**Matematika szintfelmérő 2015. szeptember matematika BSC MO**

**1.** A fagylaltok éjszakáján egy közvéleménykutatásban vizsgált csoport 82%-ának ízlett az eperfagylalt, 94%-ának pedig a citromfagylalt. A két gyümölcsfagylalt közül mindenkinek ízlett legalább az egyik. Mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül kiválasztott személynek mindkét gyümölcsfagylalt ízlett? 9 pont

*Megoldás*

A tetszőlegesen kiválasztott személyekre legyen $A$ esemény, hogy az eprest szeretik, legyen $B$ esemény, hogy a citromost szeretik.

A szöveg alapján tudjuk, hogy

$$p(A)=0{,}82,\ p(B)=0{,}94 \text{ és } p(A+B)=1.$$

Mivel

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(AB),$$

az ismert értékeket behelyettesítve:

$$1=0{,}82+0{,}94-p(AB).$$

Ebből

$$p(AB)=0{,}76.$$

Vagyis egy véletlenül kiválasztott személy 0,76 valószínűséggel szereti mindkét gyümölcsfagylaltot.

**2.** Határozza meg a $kx^2-(2k+3)x+k-3=0$ egyenletben szereplő $k$ valós paraméter értékét úgy, hogy az egyenletnek pontosan egy valós megoldása legyen. 13 pont

*Megoldás*

Ha $k=0$, akkor a $-3x-3=0$ elsőfokú egyenletről van szó, és ennek az $x=-1$ az egyetlen gyöke.

Ha $k\neq 0$, valódi másodfokú egyenletről van szó, és annak akkor van pontosan egy valós megoldása, ha a diszkriminánsa 0, azaz

$$(2k+3)^2-4k(k-3)=0.$$

Elvégezve a műveleteket:

$$4k^2+12k+9-4k^2+12k=0,$$

vagyis $24k=-9$, ahonnan $k=-\frac{9}{24}=-\frac{3}{8}$.

Ekkor az egyenlet $-\frac{3}{8}x^2-(-\frac{6}{8}+3)x-\frac{3}{8}-3=0$, amely ekvivalens az $x^2+(-2+8)x+1+8=0$ egyenlettel, amelynek egyetlen gyöke az $x=-3$.

Az egyenletnek tehát a $k=-\frac{3}{8}$ és a $k=0$ paraméterértékekre van pontosan egy valós gyöke.

**3.** Oldja meg az alábbi egyenletrendszert a valós számpárok halmazán: 12 pont

$$\log_2(x+y)-\log_2(x-y)=1,$$
$$x^2-y^2=2.$$

*Megoldás*

Átalakítjuk az egyenleteket a logaritmus azonosságainak felhasználásával. Az 1. egyenlet:

$$\log_2\frac{x+y}{x-y}=1,$$

tehát

$$\frac{x+y}{x-y}=2,$$

azaz

$$x+y=2x-2y,$$

ahonnan

$$x=3y.$$

Ezt a második egyenletbe helyettesítve

$$(3y)^2-y^2=2,$$

azaz

$$8y^2=2, \qquad y^2=\frac{1}{4},$$

tehát

$$y=\pm\frac{1}{2}$$

A negatív gyök esetén $x+y = 4y$ is negatív lenne, amire az eredeti első egyenletben szereplő logaritmus nincs értelmezve. Az egyenletrendszer egyetlen lehetséges megoldása megoldása az $x=\frac{3}{2},\ \ y=\frac{1}{2}$ számpár, és ez ki is elégíti az egyenleteket.

**4.** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: 12 pont

$$12x^{-\frac{3}{4}}-x^{-\frac{3}{8}}=2^{-4}.$$

*Megoldás*

Bevezetjük az $u=x^{-\frac{3}{8}}$ változót. Ekkor a

$$12u^2-u=2^{-4}$$

egyenletet kell megoldani. Ennek pozitív gyöke az $u=\frac{1}{8}$, amiből $x=2^8$.

Valóban, $12\left(2^8\right)^{-\frac{3}{4}}=3\cdot 2^{-4}$ és $\left(2^8\right)^{-\frac{3}{8}}=2\cdot 2^{-4}$, tehát a különbségük $2^{-4}$.

**5.** Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: 13 pont

$$\cos 2x+\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{2}}=0.$$

*Megoldás*

A $\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{2}}=-\cos 2x$ átrendezésből látszik, hogy $\cos 2x\le 0$.

Négyzetre emelés és rendezés után a megoldandó egyenlet

$$2\sin^2 2x-\sin 2x-1=0.$$

Az $a=\sin 2x$ új változó bevezetése után a

$$2a^2-a-1=0$$

egyenlet gyökeit keressük, ezek $a_1=1$ és $a_2=-\frac{1}{2}$.

Az $a_1=\sin 2x=1$ értékhez a $2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in Z$, azaz $x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi$ gyöksorozat tartozik.

Az $a_2=\sin 2x=-\frac{1}{2}$ értékhez két sorozat is tartozik.

Az egyik a $2x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$ sorozat, de erre nem teljesül a $\cos 2x\le 0$ feltétel ($\cos 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$), így nem ad gyököt. A másik sorozat a $2x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$, amelyre teljesül a $\cos 2x\le 0$ feltétel, tehát $x_2=\frac{7\pi}{12}+\mathrm{k}\pi, \mathrm{k}\in Z$ is egy gyöksorozat.

**6.** Kovács úr a fia 6. születésnapján 200 000 Ft-ot helyezett el a bankba évi 13 pont 5,5%-os kamatra. Ezt követően a fiú minden születésnapján újabb 30 000 Ft-ot tett az összeghez. Mennyi pénz lesz a számlájukon a fiú 18. születésnapján? (A számlavezetési költségektől eltekintünk.)

*Megoldás*

Jelölje a 200 000 Ft induló összeget *A*, a 30 000 Ft évenkénti befizetést *B*. A fiú 12 év múlva lesz 18 éves. Felírjuk évenként a bankban levő pénzösszeget:

1 év után: $A\cdot 1{,}055+B$

2 év után: $(A\cdot 1{,}055+B)\cdot 1{,}055+B=A\cdot 1{,}055^2+B\cdot 1{,}055+B$

3 év után: $A\cdot 1{,}055^3+B\cdot 1{,}055^2+B\cdot 1{,}055+B$

4 év után: $A\cdot 1{,}055^4+B\cdot 1{,}055^3+B\cdot 1{,}055^2+B\cdot 1{,}005+B$

stb.

12 év után:

$$A\cdot 1{,}055^{12}+B\cdot 1{,}055^{11}+B\cdot 1{,}055^{10}+B\cdot 1{,}055^{9}+.......+B\cdot 1{,}055+B.$$

Ez egy 13 tagú összeg. A *B*-t tartalmazó 12 tag egy mértani sorozat összege, amelynek első tagja *B*, hányadosa pedig 1,055. Tehát az összeg

$$A\cdot 1{,}055^{12}+B\cdot(1+1{,}055+1{,}055^2+......+1{,}055^{11})=A\cdot 1{,}055^{12}+B\cdot\frac{1{,}055^{12}-1}{1{,}055-1}.$$

A konkrét összegekkel:

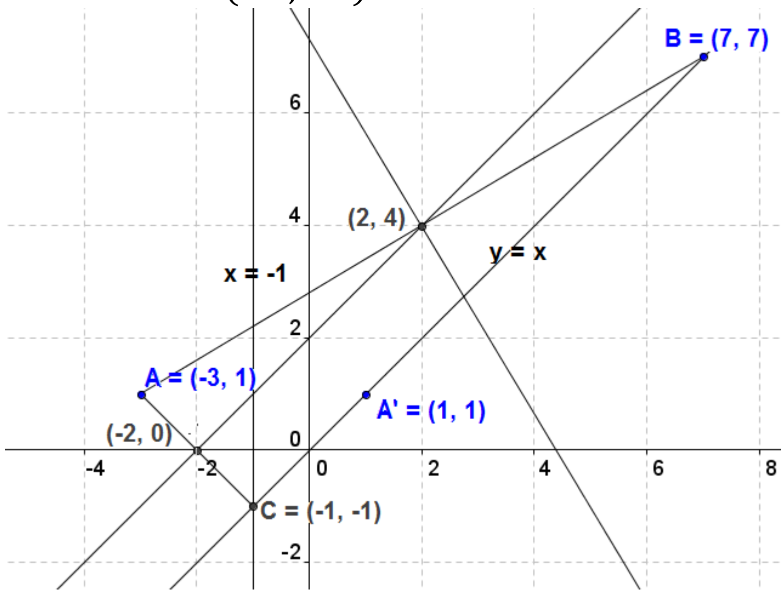
$$200000\cdot 1{,}055^{12}+30000\cdot\frac{1{,}055^{12}-1}{0{,}055}\approx 380241+491567\approx 871808.$$

Kovács úr fia 18. születésnapján kb. 871 808 Forintot vehet fel a bankból.

**7.** Egy háromszög két csúcspontja $A(-3;1)$ és $B(7;7)$. A háromszög harmadik csúcsán átmenő szögfelező egyenes egyenlete $x = -1$. Írja fel a harmadik csúcs koordinátáit és a háromszög köré írt kör egyenletét. 13 pont

*Megoldás*

Ha egy szög egyik szárán levő pontot tükrözünk a szögfelezőre, akkor a tükörkép a felezett szög másik szárára kerül. Az *A* pont tükörképe az $x=-1$ szögfelezőre az *A*'(1;1) pont. A háromszög *C* csúcsa a *BA*' oldalegyenes és az $x=-1$ szögfelező egyenes metszéspontja. A *BA*' egyenes egyenlete: $x=y$, tehát a *C* csúcs koordinátái $C(-1;-1)$.




Az *AB* szakasz felezőpontja (2;4), az *AB* szakaszfelező merőlegesének egyenlete $5x + 3y = 22$. Az *AC* szakasz felezőpontja (-2; 0), az *AC* szakaszfelező merőlegesének egyenlete $x - y = -2$. A két felezőmerőleges metszéspontja a (2, 4) pont, ez a háromszög köré írt kör középpontja.

A kör sugara a (2, 4) felezőpont és a $C(-1;-1)$ csúcs távolsága, $\sqrt{34}$.

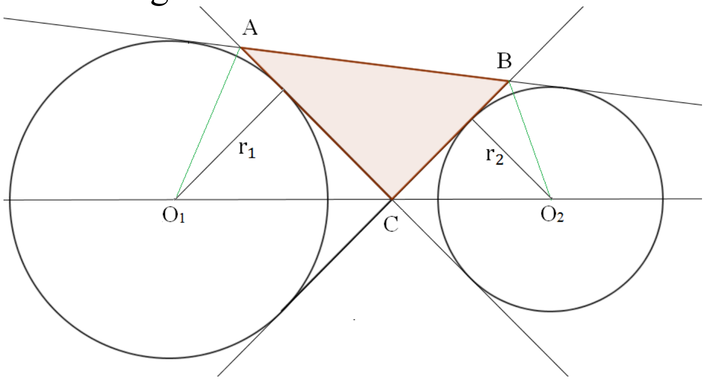
Az *ABC* háromszög köré írt kör egyenlete $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 34$.

*Megjegyzés:* Az *AC* és *BC* oldalak merőlegesek egymásra, így a köré írt kör középpontja *AB* felezőpontja, sugara *AB* fele.

**8.** Adott két olyan kör, amelyeknek a közös belső érintőik merőlegesek egymásra. Tekintsük azt a derékszögű háromszöget, amelynek derékszögű csúcsa a két belső érintő metszéspontja, befogói a belső érintőkre, az átfogója pedig az egyik külső érintőre illeszkedik. Bizonyítsa be, hogy ennek a derékszögű háromszögnek a területe megegyezik a körök sugarainak szorzatával. 15 pont

*Megoldás*

A körök sugarai $r_1$ és $r_2$, a középpontjaik $O_1$ és $O_2$ és a kérdéses háromszög csúcsai *A*, *B*, *C*, a derékszög *C*-nél van.




Belátható, hogy az $AO_1C$ és az $O_2BC$ háromszögek hasonlók.

(Például a szögek vizsgálatával: ha az *A*-nál levő szög α, akkor az $AO_1C$ szög és az $O_2BC$ szögek nagysága egyaránt $45° + \frac{\alpha}{2}$

A megfelelő oldalak aránya $CA : CO_1 = CO_2 : CB$, ami szorzat alakban $CA \cdot CB = CO_1 \cdot CO_2$.

Tudjuk még, hogy $CO_1 = r_1 \cdot \sqrt{2}$ és $CO_2 = r_2 \cdot \sqrt{2}$.

Ezekből $CA \cdot CB = CO_1 \cdot CO_2 = r_1 \cdot \sqrt{2} \cdot r_2 \cdot \sqrt{2} = 2r_1r_2$,

amit a terület $T = \frac{CA \cdot CB}{2}$ képletébe beírva

$$T = \frac{CA \cdot CB}{2} = \frac{2\mathrm{r}_1\mathrm{r}_2}{2} = \mathrm{r}_1\mathrm{r}_2.$$

*Megjegyzés:* Többféle megoldás lehetséges.