FIZIKA, FÖLDTUDOMÁNYI, KÖRNYEZETTAN BSC Matematika szintfelmérő 2011. október II. rész MO

1. Egy ember vett két lemezt, majd később eladta azokat egyforma áron. Így az egyiken 20%-ot nyert, a másikon 20%-ot veszített és így összesen 100 Ft-tal kapott kevesebbet, mint amennyiért vette azokat. Mennyiért adta és mennyiért vette a lemezeket? 7 pont

Megoldás

Felírhatunk két egyenletből álló egyenletrendszert:

$$1{,}2x = 0{,}8y$$
$$1{,}2x + 0{,}8y + 100 = x + y$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1000$ és $y = 1500$

Tehát az egyik lemezt 1000Ft-ért, a másikat 1500Ft-ért vette, az eladási ár 1200 Ft.

2. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $\frac{2}{x}\left(\frac{3}{x}-1\right) = 3\left(\frac{3}{x}-1\right)$. 6 pont

Megoldás

Átrendezéssel és kiemeléssel az eredeti egyenlettel ekvivalens szorzatalakot kapunk:

$$\left(\frac{2}{x}-3\right)\left(\frac{3}{x}-1\right) = 0$$

ebből látható, hogy a szorzat $\frac{3}{x}-1=0$ és $\frac{2}{x}-3=0$ esetén nulla, azaz $x = 3$ és $x = \frac{2}{3}$ az egyenlet gyökei.

b) $\sin^2 x + \cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = 7$, ahol $x \in [0{:}\,2\pi]$. 8 pont

Megoldás

Mindkét irányban és többször is alkalmazzuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot.

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 7$$
$$1 + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 7$$
$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 4$$
$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 2$$

Láthatjuk, hogy az egyenlet

$$\mathrm{a} + \frac{1}{\mathrm{a}} = 2$$

alakú, amiből $a = 1$, azaz $\mathrm{tg}^2 x = 1$. Amiből $\mathrm{tg}\, x = \pm 1$. Ennek gyökei a $[0{:}\,2\pi]$ intervallumban

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \qquad x_2 = \frac{3\pi}{4}, \qquad x_3 = \frac{5\pi}{4}, x_4 = \frac{7\pi}{4}$$

3. Ábrázolja derékszögű koordinátarendszerben a sík azon a $P(x;y)$ pontjainak halmazát, amelyek kielégítik az egyenlőtlenséget! (Indoklással)

a) $(x+y)^2 > 9$ 4 pont

Megoldás

$|x+y| > 3$, a keresett ponthalmazt úgy kapjuk, hogy a koordináta-síkból elhagyjuk $y = -x+3$ és a $y = -x-3$ egyenletű egyenesek által határolt sávot (a határral együtt).

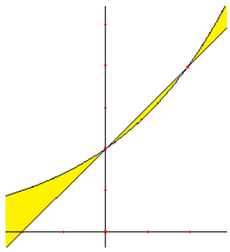
b) $(y-2^x)(y-x-1) \leq 0$. 6 pont

Megoldás

A szorzat akkor nulla, ha $y = 2^x$ és $y = x+1$, azaz az exponenciális függvény és a lineáris függvény grafikonjának pontjaira.

A két grafikon a (0;1) és (1;2) pontokban metszi egymást.

Negatív a kifejezés, ha a tényezők ellenkező előjelűek, tehát az egyik grafikon alatti résznek a másik felettivel alkotott metszetét kell bejelölni és fordítva.



4. Egy nap két turistacsoport ugyanarról a helyről indul és azonos útvonalon halad. Az egyik reggel 5-kor indul, az első órában 5 km-t tesz meg és minden további órában 0,1km-rel kevesebbet az előzőnél. A másik csoport csak reggel 7-kor indul, az első órában 4,5 km-t tesz meg, de a további minden órában 0,2 km-rel többet tesz meg az előzőnél. Utolérné-e még aznap a második csoport az előző csoportot, ha mindkét csoport megállás nélkül haladna? Ha igen mikor, mekkora út után? 9 pont

Megoldás

Az egyik csoport n óra alatt megtett útja:

$$\frac{5+5-0{,}1(n-1)}{2}n$$

A másik csoport *n-2* óra alatt megtett útja:

$$\frac{4,5 + 4,5 + 0,2(n-3)}{2}(n-2).$$

A két kifejezés akkor egyenlő, amikor a második csoport utoléri az elsőt. Az egyenlet megoldása: $n \approx 11,7$. Tehát, ha mindkét csoport megállás nélkül haladna, akkor körülbelül délután háromnegyed 5-kor érné utol a második csoport az előző csoportot. A találkozásig az indulástól kb. 52km-t tesznek meg.

5. Milyen távol vannak az egységnyi élű kocka valamelyik testátlójától a kocka csúcsai? 9 pont

Megoldás

A testátló egy olyan derékszögű háromszög átfogója a kockában, amelynek az egyik befogója egy él, a másik egy lapátló, a keresett távolság ebben a háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság. A háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva

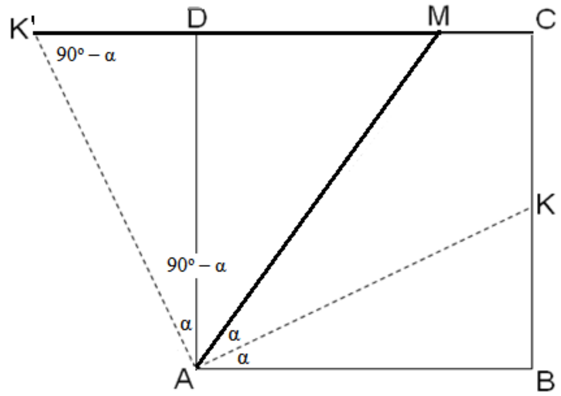
$$m \cdot \sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{2}, \text{ tehát } m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

6. Az *ABCD* négyzet *DC* oldalán vegyünk fel egy tetszőleges *M* pontot. 11 pont

Az *MAB*∠ szögfelezője a *BC* oldalt egy *K* pontban metszi.

Bizonyítsuk be, hogy *AM* = *BK* + *DM*!

Megoldás



1. elemi geometriai

Forgassuk el +90°–kal az *ABK* Δ-et, az *AB* szakasz elforgatottja az *AD* szakasz, a *K* pont elforgatottja *K'* a *CD* oldal meghosszabbítására esik, ezért *K'D*+*DM* = *BK* + *DM*.

Legyen *MAK*∠ = *KAB*∠= *K'AD*∠= α.

De *DAM*∠ = 90° – 2α, így

K'AM∠ = 90° – 2α + α = 90° – α = *MK'A*∠.

Tehát az *MK'A*Δ egyenlőszárú, így *AM* = *K'M* = *BK*+*DM*.

2. trigonometriai számítással

Legyen *MAB*∠ = 2α, ekkor *DAM*∠ = 90° – 2α.

Legyen továbbá *DM* = *x és BK* = *y*. Ekkor az állítás: *AM* = *x*+*y*.

A *KAB* Δ-ben $y = \mathrm{tg}\alpha$ és a *DAM* Δ-ben $x = \mathrm{tg}(90° - 2\alpha)$, ha a négyzet oldalát egységnyinek választjuk.

Ekkor $x + y = \mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}(90° - 2\alpha)$.

Ismeretes, hogy

$$\mathrm{tg}(90° - 2\alpha) = \frac{1}{\mathrm{tg}2\alpha} \text{ és } \mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg} \propto}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Tehát

$$x = \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \propto}{2\mathrm{tg} \propto}.$$

Ebből

$$x + y = \mathrm{tg}\alpha + \frac{1 - \mathrm{tg}^2 \propto}{2\mathrm{tg} \propto} = \frac{1 + \mathrm{tg}^2 \propto}{2\mathrm{tg} \propto}.$$

Másrészt a *DAM* Δ-ben a Pitagorasz tétel alapján $AM^2 = 1^2 + x^2$, azaz

$$AM^2 = 1 + \left(\frac{1 - \mathrm{tg}^2 \propto}{2\mathrm{tg} \propto}\right)^2 = 1 + \frac{1 - 2\mathrm{tg}^2 \propto + \mathrm{tg}^4 \propto}{4\mathrm{tg}^2 \propto} = \frac{1 + 2\mathrm{tg}^2 \propto + \mathrm{tg}^4 \propto}{4\mathrm{tg}^2 \propto}.$$

De ez ugyanaz , mint a $\left(\frac{1+\mathrm{tg}^2\propto}{2\mathrm{tg}\propto}\right)^2$, vagyis $(x+y)^2 = 1 + x^2 = AM^2$, tehát valóban $AM = x + y = DM + BK$.