Matematika szintfelmérő 2013. szeptember   matematika tanárszak MO

1. Egy dobozban piros, kék és zöld színű golyók vannak. A dobozból legalább 12 golyót kell kivenni, hogy biztosan legyen a kivett golyók közt piros színű, és legalább 17–et, hogy a kivettek közt biztosan legyen piros is és zöld is. Tudjuk továbbá, hogy legalább 7 golyót kell kivennünk ahhoz, hogy biztosan legyen köztük olyan, ami nem kék. Legalább hány golyót kell kivenni, ha azt szeretnénk, hogy a kivett golyók között legalább 2 zöld legyen? 10 pont

Megoldás

Mivel legalább 12 golyót kell kivenni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük piros színű, ezért a nem pirosak száma 11.
Legalább 7 golyót kell kivenni ahhoz, hogy legyen nem kék, tehát a kékek száma 6, így a korábban kapott eredményből a zöldek száma 5.
Legalább 17 golyót kivéve lesz piros is és zöld is, tehát az összes kékek és pirosak vagy az összes kékek és zöldek száma 16.
A kékek és zöldek száma együtt 11, tehát csak az lehet, hogy az összes kékek és pirosak száma 16, azaz 10 piros golyó van a dobozban.
Tehát ha azt szeretnénk, hogy a kivett golyók között biztosan legyen legalább 2 zöld, ki kell venni legalább 10+6+2= 18 golyót.

2. Számítsa ki a következő kifejezések pontos számértékét:

a) $0{,}01^{1-\lg 7}$ 4 pont

Megoldás

0,49

b) $\sqrt[2013]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4026]{5+2\sqrt{6}}$ 7 pont

Megoldás

$\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$ (1 pont)

$$\sqrt[2013]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4026]{5+2\sqrt{6}}=\sqrt[4026]{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt[4026]{5+2\sqrt{6}}$$
$$=\sqrt[4026]{25-24}=1$$

(6 pont)

3. Egy háromszög két szöge 62° és 44°. Mekkora szögben látszanak az oldalak

a) a beírt kör középpontjából, 5 pont

Megoldás

127º, 121º, 112º

b) a magasságpontból, 5 pont

Megoldás

106^o, 118^o, 136^o

c) a köré írt kör középpontjából? 5 pont

Megoldás

148^o, 124^o, 88^o

(Ha látszik, hogy elvileg jól határozta meg a keresett szögeket, számolási hibákért 1– 2 pontot kell levonni.)

4. Egy rombusz egyik átlója a másik átlójának a kétszerese. A rövidebbik átló végpontjai: *A*(6; –4) és *C*(–2;6). Határozza meg a hiányzó csúcsok koordinátáit! 12 pont

Megoldás

A rombusz középpontja K(2;1).
A KA vektor (4; – 5), ezt elforgatjuk 90^o – kal: (5;4) ,
2 – szeresére nagyítjuk: (10;8) és a kezdőpontját a K pontba toljuk, akkor a végpontja (12;9) , ez a rombusz harmadik csúcsa C,
tükrözzük K-ra (– 8; – 7), ez a negyedik csúcs (D).

5. Oldja meg a következő egyenletet és egyenlőtlenséget a valós számok körében:

a) $\sqrt{8-x^2}=-x$ 5 pont

Megoldás

Nyílván $x \leq 0$ és $|x| \leq \sqrt{8}$
A négyzetre emelés és a rendezés utáni másodfokú egyenlet $x^2=4$, a kikötéseknek csak a –2 felel meg és az gyöke az egyenletnek.

b) $\frac{1}{2}\lg 2x \geq \lg(3-x)-\lg\sqrt{x+1}$ 8 pont

Megoldás

Az értelmezési tartomány: $0<x<3$ (1 pont)
A logaritmus azonosságai alapján: $\lg\sqrt{2x} \geq \lg\frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$. (2 pont)
A logaritmus szigorúan monoton növő, ezért: $\sqrt{2x} \geq \frac{3-x}{\sqrt{x+1}}$.
Az értelmezési tartományon mindkét oldal nem negatív, tehát négyzetre emelhetünk.

$2x \geq \frac{(3-x)^2}{x+1}$ (2 pont)

Rendezés után a másodfokú egyenlőtlenség:

$x^2+8x-9 \geq 0$ ebből $x \geq 1$ vagy $x \leq -9$

Az értelmezési tartomány szerint a megoldás $1 \leq x < 3$.
1-nél valóban egyenlőség van. (3 pont)

6. Egy számtani sorozat harmadik eleme 15, a nyolcadik eleme 30. Mely *n* természetes számra igaz, hogy a sorozat első *n* elemének összege éppen 264? 10 pont

Megoldás
A szokásos jelöléseket használva $a_3 = a_1 + 2d = 15$ és $a_8 = a_1 + 7d = 30$
Az egyenletrendszert megoldva d=3 és $a_1 = 9$
Az összegképletet is alkalmazva n=11

7. Határozza meg azokat a pozitív egész számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet: 14 pont

$$xy^2 + 2xy + x - 243y = 0$$

Megoldás
Átrendezve és x-et kiemelve $x(y^2 + 2y + 1) = 243y$.
$243=3^5$ és a baloldalon az egyik tényező teljes négyzet. $x(y+1)^2 = 3^5y$
Az y és $(y+1)^2$ relatív prímek, ezért a lehetséges megoldások:
$(y+1)^2 = 3^4 = 81$ és $x = 3y$ azaz y=8 és x=24 vagy
$(y+1)^2 = 3^2 = 9$ és $x = 3^3y$, azaz y=2 és x= 54
(Ha találgatással kap eredményt és nem ellenőrzi, hogy lehet-e más, 5 – 6 pontot kaphat)

8. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egymást követő 3-nál nagyobb egész számok. Bizonyítsa be, hogy a középső nagyságú oldalhoz húzott magasság olyan részekre osztja ezt az oldalt, amelyek különbsége 4 hosszegység! 15 pont

Megoldás
Az oldalak: n, n+1, n+2.
A középső az n+1, a hozzátartozó magasság m az oldalt x és y hosszmértékű részekre vágja.
A Pitagorasz tétel alapján felírható két egyenlet:
$n^2 = m^2 + x^2$ és $(n+2)^2 = m^2 + y^2$
A két egyenletből az m^2 –et kiküszöböljük, a következő egyenletet kapjuk:
$(n+2)^2 - n^2 = y^2 - x^2$
Mindkét oldalt szorzattá alakítva
$2(2n+2) = (y-x)(y+x)$
Az y+x= n+1, ezzel oszthatunk, ebből

$$y - x = 4.$$