $q^{n-k} = 3$. Ebből $2^{n-k} = 3^{k-j}$, ami nem lehetséges. Tehát nincs ilyen mértani sorozat.

10.15. Nem igaz, ha $q = 1$.

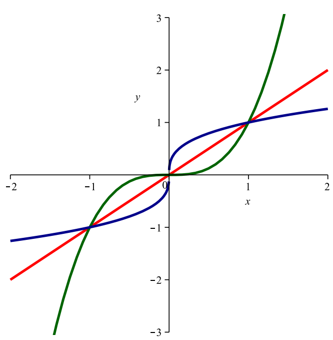
11. feladatsor: halmazok, függvények

11.1. A halmaz intervallum, és végtelen sok eleme van.

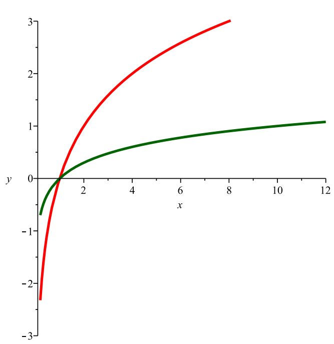
11.2. A halmaz nem intervallum. A halmaznak 5 eleme van.

11.7. A függvény egyértelmű hozzárendelés. Ez azt jelenti, hogy az értelmezési tartomány valamely x eleméhez pontosan 1 függvényértéket rendelünk hozzá. Ez az első sor görbéire teljesül, a második sor görbéire nem teljesül. Tehát az első sorban ábrázolt görbék lehetnek függvénygrafikonok, a második sor görbéi nem lehetnek.

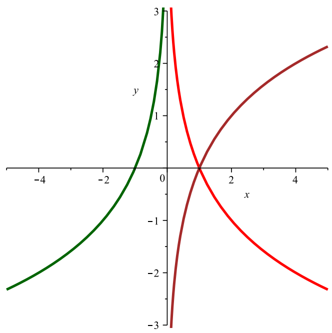
11.9.



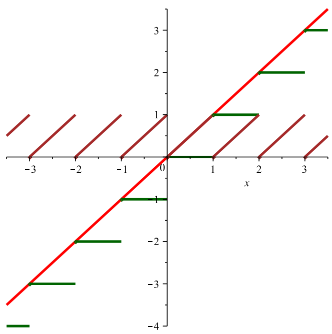
11.15.



11.17.



11.18.



11.20. Az f függvény minden $x \neq 0$ helyen értelmezve van, a g függvény csak pozitív x-ekre értelmes. A két függvény értelmezési tartománya nem egyezik meg, tehát a két függvény nem egyenlő.

11.23. $f(-\pi/2) = -1, g(-\pi/2) = 1$, tehát a két függvény nem egyenlő.

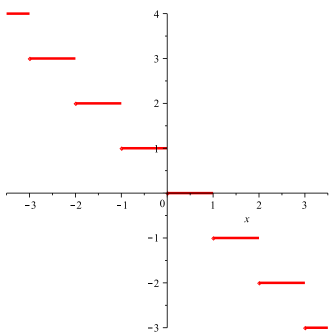
11.36. Ez egy konstans függvény, a meredeksége 0.

11.38. Nem lehet függvénygrafikon.

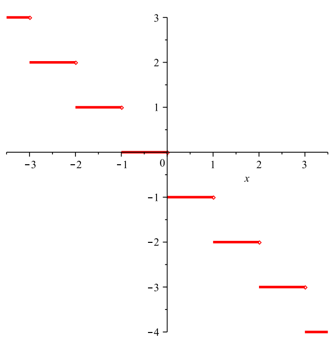
11.39. Útmutatás: A függvény értéke mindenhol negatív, ha $m < 0, 4^2 - 4 \cdot m \cdot 1 < 0$, és mindenhol pozitív, ha $m > 0, 4^2 - 4 \cdot m \cdot 1 < 0$.

12. feladatsor: függvények

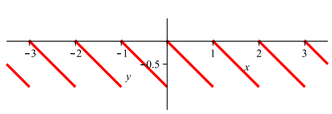
12.2.



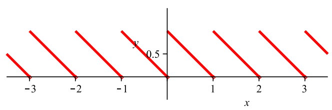
12.3.



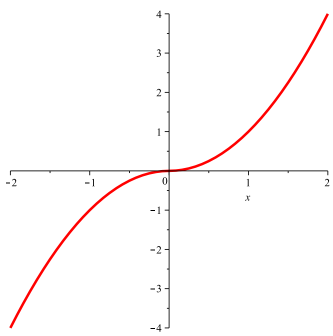
12.4.



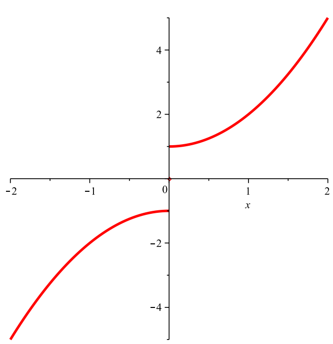
12.5.



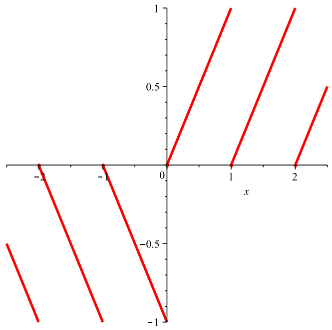
12.11.



12.12.



12.13.



12.16. Útmutatás: Legyen a másodfokú kifejezés diszkriminánsa 0.

12.17. Útmutatás: A függvény minimumhelye $x = -1$. (Miért?) A minimum érték $f(-1) = (-1)^2 + 2 \cdot (-1) + c = 5$.

12.26. $[-1/2] = -1, [1/2] = 0$, tehát a függvény se nem páros, se nem páratlan. A függvény az egész számegyenesen monoton nő, abszolút minimuma és abszolút maximuma nincs.

12.27. $\{-3/4\} = 1/4, \{3/4\} = 3/4$, tehát a függvény se nem páros, se nem páratlan. A függvény monoton nő az $[n, n+1)$ alakú intervallumokon, ahol n egész szám. Monoton csökkenő szakasz nincs. A függvény minimuma 0, maximuma nincs.

12.31. A függvény páros is, és páratlan is. A függvény az egész számegyenesen monoton nő, a függvény az egész számegyenesen monoton csökken. A függvény minimuma 0, a függvény maximuma 0.

12.32. Útmutatás: Vizsgáljuk meg a függvény értelmezési tartományát!

12.33. Ha $f(x) = \operatorname{sgn} x \cdot x^2$, akkor $f(-x) = \operatorname{sgn}(-x) \cdot (-x)^2 = -\operatorname{sgn} x \cdot x^2 = -f(x)$, tehát a függvény páratlan. Mivel például $f(-1) = -1 \neq 1 = f(1)$, a függvény nem páros.

13. feladatsor: geometriai számítások

14. feladatsor: geometriai számítások

15. feladatsor: vektorok, koordinátageometria

15.2. Az egyenlőséget az $y = x$ és az $x + y = 1$ egyenes pontjai elégítik ki.

15.3. Az abszolút érték definíciója miatt az első síknegyedben a pontok az $x + y = 14$, a második síknegyedben a $-x + y = 4$, a harmadikban a $-x - y = 4$, a negyedikben az $x - y = 4$ egyenesen vannak. Ha az előbbi egyeneseknek csak az adott síknegyedbe eső szakaszát nézzük, megkapjuk a keresett halmazt, egy olyan négyzetet, amelynek csúcspontjai:
$(4; 0), (0; 4), (-4; 0), (0; -4)$.

15.4. A megoldás annak a négyzetnek a belseje, amelynek csúcspontjai:
$(4; 0), (0; 4), (-4; 0), (0; -4)$.

15.8. A bizonyítandó egyenlőséget átrendezve a $\overrightarrow{QA} - \overrightarrow{QB} = \overrightarrow{QD} - \overrightarrow{QC}$ egyenlőséghez jutunk, ami ekvivalens a $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ egyenlőséggel. Ez utóbbi pedig a paralelogramma tulajdonságai miatt igaz.

15.16. Mivel $x^2 + y^2 + 2x - 10y + 1 = (x + 1)^2 + (y - 5)^2 - 25$, az eredeti egyenlőség ekvivalens a következővel: $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 25$, ami a $(-1; 5)$ középpontú, 5 sugarú kör egyenlete.

15.21. Útmutatás: Vizsgáljuk meg, hogy az adott pontok hol helyezkednek el a körhöz képest. A belső pontokból nem húzható érintő, a körvonal pontjaiból egy érintő, a körön kívüli pontokból két érintő húzható.

15.22. Útmutatás: Írjuk fel a kör és az egyenes egyenletéből álló egyenletrendszert, és vizsgáljuk meg, hogy b függvényében hány megoldása lesz az egyenletrendszernek.

16. feladatsor: koordináta-geometria

16.6. $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{2}$

16.7. Útmutatás: Vegyünk fel a négyszög síkjában egy tetszőleges Q pontot, majd fejezzük ki a feladatban szereplő vektorokat $\mathbf{a}$-val, $\mathbf{b}$-vel, $\mathbf{c}$-vel és $\mathbf{d}$-vel, ahol a kisbetűvel jelölt vektorok a Q pontból a négyszög megfelelő csúcsaiba mutató vektorokat jelölik.

17. feladatsor: trigonometria

17.7. Útmutatás: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$.

17.9. Útmutatás: $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos^2 x}$.

17.13. $x_1 = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, x_2 = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

17.18. Legyen $y = 2x = \dfrac{\pi}{4}$. Ekkor $\sin y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ vagy $\sin y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Tehát $y_1 = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi, y_2 = \dfrac{7\pi}{4} + 2k\pi, y_3 = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, y_4 = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Ebből $x_1 = \dfrac{y_1 + \pi/4}{2} = \dfrac{3\pi}{4} + k\pi, x_2 = \pi + k\pi, x_3 = \dfrac{\pi}{4} + k\pi, x_4 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

17.19. Útmutatás: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.

17.23. Szorozzuk meg az eredeti egyenlet mindkét oldalát $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$-vel: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Mivel $\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, az utolsó egyenlet helyett írhatjuk, hogy
$\cos(\pi/4)\cdot\sin x + \sin(\pi/4)\cdot\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Az addíciós tételeket felhasználva $\sin(x + \pi/4) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
Ebből $x_1 + pi/4 = \pi/4 + 2k\pi, x_2 + \pi/4 = 3\pi/4 + 2k\pi$, vagyis $x_1 = \pi/2 + 2k\pi, x_2 = \pi + 2k\pi$, ahol $k \in \mathbb{Z}$.
Megjegyzés: Az egyenletet megoldhatjuk úgy is, hogy mindkét oldalt négyzetre emeljük, majd felhasználjuk, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Ezzel a módszerrel viszont hamis gyököket is kapunk. A hamis gyököket úgy tudjuk kiszűrni, hogy a megoldásokat behelyettesítjük az eredeti egyenletbe.

17.24. Útmutatás: Az egyenlet mindkét oldalát osszuk 2-vel, majd használjuk fel az addíciós tételeket!

17.25. Útmutatás: Ábrázoljuk a $\sin x$ függvényt, és grafikusan oldjuk meg az egyenlőtlenséget!

17.32. Útmutatás: Alkalmazzuk az addíciós tételeket, és vezessünk be új ismeretleneket, legyen $a = \sin x, b = \cos x$.

18. feladatsor: trigonometrikus egyenletek, egyenlőtlenségek

18.13. Útmutatás: $4\sin x\cos x\cos 2x = 2\cdot((2\sin x\cos x)\cdot\cos 2x) = 2\sin 2x\cos 2x = \sin 4x$.

18.20. Útmutatás: Osszuk 2-vel az egyenlőtlenség mindkét oldalát, majd alkalmazzuk az addíciós tételeket! Az egyenlőtlenséget grafikusan oldjuk meg!

19. feladatsor: függvények, grafikonok

19.9. Nem igaz. Legyen $x = 0 \neq 2\pi = c$, de $\sin 0 = \sin 2\pi$.

19.10. Igaz, mert a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton nő.

19.17. Útmutatás: Vizsgáljuk meg az egyenlet értelmezési tartományát!

19.18. Útmutatás: Vizsgáljuk meg az egyenlet értelmezési tartományát!

19.26. Nem lehet. Az elsőfokú polinom grafikonja egyenes.

19.27. Lehet, például $f(x) = (x-2)(x-5)$.

19.28. Nem lehet.

19.29. Lehet, például $f(x) = (x-3,5)^4 - 1,5^4$.

19.32. Lehet, például $f(x) = -(x-2)(x-5)(x-7)$.

20. feladatsor: szöveges feladatok

20.2. Legyen a négyjegyű szám $\overline{ABC7} = 1000A + 100B + 10C + 7$. Az új szám $\overline{7ABC} = 7000 + 100A + 10B + C$. A feladat szerint $1000A + 100B + 10C + 7 + 2826 = 7000 + 100A + 10B + C$. Az egyenletet rendezve: $100A + 10B + C = 463$, amibol az eredeti szám 4637.

20.4. Legyen a tört $\frac{3}{y}$. Az új tört $\frac{3}{y-12}$. A feladat szerint $4 \cdot \frac{3}{y} = \frac{3}{y-12}$. Ebből $y = 16$.

20.6. Tegyük fel, hogy eredetileg x darab szivattyú működött, és hogy minden szivattyú y liter üzemanyagot fogyasztott egy óra alatt. A feladat szerint $12xy = 16(x-5)y$. Mivel $y \neq 0$, az egyenlet egyértelműen megoldható, $x = 20$.

21. feladatsor: szerkesztések, bizonyítások

21.1. Útmutatás: Használjuk fel a Pitagorasz-tételt!

22. feladatsor: szerkesztések, bizonyítások

23. feladatsor: vegyes gyakorlófeladatok

24. feladatsor: Rábai Imre: Matematika mérőlapok 6. feladatsora

25. feladatsor: vegyes gyakorlófeladatok

26. feladatsor: vegyes gyakorlófeladatok

27. feladatsor: vegyes gyakrolófeladatok

Irodalom

Rábai Imre: *Matematikai mérőlapok*, Műszak Könyvkiadó, Budapest, 1998.

Rábai Imre: *Elemi matematikai példatár, trigonometria, koordináta-geometria*, Gondolat kiadó, Budapest, 1975.

Pósa Lajos: *Matematika Összfoglalás I.*, Országos Oktatástechnikai Központ, Veszprém

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Geometriai feladatok gyűjteménye, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest

Imrecze Zoltánné, Reiman István, Urbán János: *Fejtörő feladatok felsősöknek*, Szalay Könyvkiadó, 1999.

Róka Sándor: *Szakköri feladatok matematikából*, Tóth Könyvkereskedés, 1996.

Kosztolányi, Mike, Vincze: *Érdekes matematikai feladatok*, Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1994.