Matematika szintfelmérő 2015. szeptember fizika BSC

1. Budapestről reggel 8-kor elindult egy személyvonat 40 km/h átlagsebességgel. Egy gyorsvonat 8 óra 20 perckor indult el (ugyanazon az úton haladva) 60 km/h átlagsebességgel. Mennyi idő múlva lesz a két vonat között a távolság 10 km? 10 pont

Megoldás: *5 pont*

Két esetet kell vizsgálnunk: amikor a gyorsvonat még a személyvonat mögött halad, és így lesz a távolság közöttük 10 km, illetve, amikor a gyorsvonat már megelőzte a személyvonatot, és így lesz a távolság közöttük 10 km

Ha a személyvonat indulása után t idővel lesz először a távolság közöttük 10 km, akkor a személyvonat által megtett út $40t$, a gyorsvonat által megtett út $60\left(t-\frac{1}{3}\right)$. Ezek szerint $40t-10=60t-20$, azaz $20t=10$, ahonnan $t=0{,}5$ óra. Az A két vonat közötti távolság fél 9-kor lesz először 10 km.

Ha a gyorsvonat már elhagyta a személyvonatot, vagyis a személyvonat a gyorsvonat mögött lesz 10 km-re, akkor t*-gal jelölve a személyvonat menetidejét $40t^*+10=60t^*-20$, azaz $20t^*=30$, ahonnan $t^*=1{,}5$ óra. A két vonat közötti távolság fél 10-kor lesz másodszor 10 km. *5 pont*

2. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: 12 pont

$$\mathrm{tg}^2 x + 4\sin^2 x - 3 = 0.$$

Megoldás

A $\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}$ azonosság behelyettesítése után az egyenlet alakja

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 4\sin^2 x - 3 = 0.$$

Ha $\cos x \neq 0$, akkor az eredetivel ekvivalens egyenletet kapunk, ha mindkét oldalt szorozzuk a tört nevezőjével

$$\sin^2 x + 4\sin^2 x\cos^2 x - 3\cos^2 x = 0.$$

A $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosság felhasználásával

$$4\sin^2 x\cos^2 x - 4\cos^2 x + 1 = 0.$$

Kiemelés után

$$4\cos^2 x(\sin^2 x - 1) + 1 = 0.$$

Az $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ azonosság felhasználásával és rendezés után

$$4\cos^4 x = 1.$$

Ebből $\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, (nem nulla), azaz $x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ az egyenlet gyökei.

3. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán: 12 pont

$$\lg x - 3 = \lg y^2,$$

$$\lg x^5 - 4 = \lg \frac{1}{y}.$$

Megoldás

Mivel x és y is csak pozitív lehet, a hatvány logaritmusára vonatkozó azonosság alapján az első egyenletből $\lg x = 2\lg y + 3$, a második egyenletből $5\lg x + \lg y = 4$ adódik. A $\lg x$-re kapott kifejezést beírjuk az utóbbi egyenletbe:

$5(2\lg y + 3) + \lg y = 4$, azaz $11\lg y = -11$, vagyis $\lg y = -1$, ahonnan $y = \frac{1}{10}$.

Ezt visszaírjuk a $\lg x$-re kapott kifejezésbe: $\lg x = -2 + 3 = 1$, ahonnan $x = 10$.

Az egyenletrendszer megoldása tehát az $x = 10,\ y = \frac{1}{10}$ számpár.

4. Adottak a valós számok halmazán értelmezett f és g függvények: 12 pont

$$f(x) = \frac{1}{3}x + 2, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}.$$

Ábrázolja a két függvényt és oldja meg az $f(x) \geq g(x)$ egyenlőtlenséget!

Megoldás

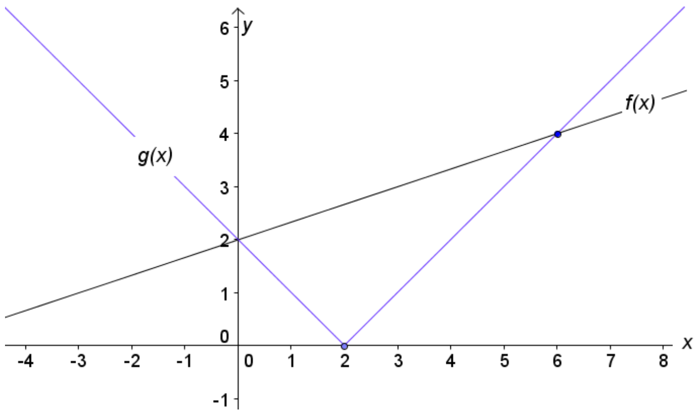
Vegyük észre, hogy a négyzetgyökjel alatt teljes négyzet van, így

$$g(x) = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|,$$

vagyis az

$$\frac{1}{3}x + 2 \geq |x-2|$$

egyenlőtlenséget kell megoldani.



Ha $x \geq 2$, akkor $\frac{1}{3}x + 2 \geq x - 2$, azaz $\frac{2}{3}x \leq 4$, ahonnan $2 \leq x \leq 6$.

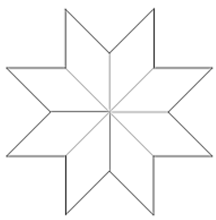
Ha $x < 2$, akkor $\frac{1}{3}x + 2 \geq -x + 2$, azaz $0 \leq x < 2$.

Ezek szerint az $f(x) \geq g(x)$ egyenlőtlenség megoldása $0 \leq x \leq 6$.

5. Egy karácsonyfadísz alakja kúpszerű test. 13 pont

A test alaplapja az ábrán látható.

Ezt a síkidomot nyolc egybevágó, 2 cm oldalú rombuszra lehetne vágni. A test magasságszakasza a középpontban áll és 6 cm hosszú. Mekkora a dísz térfogata?



Megoldás

A rombusz hegyesszöge 45°. Az alaplap területe nyolc ilyen egybevágó rombuszból áll, ezért:

$$T = 8 \cdot 2^2 \cdot \sin 45^{\circ} = 16\sqrt{2}.$$

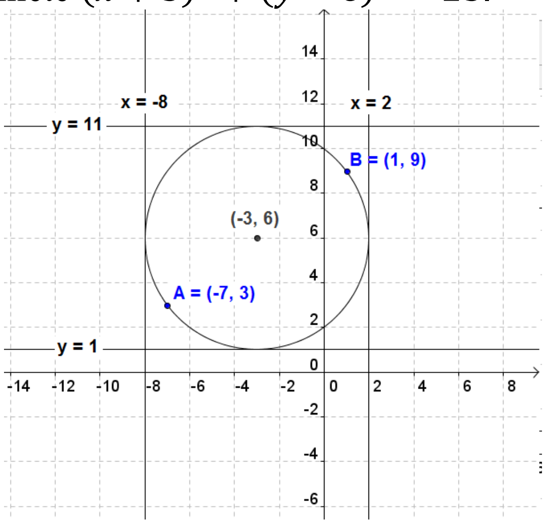
A gúla térfogata a $V = \frac{\text{alapterület}\cdot\text{magasság}}{3}$ képlet alapján

$$V = \frac{16\sqrt{2} \cdot 6}{3} = 32\sqrt{2} \approx 45{,}25.$$

A dísz térfogata kb. 45,25 cm^3.

6. Egy kör egyik átmérőjének végpontjai az $A(-7; 3)$ és a $B(1; 9)$ pontok. Írja fel a kör koordinátatengelyekkel párhuzamos érintőinek egyenletét. 13 pont

A kör középpontja az AB átmérő felezőpontja: $(-3; 6)$, sugara az AB hosszának fele: 5, így a kör egyenlete $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 25$.



A koordinátatengelyekkel párhuzamos érintő egyenlete $y = y_0$, illetve $x = x_0$ alakú, ahol y_0 és x_0 a középpont megfelelő koordinátájánál 5-tel kisebb, illetve nagyobb. Az érintők egyenletei így $y = 11$, $y = 1$, $x = 2$ és $x = -8$.

7. Az egyik játékban egy dobókockával dobunk. Ha a dobott szám páratlan és nem osztható hárommal, akkor nyerünk. A másik játékban egy pakli (32 lapos) magyar kártyából húzunk. Ha a húzott lap tök vagy ász, akkor nyerünk. Melyik játék kedvezőbb számunkra? 14 pont

Megoldás

A klasszikus modellt alkalmazzuk, minden dobás és húzás valószínűségét egyenlőnek tekintjük.

Legyen az A esemény, hogy a dobókockával páratlan, hárommal nem osztható számot dobunk. Ebben az esetben az összes esetek száma 6, a kedvező esetek száma pedig 2 (az 1, 5 számok a nyerők). Vagyis: $p(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333.$

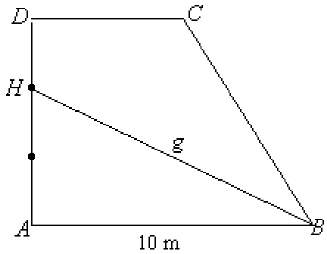
Legyen a B esemény, hogy a pakliból tök vagy ász lapot húzunk. Bármelyik lapot húzhatjuk, ezért az összes esetek száma 32, a kedvező esetek száma pedig 11. (A 32 lapból jó nekünk a nyolc tök lap, amelyben benne van a tök ász is, továbbá még három ász is megfelelő.) Vagyis: $p(B) = \frac{11}{32} \approx 0{,}344.$

Mivel $p(B) > p(A)$, ezért a második játékot kedvezőbb játszani.

8. Egy tetőtér derékszögű trapéz alakú keresztmetszetét látjuk az ábrán. A hosszabbik párhuzamos oldal 10 m. Egy *g* gerenda a *B* csúcsnál levő 60°-os szöget felezi, és az *AD* merőleges szár *D*-hez közelebbi *H* harmadoló pontjában támaszkodik a falnak. 14 pont

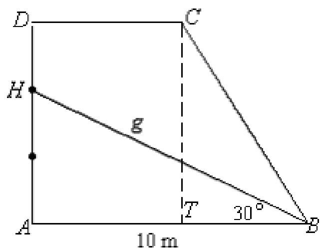
a) Milyen magas a tetőszerkezet?

b) Mekkora a keresztmetszet területe?



Megoldás

a) Az *ABH* háromszögben $\mathrm{tg}30° = \frac{HA}{10}$, ahonnan



$$HA = 10 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}.$$

A trapéz magassága a *HA* szakasz másfélszerese:

$$m = AD = \frac{3}{2} \cdot \frac{10}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66\,\mathrm{m}.$$

b) A trapéz területét az $\frac{alapok\,összege}{2} \cdot magasság$ képlettel számoljuk, ehhez szükségünk van a *DC* oldal hosszára. A *CTB* derékszögű háromszögben

$$\mathrm{tg}60° = \frac{CT}{TB} = \frac{AD}{TB} = \frac{5\sqrt{3}}{TB}, \text{ ahonnan } TB = \frac{5\sqrt{3}}{\mathrm{tg}60°} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 5\,\mathrm{m}.$$

Ezek szerint $DC = 10 - 5 = 5$. Ezzel a trapéz területe:

$$T_{ABCD} = \frac{(10+5) \cdot 5\sqrt{3}}{2} = 37{,}5\sqrt{3} \approx 64{,}95\,\mathrm{m}^2.$$

A szögfüggvények alkalmazása nélkül, elemi geometriai eszközökkel is bizonyítható, hogy a DC oldal pontosan a fele az AB oldalnak. (A g szögfelező a CT oldalt a T-hez közelebbi harmadoló pontban metszi.)