Részletes tematika

A feladatmegoldások célja a matematikai gondolkodásmód és a feladatmegoldó rutin fejlesztése, felzárkóztatás, biztos alapok teremtése.

Témakörök: aritmetika, racionális számok, valós számok, műveletek algebrai kifejezésekkel, egyenletek, egyenlőtlenségek és rendszereik, függvények, sorozatok, elemi geometriai bizonyítások és számítások, vektorok, koordinátageometria, trigonometria, kombinatorika, bizonyítási módszerek.

Tanmenet

Szeptember

Aritmetika, racionális számok, tizedes törtek, irracionális számok, gyökök, hatványok, logaritmusok, valós számok, műveletek algebrai kifejezésekkel, számelméleti feladatok.

Október

Halmazok, függvények, elemi függvények ábrázolása, elemi vizsgálata.
Egyszerű kombinatorikai és valószínűség számítási feladatok.
Egyenletek, egyenlőtlenségek, rendszereik, paraméteresek is.
Sorozatok, vegyes példák, különböző megadási módok. A számtani és a mértani sorozatok.

November

Elemi geometriai bizonyítások, számítások
Ponthalmazok, vektorok, koordináta geometria
Szögfüggvények, trigonometria, logaritmus
Függvények, egyenletek, egyenlőtlenségek.

December

Vegyes középiskolai feladatok. Számítások és bizonyítási módszerek.

Tematika részletesebben. Mintapéldák.

Racionális számok, tizedes törtek, irracionális számok, gyökök, hatványok, logaritmusok.

Számok felírása különböző alakban. Racionális számok tizedestört alakban, irracionális számok tizedestört alakban, számok pontos és közelítő értéke Számítások gyökökkel, hatványokkal, logaritmussal. A hatványozás értelmezése racionális kitevő esetén., hatványozás azonosságai., gyökvonás azonosságai, logaritmus fogalma, a logaritmus azonosságai, áttérés más alapú logaritmusra

Példák:

1.) Számológép használata nélkül bizonyítsa be, hogy $5\sqrt{2}-7$ reciproka $5\sqrt{2}+7$.

2.) Számológép használata nélkül határozza meg az alábbi kifejezések értékét:

a.) $\lg 6+\lg 4+\lg 20-\lg 3-\lg 16$.

b.) $\sin\left(\frac{3\cdot 2^{1000}+1}{3}\cdot\pi\right)$

c.) $\log_{10}(10^{2006})$

3.) Oldjuk meg a racionális számok halmazán a következő egyenletet: $\left(\sqrt{27}-4\right)x+\left(\sqrt{12}-3\right)y=\sqrt{48}-5$

4.) Adjunk meg legalább két racionális számot ($\frac{a}{b}$ alakú törtet, ahol a és b pozitív egészek), melyek biztosan $\frac{4}{113}$ és $\frac{5}{113}$ közé esnek. A választ indokoljuk!

5.) Adjunk meg legalább két irracionális számot, melyek biztosan $\frac{4}{113}$ és $\frac{5}{113}$ közé esnek. Indokoljon!

Egyenletek, egyenlőtlenségek, rendszereik, paraméteresek is.

Algebrai átalakítások, nevezetes azonosságok, egyenletek, egyenlőtlenségek rendezése. Másodfokú egyenletek – megoldóképlet, diszkrimináns, gyökök és együtthatók összefüggése, gyöktényezős alak. Törtes

egyenletek, és egyenlőtlenségek, másodfokú egyenlőtlenségek, abszolút értékes egyenletek és egyenlőtlenségek. Exponenciális és logaritmikus egyenletek, paraméteres feladatok megoldása. Trigonometrikus egyenletek négyzetgyökös, abszolút értékes, exponenciális, logaritmikus és trigonometrikus egyenlőtlenségek.

Értelmezési tartomány, illetve értékkészlet-vizsgálattal, valamint szorzattá alakítással megoldható feladatok, összetett feladatok megoldása.

Példák:

1.) Oldjuk meg az egyenletet a valós számok halmazán.

$$(x+3)^3-(x+2)^3=19$$

2.) Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenlőtlenségeket!

$$\frac{x+2}{3-x}\le 0;\quad (7-|x|)(x+5)>0.$$

3.) $x^2<a$; $a^x<b$; $logx<a$ típusú egyenlőtlenségek megoldása.

4.) Van-e olyan x valós szám, amelyre teljesül, hogy $x<x^3<x^4<x^2$? (Indoklással)

5.) Oldja meg az alábbi egyenleteket a valós számok halmazán.

a) $(x-2)^2\,|\cos x|=\cos x$

b) $\{x\}=\frac{1}{5}x$ (Az x törtrésze: $\{x\}=x-[x]$, $[x]$, az x egész része, jelenti az x-nél nem nagyobb egészek közül a legnagyobbat.)

6.) Az alábbi egyenletek mindegyikéről döntse el, hogy azonosság-e a valós számok halmazán. (Indokoljon!)

a) $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ b) $\log_{10}^2 x=2\cdot\log_{10}x$ c) $\sqrt{1-\sin^2 x}=\cos x$

7.) Határozza meg p értékét úgy, hogy a $2x^2+6x+p=0$ egyenletnek egy gyöke legyen!

Sorozatok, vegyes példák, különböző megadási módok. Számtani és a mértani sorozatok.

Pozitív egész számok, reciprokok, páratlan számok, páros számok, négyzetszámok, köbszámok, háromszögszámok sorozatai, stb. Különbségsorozatok, hányados sorozatok. Példák a Fibonacci típusú sorozatokra. Megadási módok, jelölések, grafikonok, egyszerű összegezések. Számtani és mértani sorozatok.

Példák

1.) Egy sorozat első n tagjának összege $3n^2$ minden pozitív n egész számra. Igaz-e, hogy ez számtani sorozat? Határozzuk meg a sorozat n-edik tagját n függvényében!

2.) a) Összeszoroztuk a 2 első tíz pozitív egész kitevőjű hatványát: 2, 4, …, 1024-ig. A 2-nek hányadik hatványát kaptuk?

b) Összeszoroztuk $\sqrt{3}$-nak az első tíz pozitív egész kitevőjű hatványát. Háromnak hányadik hatványát kaptuk? És 1/3-nak hányadik hatványa ez?

3.) Egy mértani sorozatban (amelyben nem szerepel a 0) az első hat tag összege (-7)-szerese az első három tag összegének. Mennyi lehet a mértani sorozat hányadosa (kvóciense)?

4.) Van-e olyan mértani sorozat, amelyben az 1, 2, 3 számok mindegyike előfordul?

5.) Az (a_n) sorozat n-edik tagja az n indexnek másodfokú függvénye. (n pozitív egész szám). A sorozat első három eleme sorra: 0, 3, 8. Határozzuk meg a sorozat negyedik, ötödik elemét. Írjuk fel az n-dik elem képletét.

6.) A pozitív egészek sorozatában a 2-től kezdve minden harmadik szám előjelét negatívra változtattuk. Az így kapott sorozat (1, –2, 3, 4 , –5, 6, 7, –8, …) első 1000 tagja között, melyik az utolsó negatív előjelű szám? Határozza meg az első 1000 tag összegét!

Halmazok, függvények, elemi függvények ábrázolása, elemi vizsgálata.

Lineáris, másodfokú, egyszerű törtfüggvények. Abszolút érték függvény, sign$x$, egészrész, törtrész függvény. Törtkitevős hatványok, exponenciális, logaritmus és trigonometrikus függvények értelmezése, ábrázolása. Függvény transzformációk. Függvények elemzése – értelmezési tartomány, értékkészlet, monotonitás, zérushely, paritás, periodicitás.

Példák:

1.) Tekintsük az $f(x) = x^2 - 100$ függvényt. Melyik a legkisebb egész szám, amelyre a függvény értéke negatív? Ábrázolja a függvényt!

2.) Mely pontokban metszi a derékszögű koordinátarendszer *x* és *y* tengelyét az $f(x) = \log_2(x+8)$ függvény grafikonja? Ábrázolja függvényt!

3.) Az $f(x) = x^2 + 2x + c$ függvényt a valós számok halmazán értelmezzük. Hogyan kell megválasztani a *c* értékét ahhoz, hogy

a) a függvény grafikonja érintse az *x* tengelyt;
b) a függvény minimuma -5 legyen;
c) a függvény értékkészletébe csak negatív számok tartozzanak?

A válaszokat indokoljuk!

4.) Ábrázolja az $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2-3x}$ ($x \neq 0$ és 3), függvényt. Felveszi-e a függvény a 0, az 1 és a 2 értékeket? Ha igen, hol?

5.) Mely valós x-ekre értelmezhetők a következő kifejezések:

a.) $\sqrt{1+\sin x}$ b.) $\sqrt{1+tgx}$ c.) $\sqrt{\sin(x+1)}$

Elemi geometriai bizonyítások, számítások

Kerület, terület, felszín és térfogat számítások, átdarabolások. A Pitagorasz tétel és alkalmazásai, arányossági tételek alkalmazásai, egyszerű szerkesztések és bizonyítások. Háromszögek, sokszögek tulajdonságai, Thálesz tétele, kerületi szögek tétele, transzformációk.

Példák:

1.) Vegyen fel egy szakaszt! Szerkessze meg a $\sqrt{5}$ -szörösét! (Írja le a szerkesztést!)

2.) Valamely kör köré írt egyenlő szárú trapéz párhuzamos oldalainak hossza *a* és *b;* a nem párhuzamos oldalak a kört az *M* illetve *N* pontban érintik. Fejezze ki az *MN* távolságot az adatokkal!

3.) Adott körbe írható téglalap oldalainak aránya 1:3. Hány százaléka a téglalap területe a körének?

4.) Egy háromszög mindegyik oldalát ugyanabban a körüljárási irányban hosszabbítsa meg saját hosszával! A végpontok összekötésével kapott háromszög területe hányszorosa az eredetinek?

5.) Egy kocka élei egységnyi hosszúak. Milyen távol vannak a kocka csúcsai a kocka valamelyik testátlójától?

Ponthalmazok, vektorok, koordináta geometria

A vektor fogalma, vektorok a koordináta síkon. Vektor abszolútértéke, vektorok összege, különbsége, vektor skalárszorosa, vektor felbontása összetevőkre. Skaláris szorzat definíciója; tulajdonságai. Tájékozódás a koordináta síkon, ponthalmazok megadása a koordináta síkon.
Az egyenes egyenletének felírása különböző adatok alapján, a kör egyenlete, a parabola egyenlete.

Példák:

1.) A derékszögű koordináta rendszer síkjában mely (x; y) pontokra teljesül a következő egyenlet. Abrázolja a kapott ponthalmazt a koordináta rendszerben!

a) $x + |x| = y + |y|$

b) $x^2 - y^2 = x - y$?

2.) Az a paraméter mely értéke esetén merőlegesek egymásra a $2x - 3y = 7$, $6x + ay = 8$ egyenesek?

3.) Számítsuk ki az $y - 10^{-9}x = 10^{-6}$, az $y = 10^{-6}$ és a $2y = 10^{-9}x + 10^{-6}$ egyenesek által közrezárt háromszög területét!

4.) Határozza meg az $x^2 - 4x + y^2 - 6y - 12 = 0$ egyenlettel megadott kör középpontját és sugarát! Bizonyítsa be, hogy a $3x + 4y = 43$ egyenes érinti a kört, és adja meg az érintési pontot!

Szögfüggvények, trigonometria, logaritmus

A szög mérése fokban és radiánban.
A szögfüggvények általános definíciója, a szögfüggvényekre vonatkozó alapvető összefüggések: pótszögek, kiegészítő szögek, negatív szög szögfüggvénye, pitagoraszi összefüggés. szögfüggvények kifejezése

egymásból, nevezetes szögek (30°, 45°, 60°) szögfüggvényei. Addíciós összefüggések Szinusz- és a koszinusztétel.

Példák

1.) Egy trapéz egyik alapjának hossza 6cm, és egyik átlója 5 cm hosszú. A trapéz átlói merőlegesek egymásra, és tudjuk, hogy van olyan átlója, amely 30°-os szöget zár be az alapokkal.
   a) Határozzuk meg az ismeretlen átló hosszát!
   b) Mekkora a trapéz területe?
   c) Mennyi a trapéz kerülete?

3.) Az α szögre $\cos\alpha = \frac{5}{13}$. Határozza meg $\cos 2\alpha$ és $\sin 2\alpha$ lehetséges értékeit.

4) Egy háromszög egyik szöge $120°$-os, oldalaira pedig fennáll, hogy $a^2b^2 + c^4 = b^4 + a^2c^2$.
   Mekkorák a háromszög további szögei?

5.) Bizonyítsuk be, hogy az x minden valós értéke mellett:

$$\cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

6.) Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán.

$$xy = 1$$
$$x+y-(\cos z)^2 = -2$$

7.) Oldjuk meg a következő egyenletet: $\log_{\sin x} \cos x = \log_{\cos x} = \sin x$

8.) Határozza meg az alábbi kifejezés pontos értékét: $\lg 6 + \lg 4 + \lg 20 - \lg 3 - \lg 16$.

9). Melyik nagyobb? (Segédeszköz használata nélkül kell megoldani!) $\log_4 9$ vagy a $\log_9 25$

Gondolkodási módszerek, kombinatorikai, logikai feladatok, bizonyítási módszerek, számelméleti feladatok.

Állítások megfogalmazása, értelmezése kombinatorikai, logikai feladatok és számelméleti feladatok megoldásában, a bizonyítási igény, bizonyítási készség fejlesztése.

Példák:

1.) n fő van az osztályban, a focista, b úszó, c kosárlabdázó. További adatok ismeretében különböző kérdések, pl. Hányan vehetnek részt pontosan kétfélében, mindháromban, egyikben sem, stb?

2.) Skatulyaelvvel megoldható feladatok.
   Pl.: Egy dobozban 10 piros 15 fehér, 20 zöld golyó. Hányat kell kivennünk, hogy a kivettek között biztosan legyen 2 piros és 2 fehér, 2 piros vagy 2 fehér, több fehér, mint piros, valamelyik színből mind, n egyszínű, stb?

3.) Döntse el, hogy az alábbi állítások igazak vagy hamisak! Állítását indokolja!
   a) Ha egy hatszögnek a szemköztes oldalai párhuzamosak, akkor szabályos.
   b) Ha egy csoportban 14 tanuló van, akkor biztosan van köztük legalább 3, akiknek ugyanabban a hónapban van a születésnapja.
   c) Ha egy hatszög szabályos, akkor vannak párhuzamos oldalai.
   d) Ha egy csoportban 2 tanulónak ugyanabban a hónapban van a születésnapja, akkor legalább 13 tanuló van a csoportban.

4.) Képezzünk hatjegyű számokat az 1, 2, 3, 4, 5, 6 számjegyekből (ismétlődhetnek - nem ismétlődhetnek). Különböző kérdésfeltevésekkel: pl. hány 4-gyel, 5-tel osztható van köztük, hány négyzetszám van köztük, mi a valószínűsége, hogy az összes ilyen szám közül véletlenül éppen párosat, 3-mal oszthatót, stb-t választunk ki.

5.) Adjon meg olyan pozitív egész n számot, amelyre az alábbi három állítás közül pontosan kettő igaz:
   (1) n osztható 6-tal
   (2) n nem osztható 2-vel
   (3) n jegyeinek összege 12.