1. Mennyi az $n^2 + 2n$ szám utolsó előtti számjegye, ha az utolsó számjegye a 4, és az n természetes szám?	12 pont

1. megoldás:

$n^2 + 2n = (n+1)^2 - 1$ *(5 pont)*

Ha a szám utolsó számjegye 4, akkor az $(n+1)^2$ négyzetszám 5-re végződik, *(7 pont)*
de akkor az $(n+1)$ is 5-re végződik.
Ha egy 5-re végződő számot négyzetre emelünk, akkor a négyzetszám 25-re végződik, tehát az utolsó előtti számjegy a 2.

2. megoldás:

Legyen $n = 10a+b$, ekkor $n^2+2n = 100a^2+20a(1+b)+b^2+2b$. *(3 pont)*

A fenti kifejezés végződése csak b^2+2b végződésétől függ, (megvizsgálva b lehetséges végződéseit – mind a 10-et) ez csak akkor végződik 4-re, ha b=4. *(6 pont)*

Ekkor $n^2+2n = 100a^2+20a(1+b)+b^2+2b = 100a^2+100a+24$, aminek utolsó előtti számjegye nyilván 2. *(3 pont)*

2. Egy sorozatot a következő képlettel adunk meg: $a_n = -4 + \log_2(n+1)$, ahol n tetszőleges pozitív egész szám. Hány 2-nél kisebb nemnegatív tagja van a sorozatnak?	13 pont

Megoldás:

A következő egyenlőtlenséget kell megoldani a pozitív egész számok halmazán. *(2 pont)*

$$0 \le -4 + \log_2(n+1) < 2$$

Egyrészt $0 \le -4 + \log_2(n+1)$, azaz $4 \le \log_2(n+1)$, ebből $n+1 \ge 16$, tehát $n \ge 15$. *(5 pont)*

Másrészt $-4 + \log_2(n+1) < 2$, azaz $\log_2(n+1) < 6$, ebből $n+1 < 64$, tehát $n < 63$. *(5 pont)*

Összevetve a két feltételt: $15 \le n < 63$ *(1 pont)*
Tehát összesen 48 megfelelő tagja van a sorozatnak.

3. A derékszögű koordináta rendszer síkjában adott egy négyszög négy csúcsával: *A*(-2;-3), *B*(4;-3), *C*(4;11), *D*(-2;11) és egy kör az egyenletével: $x^2 + y^2 - 20x - 12y + 100 = 0$. Határozza meg annak az egyenesnek az egyenletét, amely felezi a négyszögnek is és a körnek is a területét.	12 pont

Megoldás:

Belátható, hogy a négyszög téglalap. *(2 pont)*

A keresett egyenesnek át kell mennie mind a téglalap, mind a kör középpontján *(4 pont)*

A téglalap középpontja: (1;4), a kör középpontja: (10;6), *(3 pont)*

az ezeken átmenő egyenes egyenlete: $y = \frac{2}{9}x + \frac{34}{9}$ *(3 pont)*

4. Egy autóbuszvonal két végállomása egy lejtős út két végén van. Az alsó végállomásról elindul egy busz felfelé, majd 6 perc elteltével elindul egy másik busz a felső végállomástól lefelé, és az út felénél találkoznak. A lefelé haladó az alsó végállomáson 6 percet várakozik, majd elindul felfelé. Eközben az első busz felér a felső végállomásra, és azonnal visszafordul. A két busz az útnak az alsó végállomástól számított harmadrészénél találkozik. Mekkora a menetidő lefelé és felfelé?	12 pont

Megoldás:

Legyen a menetidő felfelé t_1 és lefelé t_2. Lefelé az út feléhez 6 perccel kevesebb idő kell, mint felfelé, ezért $t_2 = t_1 - 12$. *(2 pont)*

Az indulástól a második találkozásig eltelt időt felírjuk mindkét busz szemszögéből, ezek egyenlők: *(2 pont)*
Egyszer felmegy és a 2/3 részig visszajön: $t_1 + 2t_2/3$

6 perccel később indul, lemegy, 6 percet vár, 1/3 részig felfelé megy: $6 + t_2 + 6 + t_1/3$, azaz *(2 pont)*

$$t_1+\frac{2}{3}t_2=12+t_2+\frac{1}{3}t_1$$

Rendezve: $2t_1-36=t_2$ *(2 pont)*

Összevetve az első egyenlettel: $2t_1-36=t_1-12$ *(2 pont)*

Tehát $t_1 = 24$ és $t_2 = 12$ a lehetséges megoldáspár, a szövegbe behelyettesítve láthatjuk, hogy az is. *(2 pont)*

5. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán: 11 pont

$$\operatorname{ctg} x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2.$$

Megoldás:

A kifejezések akkor értelmesek, ha *(2 pont)*

$\sin x \neq 0$ és $\cos x \neq -1$, tehát $x \neq 0 + k\pi$ és $x \neq (2k+1)\pi,\ k \in Z$

Mivel $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$, beszorzunk $\sin x(1+\cos x)$ -szel: *(5 pont)*

$\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x=2\sin x+2\sin x\cos x,$

felhasználjuk, hogy $\cos^2 x+\sin^2 x=1$, és a jobboldalon kiemelünk $2\sin x - et$:

$\cos x+1=2\sin x(1+\cos x).$

Már kikötöttük, hogy $(1+\cos x)\neq 0$, tehát osztunk vele, kapjuk $\sin x=\frac{1}{2}$. *(2 pont)*

Ez akkor igaz, ha $x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,$ vagy $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in Z$ (és ez nem ütközik a kikötésekkel). *(2 pont)*

6. Péter és Tamás kézilabdázók, szorgalmasan gyakorolják a góllövést. Hogy ne legyen unalmas a gyakorlás, versenyeznek egymással. Péter általában a jobb góllövő, az eddigi tapasztalatok alapján 0,6 valószínűséggel talál be a hálóba, míg Tamás 50% valószínűséggel. Egy játszmában mindegyikük egyszer dob, megállapodnak a dobások sorrendjében először Péter, aztán Tamás dob. Péter nyer, ha ő talál be és Tamás nem, illetve Tamás nyer, ha ő talál és Péter nem. Minden más esetben döntetlen az eredmény. Mennyi a valószínűsége annak, hogy két egymást követő játszma egyikében Péter nyer és a másikban az eredmény döntetlen? 13 pont

Megoldás:

Döntetlen kétféleképpen lehet, vagy mindketten gólt lőnek, vagy egyikük sem talál be. *(4 pont)*
Ennek a valószínűsége: $0{,}6\cdot 05 + 0{,}4\cdot 0{,}5 = 0{,}30 + 0{,}20 = 0{,}50$

Péter nyer, ha az egyik dobásnál gólt lő és ugyanakkor Tamás nem: $0{,}6\cdot 0{,}5 = 0{,}3$ valószínűséggel *(4 pont)*

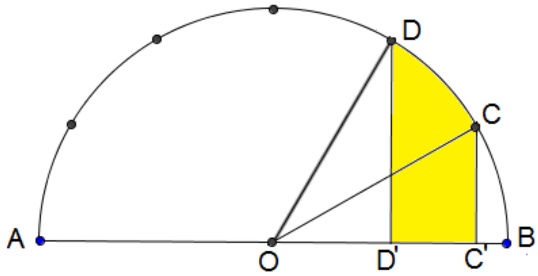
A feladatban vizsgált esemény kétféleképpen következhet be, vagy először nyer Péter és a második döntetlen, vagy fordítva, ennek a valószínűsége: *(5 pont)*
$0{,}30\cdot 0{,}50 + 0{,}50\cdot 0{,}30 = 0{,}15 + 0{,}15 = 0{,}3$
Szóbajöhető egyéb események és valószínűségeik:

két döntetlen: 0,25
egyik döntetlen, másikban Tamás nyer: 0,2
kétszer nyer Péter: 0,09
kétszer nyer Tamás: 0,04
egyikben nyer Péter, a másikban nyer Tamás: 0,12
A valószínűségek összege: 0,3 + 0,25 + 0,2 + 0,09 + 0,04 + 0,12 = 1

7. Egy *AB* szakasz fölé félkört rajzolunk, és a körívet felosztjuk hat egyenlő részre. A *B* végponttól számítva az első osztópont legyen a *C*, a második pedig a *D* pont. Ezekből az osztópontokból merőlegest állítunk az *AB* átmérőre, a talppontok legyenek *C'* és *D'*. A félkör területének hányad része a *CC'*, *C'D'*, *D'D* szakaszok és a *CD* ív által határolt síkidom területe? — 13 pont

Megoldás (az ívvel határolt síkidomra):

A körív *O* középpontját kössük össze a *C* és *D* osztópontokkal.
Az *OCD* körcikk területe hatodrésze a félkör területének.
Belátható, hogy a vizsgált síkidom területe egyenlő a körcikk területével, tehát az is hatoda a félkör területének.
Ehhez felhasználhatjuk, hogy az *OC'C* és az *OD'D* derékszögű háromszögek (átfogójuk és szögeik egyenlősége miatt) egybevágók, tehát a közös részükön kívüli alakzatok egyenlő területűek.



(A teljes megoldás 13 pont, de a célhoz vezető részlépések is pontozhatók értelemszerűen)
A trapézost meg kell oldani.

8. Oldja meg a következő paraméteres egyenletet az egész számok halmazán, ha *p* valós paraméter: — 14 pont

$$\frac{2p+x}{2p-x}=\frac{8p^2-3x}{x^2-4p^2}-\frac{x+p}{2p+x}.$$

Megoldás:

A kifejezések akkor vannak értelmezve, ha $x^2-4p^2\neq 0$, azaz $x\neq\pm 2p$. *(2 pont)*

Ekkor mindkét oldalt a x^2-4p^2 kifejezéssel szorozva *(3 pont)*

$$(2p+x)(2p+x)=3x-8p^2-(x+p)(2p-x)$$

adódik, amelyben a szorzásokat elvégezve

$$4p^2+4px+x^2=3x-8p^2-2px-2p^2+x^2+px$$

és rendezve $14p^2=3x-5px=x(3-5p)$.

Ebből látszik, hogy $p\neq\frac{3}{5}$, hiszen ekkor a baloldal pozitív, a jobboldal pedig 0. *(2 pont)*

Tehát $x=\frac{14p^2}{3-5p}$ alakú az egyenlet gyöke az $x\neq\pm 2p$ és $p\neq\frac{3}{5}$ megszorítások mellett. *(2 pont)*

Az $x\neq\pm 2p$ feltétel azt jelenti, hogy $\frac{14p^2}{3-5p}\neq\pm 2p$. *(2 pont)*

A $\frac{14p^2}{3-5p}=\pm 2p$ egyenlőség $p=0, 14p=6-10p,$ azaz $p=\frac{1}{4}$, valamint $14p=-6+10p,$ azaz $p=\frac{-3}{2}$ esetén teljesülne, ezeket a *p* értékeket tehát ki kell zárni. *(2 pont)*

Összefoglalva: $p \neq \frac{3}{5}$, $p \neq 0$, $p \neq \frac{1}{4}$, $p \neq \frac{-3}{2}$, egyébként $x = \frac{14p^2}{3-5p}$. *(1 pont)*