MAT BSC Matematika szintfelmérő 2011. október II. rész MO

1. Egy ember vett két lemezt, majd később eladta azokat egyforma áron. Így az egyiken 20%-ot nyert, a másikon 20%-ot veszített és így összesen 100 Ft-tal kapott kevesebbet, mint amennyiért vette azokat. Mennyiért adta és mennyiért vette a lemezeket? 7 pont

Megoldás

Felírhatunk két egyenletből álló egyenletrendszert:

$$1{,}2x = 0{,}8y$$
$$1{,}2x + 0{,}8y + 100 = x + y$$

Az egyenletrendszer megoldása: $x = 1000$ és $y = 1500$

Tehát az egyik lemezt 1000Ft-ért, a másikat 1500Ft-ért vette, az eladási ár 1200 Ft.

2. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $2\lg x - \lg(x+1) = \lg 5 - 1.$ 5 pont

Megoldás

A logaritmus azonosságait és a hozzárendelés kölcsönösen egyértelmű voltát felhasználva az $x > 0$ alaphalmazon ekvivalens az

$$2x^2 - x - 1 = 0, \quad \text{azaz} \quad (2x+1)(x-1) = 0.$$

másodfokú egyenlettel. Ennek az alaphalmazba eső egyetlen gyöke $x = 1$.

b) $\frac{2}{x}\left(\frac{3}{x} - 1\right) = 3\left(\frac{3}{x} - 1\right).$ 5 pont

Megoldás

Átrendezéssel és kiemeléssel az eredeti egyenlettel ekvivalens szorzatalakot kapunk:

$$\left(\frac{2}{x} - 3\right)\left(\frac{3}{x} - 1\right) = 0$$

ebből látható, hogy a szorzat $\frac{3}{x} - 1 = 0$ és $\frac{2}{x} - 3 = 0$ esetén nulla, azaz $x = 3$ és $x = \frac{2}{3}$ az egyenlet gyökei.

c) $\sin^2 x + \cos^2 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = 7$, ahol $x \in [0{:}\,2\pi]$. 7 pont

Megoldás

Mindkét irányban és többször is alkalmazzuk a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosságot.

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = 7$$
$$1 + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = 7$$
$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 4$$
$$\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 2$$

Láthatjuk, hogy az egyenlet

$$a + \frac{1}{a} = 2$$

alakú, amiből $a = 1$, azaz $\mathrm{tg}^2 x = 1$. Amiből $\mathrm{tg}\, x = \pm 1$. Ennek gyökei a $[0{:}\,2\pi]$ intervallumban

$$x_1 = \frac{\pi}{4}, \quad x_2 = \frac{3\pi}{4}, \quad x_3 = \frac{5\pi}{4}, x_4 = \frac{7\pi}{4}$$

3. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta síkon azoknak a $P(x;y)$ pontoknak a halmazát, amelyek kielégítik az egyenlőtlenséget. Indoklással!

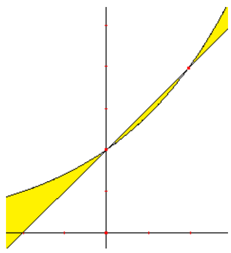
a) $(y - 2^x)(y - x - 1) \leq 0.$ 6 pont

Megoldás

A szorzat akkor nulla, ha $y = 2^x$ és $y = x + 1$, azaz az exponenciális függvény és a lineáris függvény grafikonjának pontjaira.

A két grafikon a (0;1) és (1;2) pontokban metszi egymást.

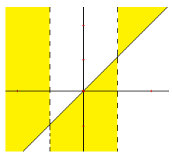
Negatív a kifejezés, ha a tényezők ellenkező előjelűek, tehát az egyik grafikon alatti résznek a másik felettivel alkotott metszetét kell bejelölni és fordítva.



b) $\frac{y-x}{|x|-1} \geq 0.$ 6 pont

Megoldás

Egyenlőség van, ha $y = x$ *és* $x \neq 1, x \neq -1$, tehát a keresett ponthalmazhoz tartoznak az $y = x$ egyenes pontjai, kivéve ahol $x = 1$ *vagy* $x = -1$. Pozitív a kifejezés, ha a nevező és a számláló egyenlő előjelűek. A keresett ponthalmazt tehát a három egyenes ($x = 1, x = -1$ *és az* $y = x$) által létrehozott síkrészek közül azok alkotják, amelyekre teljesülnek a megállapított előjel-feltételek.



4. 20 különböző magasságú embert véletlenszerűen 2 egyenlő csoportba osztunk. Mi a valószínűsége, hogy a két legmagasabb ember ugyanabba a csoportba kerül? 6 pont

I. Megoldás

A legmagasabb embernek 9 társa van, ezeket $\binom{19}{9}$-féleképpen választhatjuk ki a többiek közül. Ha vele van a második legmagasabb is, akkor már csak $\binom{18}{8}$-féleképpen választhatjuk ki a többieket. Tehát a keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{18}{8}}{\binom{19}{9}}=\frac{\frac{18\cdot 17\cdot\ldots\cdot 11}{8!}}{\frac{19\cdot 18\cdot\ldots\cdot 11}{9!}}=\frac{9}{19}.$$

II. Megoldás

Rakjuk sorba az embereket! Első helyre kerüljön a legmagasabb, utána legyenek véletlenszerűen! Az első 10 fogja alkotni az egyik csoportot, a második 10 a másikat. A második legmagasabb ember 19 helyre kerülhet, abból az első 9 a megfelelő, ezért 9/19 a keresett valószínűség.

III. Megoldás

20 embert $\frac{\binom{20}{10}}{2}$-féleképpen oszthatunk két csoportba, hiszen $\binom{20}{10}$-féleképpen választható ki egy csoport, de mindegy, hogy ezt a 10-et vagy a maradék 10-et választjuk ki, ugyanahhoz a beosztáshoz jutunk. Ha a két legmagasabb egy csoportban van, akkor a másik csoportot $\binom{18}{10}$-féleképpen választhatjuk ki, tehát a keresett valószínűség: $\frac{\binom{18}{10}}{\frac{\binom{20}{10}}{2}}=\frac{2\cdot 10\cdot 9}{20\cdot 19}=\frac{9}{19}$.

5. Milyen távol vannak az egységnyi élű kocka valamelyik testátlójától a kocka csúcsai? 8 pont

Megoldás

A testátló egy olyan derékszögű háromszög átfogója a kockában, amelynek az egyik befogója egy él, a másik egy lapátló, a keresett távolság ebben a háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság. A háromszög területének kétszeresét kétféleképpen felírva

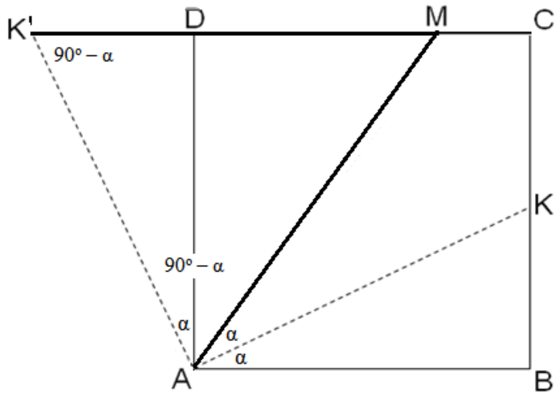
$$m\cdot\sqrt{3}=1\cdot\sqrt{2},\ \text{tehát}\ m=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

6. Az *ABCD* négyzet *DC* oldalán vegyünk fel egy tetszőleges *M* pontot. Az $MAB\angle$ szögfelezője a *BC* oldalt egy *K* pontban metszi. 10 pont

Bizonyítsuk be, hogy $AM = BK + DM$!

Megoldás

1. elemi geometriai



Forgassuk el $+90^\circ$–kal az ABK Δ-et, az *AB* szakasz elforgatottja az *AD* szakasz, a *K* pont elforgatottja *K'* a *CD* oldal meghosszabbítására esik, ezért $K'D+DM = BK + DM$.

Legyen $MAK\angle = KAB\angle = K'AD\angle = \alpha$.

De $DAM\angle = 90^\circ - 2\alpha$, így

$K'AM\angle = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha = MK'A\angle$.

Tehát az $MK'A$Δ egyenlőszárú, így $AM = K'M = BK+DM$.

2. trigonometriai számítással

Legyen $MAB\angle = 2\alpha$, ekkor $DAM\angle = 90^\circ - 2\alpha$.

Legyen továbbá $DM = x$ *és* $BK = y$. Ekkor az állítás: $AM = x+y$.

A *KAB* Δ-ben $y=\operatorname{tg}\alpha$ és a *DAM* Δ-ben $x=\operatorname{tg}(90^\circ-2\alpha)$, ha a négyzet oldalát egységnyinek választjuk.

Ekkor $x+y=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(90^\circ-2\alpha)$.

Ismeretes, hogy $\operatorname{tg}(90^\circ-2\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tg}2\alpha}$ és $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$. Tehát $x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$. Ebből $x+y=\operatorname{tg}\alpha+\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}$.

Másrészt a *DAM* Δ-ben a Pitagorasz tétel alapján $AM^2=1^2+x^2$, azaz

$$AM^2=1+\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)^2=1+\frac{1-2\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{4\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{1+2\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^4\alpha}{4\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

De ez ugyanaz , mint a $\left(\frac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}\right)^2$, vagyis $(x+y)^2=1+x^2=AM^2$, tehát valóban $AM=x+y=DM+BK$.