

## Matematika és fizika BSc matematika szintfelmérő megoldásai 2010. szeptember

1. (8 pont) Egy matematika versenyen három feladatot tűztek ki. Az első feladatot a résztvevők 85 százaléka oldotta meg, a másodikat 80, a harmadikat pedig 75 százaléuk. Állapítsuk meg, hogy a versenyzőknek legalább hány százaléka oldotta meg mind a három feladatot.

### Megoldás

Az első feladatot a résztvevők 15 százaléka nem oldotta meg, a másodikat 20, a harmadikat 25 százaléuk.

Így, a legrosszabb esetben a versenyzőknek legfeljebb a  $15 + 20 + 25 = 60$  százaléka nem boldogult legalább egy feladattal, tehát legalább 40 százaléuk valamennyi feladatot megoldotta.

Az eredmény éles, ha különböző személyek nem oldották meg az egyes feladatokat, akkor pontosan 40 százaléuk oldotta meg valamennyi feladatot.

2. (8 pont) Az  $m$  valós paraméter mely értéke mellett lesz a valós számokon értelmezett  $4x^2 + mx + 1$  kifejezés minden értéke a) pozitív, b) negatív?

### Megoldás

A főgyűrthető pozitív, ezért semmilyen  $m$  esetén nem lesz a  $4x^2 + mx + 1$  kifejezés értéke minden valós  $x$  értékre negatív. A kifejezés minden értéke akkor pozitív, ha a  $D = m^2 - 16$  diszkrimináns negatív, azaz, ha  $|m| < 4$ .

3. (8 pont) Bizonyítsuk be, hogy ha a 121 szám jegyei közé mindkét helyen ugyanannyi nullát írunk (pl. 10201, 1002001 stb.), akkor mindig egy egész szám négyzetét kapjuk.

### Megoldás

Ha  $k$  darab 0-t írunk mindkét helyen, akkor az első 1 után  $2(k+1)$  számjegy áll, tehát a helyiértéke  $10^{2(k+1)}$ , a középső 2 helyiértéke  $10^{k+1}$ , tehát a kapott szám

$$10^{2(k+1)} + 2 \cdot 10^{k+1} + 1 = (10^{k+1} + 1)^2,$$

és ez valóban egy egész szám négyzete,  $k \in \mathbf{N}$ .

4. a) (4 pont) Egy számtani sorozatban  $a_5 = 17$  és  $a_{17} = 5$ . Határozza meg a sorozat differenciáját és a sorozat  $n$ -edik tagját, ha  $n$  tetszőleges pozitív egész szám.
- b) (6 pont) Egy számtani sorozatban  $a_k = l$  és  $a_l = k$ , ahol  $k$  és  $l$  adott, különböző pozitív egész számok. Határozza meg a sorozat differenciáját és a sorozat  $n$ -edik tagját, ha  $n$  tetszőleges pozitív egész szám.

### Megoldás

a)  $a_{17} - a_5 = (17 - 5)d$ , azaz  $5 - 17 = (17 - 5)d$ , amiből  $d = -1$ . Az  $n$ -edik tag  $a_n = a_5 + (n - 5)d = 17 + (n - 5)(-1) = 17 - n + 5$ , tehát  $a_n = 22 - n$ .

b)  $a_k - a_l = (k - l)d = l - k$  tehát

$$d = -1 \quad a_n = a_k + (n - k)d = l - (n - k) = l + k - n.$$

5. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) (8 pont)  $\cos^2 x = \sin 2x + \sin^2 x$

b) (9 pont)  $x^2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$

c) (10 pont)  $(\log_3 3x)^2 = \log_3 \frac{x^3}{3} + 4$ .

### Megoldás

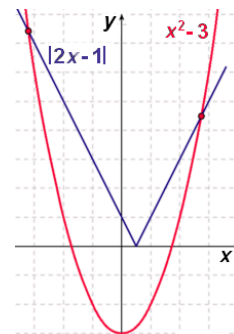
a) 1. változat:  $\cos^2 x = \sin 2x + \sin^2 x$  átrendezve  $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin 2x$ . A  $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$  alapján  $\cos 2x = \sin 2x$ , amiből  $2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ , azaz  $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbf{Z}$ .

2. változat: A  $\sin 2x = 2\sin x \cos x$  azonosság segítségével az egyenlet  $\cos^2 x - \sin^2 x = 2\sin x \cos x$  alakba írható. Mivel  $\cos x$  zérushelyei nem gyökei az egyenletnek, feltehetjük, hogy  $\cos x \neq 0$ , és oszthatjuk az egyenlet mindkét oldalát  $\cos^2 x$ -szel, amiből (rendezés után) a  $\tan^2 x + 2\tan x - 1 = 0$  másodfokúra visszavezethető egyenletet kapjuk. Ennek gyökei  $\tan x = -1 + \sqrt{2}$  és  $\tan x = -1 - \sqrt{2}$ .

Ebből  $x_1 = \arctg(-1 + \sqrt{2}) + k\pi$  és  $x_2 = \arctg(-(1 + \sqrt{2})) + l\pi = -\arctg(1 + \sqrt{2}) + l\pi$ ,  $k, l \in \mathbf{Z}$ .

Aki zsebszámológéppel (túl hamar) használja  $\arctan x = -1 + \sqrt{2} \approx 0.4142$  és  $\arctan x = -1 - \sqrt{2} \approx -2.4142$  közelítést, annak  $x_1 \approx 22,5^\circ + k \cdot 180^\circ$  és  $x_2 \approx -67,5^\circ + l \cdot 180^\circ$ , ahol  $k, l \in \mathbf{Z}$ . Észrevehetjük, hogy a két sorozat összevonható:  $x \approx 22,5^\circ + k \cdot 90^\circ$   $k \in \mathbf{Z}$ , vagy átírhatjuk radiánba, ekkor az 1. változat eredményét kapjuk  $\pi/4 \approx 0.78539$  közelítéssel.

- b)  $x^2 = \sqrt{4x^2 - 4x + 1} + 3$ , a gyökjel alatt teljes négyzet van, ezért  $x^2 - 3 = |2x - 1|$ . A két oldalt ábrázolva két metszéspontot látunk. A pontos értékeket számítással határozzuk meg:  
 $x \geq \frac{1}{2}$  esetén az egyenlet:  $x^2 - 3 = 2x - 1$ , ebből  $x = 1 + \sqrt{3}$  a kikötésnek megfelelő gyök.  
 $x < \frac{1}{2}$  esetén az egyenlet:  $x^2 - 3 = -2x + 1$ , ebből  $x = -1 - \sqrt{5}$  a kikötésnek megfelelő gyök.



- c)  $(\log_3 3x)^2 = \log_3 \frac{x^3}{3} + 4$   
 A logaritmus azonosságai alapján az egyenlet:  $(\log_3 3 + \log_3 x)^2 = 3\log_3 x - \log_3 3 + 4$ .

Új ismeretlent vezetünk be, legyen  $\log_3 x = a$ ,  $x > 0$ , ezzel az egyenlet:  $(1 + a)^2 = 3a + 3$ , azaz  $a^2 - a - 2 = 0$ , amelynek gyökei  $a_1 = 2$  és  $a_2 = -1$ . Ebből

$$x_1 = 9 \text{ és } x_2 = \frac{1}{3}, \text{ és ezek valóban gyökei az eredeti egyenletnek.}$$

6. (11 pont) Melyek azok a  $P(x; y)$  pontok, amelyek koordinátái kielégítik az  $\frac{x^2 - y}{|x| - 1} \geq 0$  egyenlőtlenséget? Ábrázolja a megoldáshalmazt a koordináta-síkon!

**Megoldás**

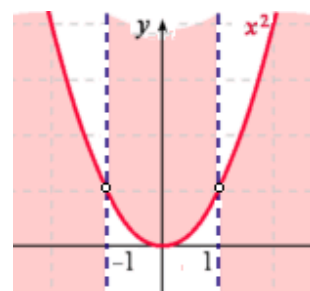
A nevező zérushelyei  $|x| = 1$ , itt a kifejezés nem értelmezett, ezért az  $x = 1$  és  $x = -1$  egyenesek nem tartoznak a megoldáshoz.

Három esetet különböztetünk meg:

Ha a számláló nulla, akkor a nevező tetszőleges nemnulla értéke esetén teljesül az egyenlőtlenség, így az  $y = x^2$  parabola pontjai  $(-1; 1)$  és  $(1; 1)$  kivételével a megoldáshalmaz elemei.

Ha a számláló pozitív, akkor a nevezőnek is pozitívnak kell lennie,  $x^2 - y > 0$  és  $|x| - 1 > 0$ , tehát a parabola alatti pontok és az  $x = 1$  egyenestől jobbra, illetve az  $x = -1$  egyenestől balra eső félsíkok metszete tartozik a megoldáshalmazhoz.

Ha a számláló negatív, akkor a nevezőnek is negatívnak kell lennie,  $x^2 - y < 0$  és  $|x| - 1 < 0$ , tehát a parabola fölötti pontok és az  $x = 1$  és  $x = -1$  egyenesek közti sáv metszete tartozik a megoldáshalmazhoz.

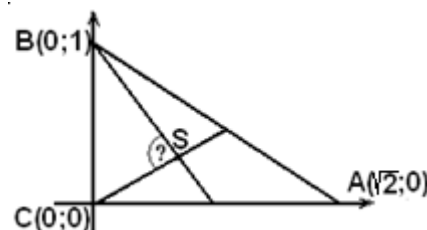


7. (14 pont) Igazoljuk, hogy a kocka egy éle, egy lapátlója és egy testátlója olyan háromszöget határoznak meg, melynek van két merőleges súlyvonala!

**1. Megoldás**

A kocka egy éle, lapátlója és testátlója olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, melyek oldalainak aránya  $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ . Azt kell megmutatni, hogy az ilyen háromszögnek van két merőleges súlyvonala.

Ezt a háromszöget elhelyezzük egy olyan koordináta-rendszerben, melynek befogói a tengelyekre illeszkednek. Ha méretarányos ábrát készítünk, akkor észrevehetjük, hogy (valószínűleg) az átfogóhoz és a  $\sqrt{2}$  oldalhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. A háromszög S súlypontjának koordinátái:



$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

Felírjuk az  $\overrightarrow{SB}$  és  $\overrightarrow{SC}$  vektorokat és kiszámítjuk ezek skaláris szorzatát:

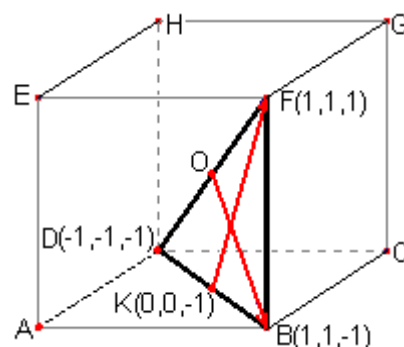
$$\overrightarrow{SB}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad \overrightarrow{SC}\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3}\right), \quad \overrightarrow{SB} \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{2}{9} - \frac{2}{9} = 0.$$

Tehát a két súlyvonal valóban merőleges egymásra.

**Megjegyzés:** Skaláris szorzat helyett a két szakasz egyenesének meredekségéből is megállapítható a merőlegesség, az  $SB$  egyenes meredeksége  $-\sqrt{2}$ , az  $SC$  egyenesé pedig  $1/\sqrt{2}$ , a két meredekség szorzata pedig  $-1$ , azaz merőlegesek az egyenesek.

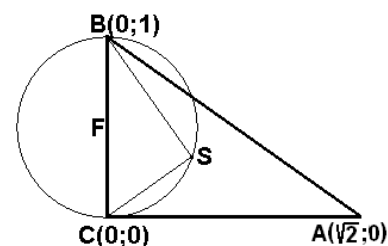
## 2. Megoldás

Egy 2 élhosszúságú  $ABCDEFGH$  kocka középpontja legyen az origó, és élei legyenek párhuzamosak a tengelyekkel. Ebben a kockában például az  $F(1,1,1)$ ,  $B(1,1,-1)$ ,  $D(-1,-1,-1)$  csúcsok egy él-lapátló-testátló háromszöget határoznak meg. A  $DF$  testátló felezőpontja az origó. Így az egyik súlyvonal az origóból a  $B$  csúcsba mutató  $(1,1,-1)$  vektor, a másik a  $DB$  lapátló  $K$  felezőpontjából az  $F$  csúcsba mutató  $(1,1,2)$  vektor. (A harmadik súlyvonal az  $(1,1,0)$  élfelezőpontból a  $D$  csúcsba mutató  $(2,2,0)$  vektor, ezt nem rajzoltuk be.) Az  $(1,1,-1)$  és  $(1,1,2)$  vektorok skaláris szorzata  $1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = 0$ , tehát merőlegesek egymásra.



## 3. Megoldás

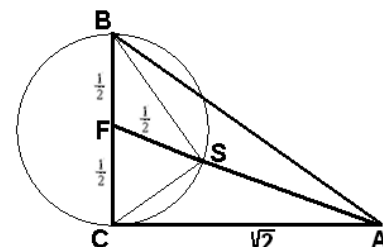
Megmutathatjuk például, hogy a  $BC$  szakasz az  $S$  pontból derékszög alatt látszik, azaz  $S$  rajta van a  $BC$  szakasz Thalész körén. A kör középpontja az  $F(0; \frac{1}{2})$  felezőpont, sugara  $r = \frac{1}{2}$ , egyenlete  $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2$ . Ezen rajta van az  $S(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3})$  pont, hiszen  $2/9 + 1/36 = 9/36 = 1/4$ .



## 4. Megoldás

A feladat többféleképpen megoldható koordináta geometriai módszerek nélkül is.

**4.a** A  $C$ -hez tartozó súlyvonal hossza az átfogó fele, azaz  $\sqrt{3}/2$ , aminek  $CS$  a  $2/3$ -a, tehát  $CS = 1/\sqrt{3}$ . A  $B$ -hez tartozó súlyvonal (pl. a Pitagorasz-tételből)  $\sqrt{3}/\sqrt{2}$ , aminek  $BS$  a  $2/3$ -a, tehát  $BS = \sqrt{2}/\sqrt{3}$ .  $BS^2 + CS^2 = 1/3 + 2/3 = 1$ , tehát az  $SBC$  háromszögben  $S$ -nél derékszög van.



**4.b** Berajzoljuk a harmadik súlyvonalat is, amely  $BC$ -t az  $F$  felezőpontjában metszi. Az  $S$  pont harmadolja ezt a súlyvonalat is.

Az  $FCA$  derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tételből  $AF = \frac{3}{2}$ , így a harmada  $FS = \frac{1}{2}$ , ami azt jelenti, hogy  $S$  rajta van az  $F$  körül írt  $\frac{1}{2}$  sugarú körön, a  $BC$  szakasz Thalész körén. Ebből az következik, hogy az  $SBC$  háromszögben  $S$ -nél derékszög van.

**8. a) (4 pont)** Egy szabályos háromszög mindegyik csúcsában ül egy-egy hangya. Egy adott pillanatban mindegyikük elindul egy véletlenszerűen kiválasztott oldalon, és átmászik rajta a szomszédos csúcsba. A hangyák egyenlő valószínűséggel választják az éleket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két hangya találkozik útközben vagy az út végén?

**b) (10 pont)** Egy tetraéder minden csúcsában ül egy-egy hangya. Egy adott pillanatban mindegyikük elindul egy véletlenszerűen kiválasztott élen, és átmászik rajta a szomszédos csúcsba. A hangyák egyenlő valószínűséggel választják az éleket. Mennyi annak a valószínűsége, hogy két hangya találkozik útközben vagy az út végén?

### **Megoldás**

- a) Egyszerűbb azt kiszámítani, hogy mi a valószínűsége annak, hogy nem találkoznak sem útközben, sem a csúcsokban. Jelölje a háromszög csúcsait  $A$ ,  $B$ ,  $C$ . Az  $A$  csúcsból induló hangya kétféle irányban mehet. Ha a  $B$  csúcsba megy, akkor az onnan induló hangya a  $C$  csúcsba mehet, és a harmadik hangya útiránya már egyértelmű. Tehát 2 lehetőség van arra, hogy a hangyák ne találkozzanak egymással. Az összes útvonal-lehetőség  $2^3 = 8$ , így a keresett valószínűség  $1 - \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$ .
- b) Egyszerűbb azt kiszámítani, hogy mi a valószínűsége annak, hogy nem találkoznak sem útközben, sem a csúcsokban. Jelölje a tetraéder csúcsait  $A$ ,  $B$ ,  $C$  és  $D$ . Az  $A$  csúcsból induló hangya háromféle irányban mehet. Ha a  $B$  csúcsba megy, akkor az onnan induló hangya a  $C$  vagy a  $D$  csúcsba mehet, és a többi hangya útiránya már egyértelmű. Tehát  $3 \cdot 2 = 6$  lehetőség van arra, hogy a hangyák ne találkozzanak egymással.

Az összes útvonal-lehetőség  $3^4 = 81$ , így a keresett valószínűség

$$1 - \frac{6}{81} = \frac{75}{81} \approx 0,9259.$$