Matematika szintfelmérő 2013. szeptember Matematika BSC MO

1. A lakásom és az iskola közötti utat tízszer gyorsabban teszem meg autóval, mint gyalog. Ha ennek az útnak az egyharmadát gyalog, a többit pedig autóval tenném meg, akkor ehhez 24 percre volna szükségem. Az út hányad részét tettem meg gyalog, ha 9 perccel hosszabb ideig utaztam, mintha csak autóval utaztam volna?

(11 pont)

Megoldás

Mivel az autó 10-szer olyan gyors, mint a gyalogos, ezért a gyalogos az út egyharmadát az autó kétharmadhoz szükséges idejének ötszöröse alatt teszi meg.
Az egész idő 24 perc, a gyalogos ideje 20 perc, az autó ideje 4 perc.
Ennek alapján a gyalogosnak 60 percre, az autónak 6 percre van szüksége az egész út megtételéhez.
1 perc alatt a gyalogos 1/60 , az autó 1/6 részét teszi meg az útnak.
A harmadik feltételt figyelembe véve felírhatjuk a következő egyenletet:

$$\frac{x}{60}+\frac{15-x}{6}=1,$$

ahol az x jelenti a gyalogos idejét percben.
Az egyenlet megoldása $x=10$.
A gyalogos tehát 10 percig haladt, ez alatt megtette az út 1/6-od részét, az autónak maradt az 5/6 rész, amit 5 perc alatt tett meg. Így az egész idő valóban 9 perccel hosszabb, mint az autós saját 6 perces ideje.

(Természetesen többféleképpen megoldható, akár egyenlet nélkül is vagy grafikusan).

2. Határozzuk meg az $x^2 + y^2 = x$, $2xy = y$ egyenletrendszer összes megoldását.
(KÖMAL 1999 október C. 551. Javasolta: Fried Ervin, Budapest)

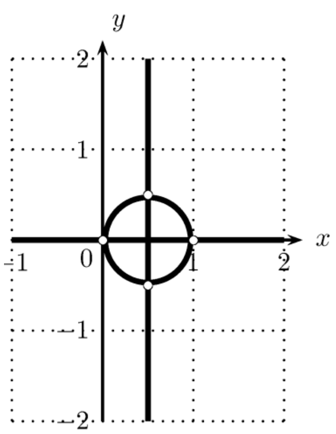
(11 pont)

I. Megoldás

A 2. egyenletet átrendezve $(2x-1)y = 0$ adódik,
vagyis $x = 1/2$ vagy $y = 0$ kell, hogy teljesüljön.
Ezt az 1. egyenletbe beírva, az első esetben $y^2 = 1/4$,
a második esetben $x^2 = x$, $x(x-1) = 0$ adódik.
Mindkét egyenletnek egyszerre tehát csak a következő 4 számpár tehet eleget:
$x_1 = 1/2$, $y_1 = 1/2$,
$x_2 = 1/2$, $y_2 = -1/2$,
$x_3 = 0$, $y_3 = 0$,
$x_4 = 1$, $y_4 = 0$,
melyek mindegyike valóban az egyenletrendszer megoldása.

II. Megoldás

Az egyenletrendszert $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2, \quad y\cdot(2x-1)=0$ alakjából leolvasható, hogy egy kör és egy egyenespár metszéspontjairól van szó (lásd a mellékelt ábrát) és a metszéspontok is leolvashatók.



3. Oldja meg a a következő egyenleteket és egyenlőtlenséget a valós számok halmazán

a) $\sqrt{x^2 - 4x + 4} = x - 2$ (3 pont)

Megoldás

$|x - 2| = x - 2$, ebből $x \geq 2$

b) $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (6 pont)

Megoldás

$2\sin x\cos x = \sin 2x = \sqrt{3} > 1$, tehát nincs megoldás

(A kétszeres szög képlet nélkül is megoldható, kicsit több számolással másodfokú egyenletre vezethet, ahol a diszkrimináns negatív.)

c) $\lg(x^2 - 1) = \lg(x + 1) + \lg(x - 1)$ (3 pont)

Megoldás

$x > 1$

d) $1 < 2^{x^2-5x+6} < 16$ (10 pont)

Megoldás

Egyszerre kell, hogy teljesüljön:

$0 < x^2 - 5x + 6$ és $x^2 - 5x + 6 < 4$ [3 pont]

$0 < x^2 - 5x + 6$, ebből $x > 3$ vagy $x < 2$ és

$x^2 - 5x + 6 < 4$,

ebből $\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ kb $0{,}43 < x < 4{,}56$ [5 pont]

Tehát a megoldás $\frac{5-\sqrt{17}}{2} < x < 2$ vagy $3 < x < \frac{5+\sqrt{17}}{2}$ [2 pont]

4. Mennyi a következő szám pontos értéke $2\sin\frac{19\pi}{3} - 2^{\log_4 3}$?

(6 pont)

Megoldás

$$2\sin\frac{\pi}{3} - \sqrt{4^{\log_4 3}} = \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

5. Adott az e egyenes, egyenlete: 2x+y=3 és a P(7;4) pont. Írjuk fel a P középpontú körök közül annak az egyenletét, amelyből az e egyenes éppen a kör kerületének 25%-át vágja le!

(12 pont)

I. Megoldás

Ha az e egyenes éppen a kör kerületének 25%-át vágja le, akkor az egyenesből kimetszett húr a P pontból 90º alatt látszik.

A P pontból merőlegest állítunk az egyenesre, ennek egyenlete: 2y-x=1,

a metszéspont F(1;1).

Az FP(6;3) vektort 90º-kal mindkét irányba elforgatva

és a kezdőpontot az F(1;1). pontba tolva, megkapjuk az e egyenes és a keresett kör közös pontjait:

A(4;-5) és B(-2;7).

Ezek távolságát a P-től Pitagorasz tétellel meghatározva kapjuk, hogy $r = \sqrt{90}$.

Tehát a keresett kör egyenlete $(x-7)^2 + (y-4)^2 = 90$

Az A, B és a P pont valóban derékszögű háromszöget alkotnak, P-nél van a derékszög.

(Ha látszik, hogy elvileg jól határozta meg a keresett adatokat, számolási hibákért 2– 4 pontot kell levonni.)

II. Megoldás (csak a számolásra)

A P pont és az egyenes távolsága: $\frac{2\cdot 7+4-3}{\sqrt{2^2+1^2}} = 3\sqrt{5}$, így a kör sugara $3\sqrt{10}$,

amiből adódik az egyenlet.

6. Egy urnában 10 golyó van, amelyekre az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok vannak felírva, mindegyik golyón egy szám. Az urnából egymás után háromszor húzunk egy-egy golyót, leolvassuk a számot, és a golyót minden húzás után visszatesszük. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a kihúzott három szám szorzata összetett szám lesz?

(12 pont)

Megoldás

Mindegyik húzásnál egyforma eséllyel húzhatjuk bármelyik számot a tíz közül.

Tehát az összes lehetséges eset száma 10^3.

Összeszámoljuk, hogy hány esetben nem kapunk összetett számot:

	húzások			szorzat	esetek száma	
	1	1	1	1	1	nem összetett
	1	1	2	2	3	prímszám
	1	1	3	3	3	prímszám
	1	1	5	5	3	prímszám
	1	1	7	7	3	prímszám
összesen					13	nem összetett

Minden más húzás sorozatban a számok szorzata összetett szám lesz.

Tehát a keresett esemény valószínűsége $1-\frac{13}{1000}=0{,}987$

7. Mi lehet a hányadosa az olyan mértani sorozatnak, amelyben bármely elem a rá következő két elem számtani közepével egyenlő?

(12 pont)

Megoldás

A szokásos jelölésekkel: $a_n = a_1q^{n-1}$.

A középiskolában elfogadott (hányadosra épülő) definíció szerint sem az a_n, sem a q nem lehet 0.

A feladat feltétele: $a_n = \frac{a_{n+1}+a_{n+2}}{2}$ minden pozitív egész n-re.

Az előző képletet behelyettesítve és a_1 -gyel osztva kapjuk: $q^{n-1} = \frac{q^n+q^{n+1}}{2}$.

Oszthatunk q^{n-1}–vel.

Rendezés után a $q^2 + q - 2 = 0$ másodfokú egyenlet gyökei 1 és –2 .

Ha q=1, a sorozat konstans, a_1, ha q=–2, a sorozat tagjai $a_1(-2)^{n-1}$, váltakozó előjelű.

Tehát végtelen sok ilyen sorozat van, az a_1, – et rögzítve két különböző.

(Ha csak a konstans sorozatot találja meg 3 pont)

8. Egy háromszög oldalainak mérőszámai egymást követő 3-nál nagyobb egész számok. Bizonyítsa be, hogy a háromszög hegyesszögű!

(14 pont)

Megoldás

Az oldalak: n, n+1, n+2.

A leghosszabb oldalra felírjuk a koszinusz tételt.

$$(n + 2)^2 = n^2 + (n + 1)^2 - 2n(n + 1)\cos\gamma$$

A zárójeleket felbontjuk és kifejezzük cosγ–t

$$\cos\gamma = \frac{n^2-2n-3}{2n^2+2n} = \frac{(n+1)(n-3)}{2n(n+1)} \quad .$$

Az n a feladat feltétele szerint 3-nál nagyobb pozitív egész. Ezért $\cos\gamma > 0$

Tehát a háromszög legnagyobb szöge hegyesszög.