Matematika felmérő dolgozat 2007. szeptember 3.
ELTE TTK

1. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán

   a.) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_5 8+\log_5(x-2)$ (7 pont)

   b.) $3+4\cos x+\cos 2x=0$ (7 pont)

2. Oldja meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!
   $(x^2-18x+77)\cdot\sqrt{10-x}\geq 0$ (10 pont)

3. Hol helyezkednek el a derékszögű koordináta-rendszer síkjában azok, a pontok, amelyek eleget tesznek a következő egyenlőtlenségnek:

   a.) $|x| \geq |y|$ (7 pont)

   b.) $|x+y|\geq 1$ (7 pont)

4. Egy kockát kétszer feldobunk. Melyik valószínűbb: az, hogy a dobott számok összege páros, vagy pedig az, hogy ez az összeg páratlan? (10 pont)

5. Melyek azok a háromszögek, amelyekben az oldalak mértani, a szögek számtani sorozat egymás után következő elemei. (12 pont)

6. Legyen P az egységnyi oldalhosszúságú négyzet belsejében vagy határán fekvő pont. Milyen határok között változhat a P-től a négyzet négy csúcsáig terjedő távolságok négyzetének összege?
Hol kell P-t kijelölni, hogy ez a négyzetösszeg minimális legyen? (12 pont)

7. Bizonyítsuk be, hogy ha egy pozitív egészekből álló végtelen sok tagú számtani sorozat elemei közt van négyzetszám, akkor végtelen sok van. (13 pont)

8. Egy 6×6 mezőből álló sakktáblát hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedtünk be. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar el. Bizonyítsuk be, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté. (15 pont)

A dolgozat megírására 120 perc áll rendel-kezésre. Ennek során zsebszámológépet használhatsz. Minden egyéb segédeszköz használata tilos! A kijavított dolgozatok megtekinthetők 09.05-én (szerdán) 14h-16h-ig a Déli épület 3.219 szobában

A dolgozatok értékelése: 0-59 pont nem felelt meg 60-84 megfelelt 85-100 kiválóan megfelelt

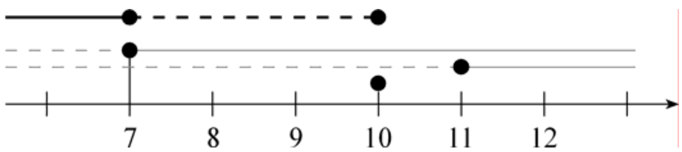
MEGOLDÁS, javítási pontozási segédlet

Alapértelmezésként minden feladatra az arra járó pontszám, annak fele, (néhány helyen harmada, értelemszerűen x-ed része) illetve 0 pont adható. Elszámolás, illetve csekély hiba esetén 1-2 pont levonás jár az adott résznél.
Egyes lehetséges részpontszámokat szemléltet a következő pontozás.

1.a) A logaritmikus azonosságok helyes alkalmazása után az $x^2-8x+15=0$, másodfokú egyenlet vagy azzal ekvivalens alak *4 pont*
Ennek a két megoldása $x_1=3$, $x_2=5$. Mindkettő megoldás, amiről vagy behelyettesítéssel vagy kikötésekkel meg kell győződnie. *3 pont*

b)Átrendezve kapjuk, hogy $2\cos^2 x+4\cos x+2=2(\cos x+1)^2=0$, *eddig 4 pont*
$x=\pi+2k\pi,\;\; k\in\mathbb{Z}$. Ha valaki fokokban adja meg, annak is örüljünk. *még 3 pont*

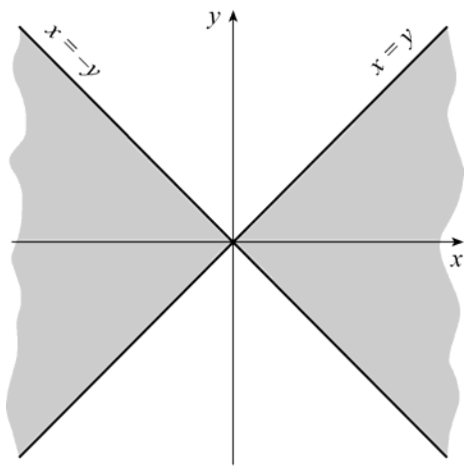
2. Szorzattá alakítva $(x-7)(x-11)\sqrt{10-x}\geq 0$.
Ábrázolgatva mi hol pozitív, illetve értelmes $x\leq 7$



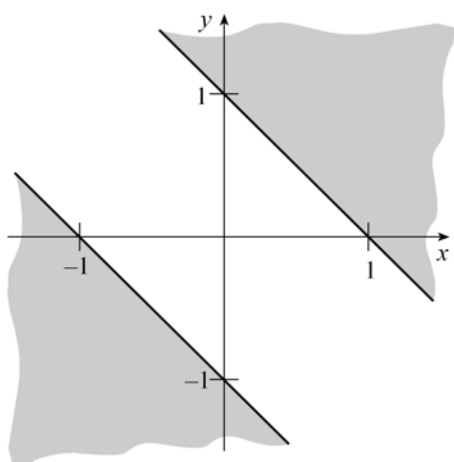
Értelemszerűen az esetleges szorzattá alakítás 2 pont, (ugyanolyan jó, ha valaki parabolaként tekint az első részre, de a gyökökre természetesen akkor is szükség van) az ábrázolás vagy azzal egyenértékű indoklás tényezőnként 2-2 pont, az összesítés és a végső megoldás újabb 2-2 pont.

3. Ábrázoljuk az egyenlőségeket, és a keletkezett tartományokból válasszuk a jókat.

a)



b)



Mindkét résznél az egyenlőségek helyes ábrázolása 3 pont.
Az egyes tartományok kiválasztása indoklással 4 pont.

4. Az első dobás után egyértelmű, hogy a második dobás dönti el a paritást, ami fele-fele eséllyel páros illetve páratlan, tehát $P(\text{összeg páros})=P(\text{összeg páratlan})=1/2$.

Az összes eset felsorolása, vagy logikai indoklás a páros illetve páratlan esetre 3-3 pont, az egyes valószínűségek felírása 2-2 pont.

5. Legyenek a háromszög oldalai 1, q, q^2, ahol feltehetjük, hogy $q \geq 1$.
Ha a háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak, akkor a középső szög 60°. Ez van a q hosszúságú oldallal szemben. Erre felírva a cos tételt

$$q^2 = q^4 + 1 - 2\cdot 1\cdot q^2 \cdot \cos 60°, \text{ rendezve } q^4 - 2q^2 + 1 = (q^2-1)^2 = 0 \Rightarrow q = 1.$$

Azaz a háromszög szabályos.

Ha jól jelöl és indokol, az 4 pont.
A cos tétel felírása és rendezése 4 pont.
A megoldás és annak indoklás 4 pont.

6. Legyen a négyzet középpontja a kordinátarendszer origójában rögzítve, a négyzet négy csúcsa rendre (1/2; 1/2), (1/2; –1/2), (–1/2; 1/2), (–1/2; –1/2). A P pont koordinátái legyenek (x, y), ahol $-1/2 \leq x, y \leq 1/2$. Felírva a távolságok négyzetösszegeit, kapjuk hogy

$$\left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2 =$$
$$= 4x^2 + 4y^2 + 2$$

Figyelembe véve x, y nagyságát $2 \leq 4x^2 + 4y^2 + 2 \leq 4$. A minimumot nyilván $x = y = 0$, azaz a négyzet középpontja esetében, a maximumot pedig $x = \pm 1/2$, $y = \pm 1/2$, azaz a négyzet csúcsaiban veszi fel.

A négyzet értelmes elhelyezése (sokféle lehet) és a távolságok felírása 6 pont.
A minimum és maximum értékek meghatározása 6 pont.

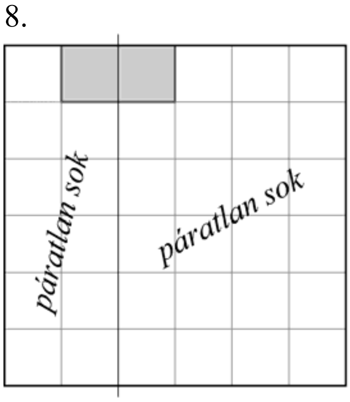
7. Legyen a^2 ,egy tagja a számtani sorozatnak, melynek differenciája d. A feladat szerint a és d pozitív egészek. Nézzük meg az $(a+d)^2$ számot. Átalakítva

$$a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + d(2a+d),$$

ami láthatóan eleme a számtani sorozatnak, hiszen $a^2 + dk$ alakú. Ez a négyzetszám tehát egy másik eleme a számtani sorozatnak, s az eljárást ismételve végtelen sok négyzetszámot találhatunk a sorozatban.

A feladat helyes értelmezése, algebrai felírása 5 pont.
A logikailag helyes indoklás 8 pont.

8.



Bárhogy is teszünk le egy dominót, annak középvonala az ábrának megfelelően két részre vágja a táblát. Ekkor azonban a tábla mindkét fele páratlan sok négyzetet tartalmaz, azaz ha le akarom fedni 1×2-es dominókkal, akkor ugyanazt a középvonalat még egy dominóval le kellene fednem. Összesen 5 vízszintes és 5 függőleges vonalat kell tehát lefednem 2-2 dominóval. Ez 20 dominó lenne, egy táblára azonban csak 18 dominó helyezhető el. Ez nem lehetséges, tehát biztosan van olyan vonal, amelyik nem vág el dominót.

Bármely jó ötlet, amely kecsegtet némi reménnyel 5-5 ponttal jutalmazható.