Matematika szintfelmérő megoldásai
Földtudományi és környtudományi BSc 2010. szeptember

1. *(8 pont)* Melyik az a szám, amelyet 30-hoz, 50-hez és 80-hoz hozzáadva három olyan számot kapunk, amelyek ebben a sorrendben mértani sorozatot alkotnak?

Megoldás

A számok: $a_1 = 30 + x;\ a_2 = 50 + x;\ a_3 = 80 + x$

A mértani sorozat tulajdonságból:

$$\frac{50 + x}{30 + x} = \frac{80 + x}{50 + x}.$$

Ebből

$$(50 + x)^2 = (30 + x)(80 + x).$$

Az egyenlet megoldása $x = 10$. A kapott számok. $40; 60; 90$.

Ezek valóban mértani sorozatot alkotnak, a kvóciens

$$\frac{60}{40} = \frac{90}{60} = \frac{3}{2}.$$

2. *(8 pont)* A $2x^2 + ax + b = 0$ egyenlet két gyöke 1 és $-\frac{1}{2}$. Határozza meg *a* és *b* értékét!

1. Megoldás

A gyököket az egyenletbe behelyettesítve a

$$2 + a + b = 0$$
$$\frac{1}{2} - \frac{a}{2} + b = 0$$

egyenletrendszerből $a = -1$ és $b = -1$.

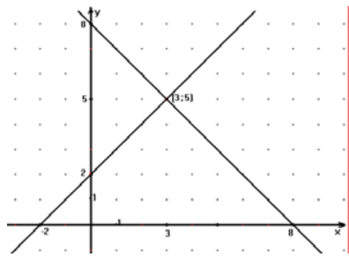
2. Megoldás

A gyökök és együtthatók közötti kapcsolatból

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{2} = \frac{b}{2} \Rightarrow b = -1$$

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2} = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = -1$$

3. *(8 pont)* Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P(3; 5)$ ponton és a koordináta tengelyekből egyenlő (nem nulla hosszúságú) szakaszokat vág le.



Megoldás

Az egyenes meredeksége nyílván 1, vagy – 1, tehát

$$y = (x - 3) + 5 \quad \text{vagy} \quad y = -(x - 3) + 5,$$

azaz

$$y = -x + 8 \quad \text{vagy} \quad y = -x + 8.$$

4. *(8 pont)* Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amellyel 666-ot megszorozva négyzetszámot kapunk eredményül?

Megoldás

$$666 = 2 \cdot 3^2 \cdot 37,$$

tehát $2 \cdot 37 = 74$ a legkisebb pozitív egész szám, amivel meg kell szorozni ahhoz, hogy négyzetszám legyen.

5. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán:

a) $(12\ pont)$ $\log_2(9 - 2^x) = 3 - x$,

b) (12 pont) $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$.

Megoldás

a)

$$\log_2(9 - 2^x) = 3 - x,$$
$$2^{3-x} = 9 - 2^x,$$
$$\frac{8}{2^x} = 9 - 2^x,$$

$$(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 8 = 0,$$

amiből

$$2^x = 1 \text{ vagy } 2^x = 8,$$

tehát

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3$$

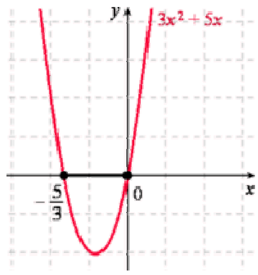
Behelyettesítés vagy utalás az ekvivalens átalakításra.

b)

$$\sin^4 x - \cos^4 x = ½$$
$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = ½$$
$$\cos 2x = -½$$
$$2x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$$
$$x = \pm \pi/3 + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Utalás az ekvivalens átalakításra.

6. *(12 pont)* Oldja meg az $(x + 3)(3x - 4) \le -12$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!



Megoldás

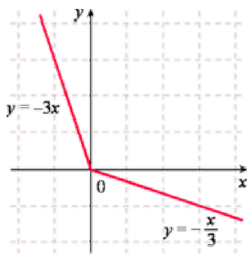
Rendezés után az egyenlőtlenség:

$$3x^2 + 5x \le 0.$$

Ebből

$$-5/3 \le x \le 0.$$

7. *(14 pont)* Melyek azok a $P(x; y)$ pontok, amelyek koordinátái kielégítik a $2(x + y) = |x| + |y|$ egyenletet? Ábrázolja a koordináta-síkon!



Megoldás

Ha $x \ge 0$ és $y \ge 0$, akkor $y = -x$, csak az origó

Ha $x \le 0$ és $y \ge 0$, akkor $y = -3x$, félegyenes

Ha $x \le 0$ és $y \le 0$, akkor $y = -x$, csak az origó

Ha $x \ge 0$ és $y \le 0$, akkor $y = -x/3$, félegyenes.

8. Egy szabályos dobókockát 12-szer feldobva hány százalék az alábbi események valószínűsége?

a) *(8 pont)* Az első 6 dobás között lesz legalább egy 6-os.

b) *(10 pont)* A 12 dobás között lesz legalább két 6-os.

(Az eredményt 2 tizedes pontossággal adja meg!)

Megoldás

a) A lehetséges dobássorozatok száma 6^6.

Ezek között 5^6 olyan eset van, amikor nincs 6-os.

Annak valószínűsége, hogy lesz legalább egy 6-os, $1 - 5^6/6^6$

$$1 - 5^6/6^6 \approx 66{,}51\%.$$

b) A lehetséges dobássorozatok száma 6^{12}.

Ezek közül 5^{12} esetben nincs 6-os, további $12 \cdot 5^{11}$ esetben 1 darab 6-os van.

A keresett valószínűség $1 - 5^{12}/6^{12} - 12 \cdot 5^{11}/6^{12}$, ami közelítőleg

$$1 - 5^{12}/6^{12} - 12 \cdot 5^{11}/6^{12} \approx 61{,}87\%.$$