

Matematika felmérő dolgozat 2007. szeptember 3.
ELTE TTK FÖLDTUDOMÁNYI szakosok részére

1. Egy háztető homlokzata egyenlőszárú háromszög alakú. A háromszög alapja 10 méter, szárai 13 méter hosszúak.
- a) Mekkora a homlokzat felülete? (6 pont)
- b) Mekkora szöget zár be a háztető a vízszintes talajjal? (7 pont)
2. Egy desszert fajtát kétféle, piros vagy kék téglatest alakú dobozba csomagolják az eladók. A piros dobozba 140 dkg tömegű desszert fér. A kék doboz egyik éle másfélszerese a piros doboz megfelelő élének, másik éle pedig 20%-kal nagyobb. (A harmadik él ugyanakkora.) Mennyi desszert fér a kék dobozba? (12 pont)
3. Adja meg az $f(x) = x^2 - 2x$ függvény $[-1; 3]$ intervallumon felvett legkisebb és legnagyobb értékét, és azt is, hogy hol veszi fel ezeket az értékeket! (12 pont)
4. Egy tábla csokit akkor nyerhetünk el, ha két egyformát dobunk. Választhatunk, hogy két kockával dobunk – és akkor nyerünk, ha két egyforma szám „jön ki” -, vagy két pénzérmével dobunk – és akkor nyerünk, ha mindkettő fej, vagy mindkettő írás. Melyiket érdemes választani? Válaszát indokolja! (12 pont)
5. Egy számtani sorozat első húsz elemének az összege 45, az első negyven elem összege pedig 290. Határozza meg a sorozat első elemét és differenciáját. Hány 100-nál kisebb elem van a sorozatnak? (13 pont)
6. Egy háromszög csúcsai a derékszögű koordináta rendszer síkján: A (0; 0), B(5; 0), C(2; 5). Határozza meg a háromszög magasságpontját! (13 pont)
7. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán:
- $$\cos x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \sin x + \sin 2x = \frac{1}{\cos x} \quad (12 \text{ pont})$$
8. Egy 90°-os középponti szögű körcikkből kivágható legnagyobb kör területe hány százaléka a körcikk területének? (13 pont)

A dolgozat megírására 120 perc áll rendelkezésre. Ennek során zsebszámológépet és függvénytáblát használhatsz. Minden egyéb segédeszköz használata tilos!
A kijavított dolgozatok megtekinthetők 09.06-án (csütörtökön) 12h-14h-ig a Déli épület 3.219 szobában

A dolgozatok értékelése:

0-39 pont nem felelt meg
49-79 megfelelt
80-100 kiválóan megfelelt

MEGOLDÁS, javítási pontozási segédlet

Alapértelmezésként minden feladatra az arra járó pontszám, annak fele, (néhány helyen harmada, értelemszerűen x -ed része) illetve 0 pont adható. Elszámolás, illetve csekély hiba esetén 1-2 pont levonás jár az adott résznél.

Egyes lehetséges részpontszámokat szemléltet a következő pontozás.

1. A háromszög magassága $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$. 3 pont

a) A terület tehát $\frac{10 \cdot 12}{2} = 60 \text{ m}^2$. 3 pont

b) $\text{tg } \alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow \alpha = 67,38^\circ$. 7 pont

2. $1,5 \cdot 1,2 \cdot 140 = 252 \text{ dkg}$. 12 pont

3. Az $f(x) = x^2 - 2x$ másodfokú kifejezés minimuma a két gyök között középen azaz az $x = 1$ helyen vétetik fel, $f_{\min} = f(1) = -1$. vagy bármilyen más módon a minimum 5 pont

A $[-1; 3]$ szimmetrikus az $x = 1$ -re, tehát maximuma a két végpontban van.

$f_{\max} = f(-1) = f(2) = 3$. vagy bármilyen más módon a maximumok 7 pont

4. Két kockával dobva a valószínűség $1/6$. bármely helyes indoklás 5 pont

Két érmevel dobva a valószínűség $1/2$. bármely helyes indoklás 5 pont

Nyilván ez utóbbit érdemesebb választani, ha csokit akarunk. 2 pont

$$\begin{aligned} \frac{2a+19d}{2} \cdot 20 &= 45 \\ \frac{2a+39d}{2} \cdot 40 &= 290 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 2a+19d &= 4,5 \\ 2a+39d &= 14,5 \end{aligned} \Rightarrow$$

Helyes egyenletek felírása bármilyen módon 5 pont

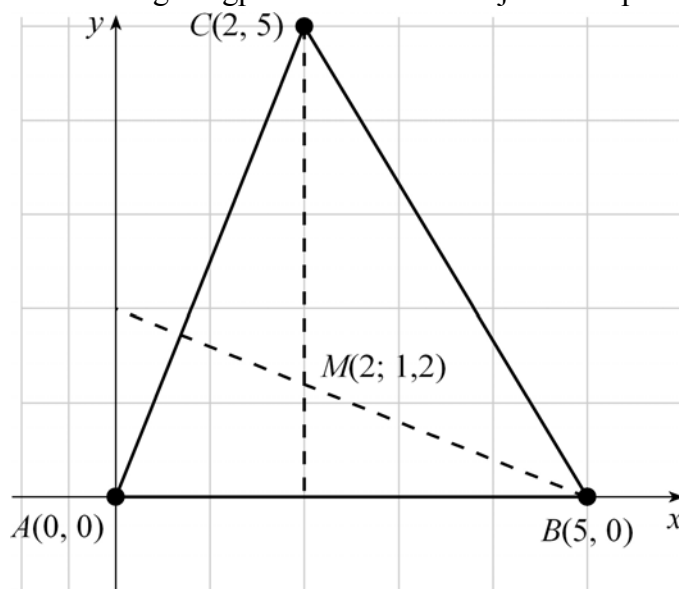
$$d = \frac{1}{2}, \quad a = -\frac{5}{2}$$

A jó a és d meghatározása 4 pont

A sorozat 100-nál kisebb tagjai tehát, $-5/2, -4/2, \dots, 199/2$, ez $5 + 199 = 205$ darab. Itt javítottam, szerintem a 0-t kihagytad

A sorozat tagjainak leszámllálása vagy a keresett n érték meghatározása képletből 4 pont

6. A magasságpont első koordinátája 2. A B ponton áthaladó magasságvonal meredeksége



$$-\frac{2}{5} = -0,4, \text{ tehát az egyenlete}$$

$y = -0,4x + 2$, amely az $x = 2$ helyen éppen 1,2. Tehát

$$M(0,4; 1,2) = M\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$$

Bármely két magasságvonal helyes felírása 7 pont

A metszéspont, azaz a magasságpont meghatározása 6 pont

7. Szorozzuk meg $\cos x$ -szel az egyenletet.

(Ha akarja kezdheti a kikötéssel is. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ha nem köt ki, akkor a végén kell ellenőriznie.) Átrendezve kapjuk, hogy

$$\cos^2 x + \sin^2 x + \sin x \cos x + \sin 2x \cos x = 1$$

$$1 + \sin x \cos x + 2 \sin x \cos^2 x = 1$$

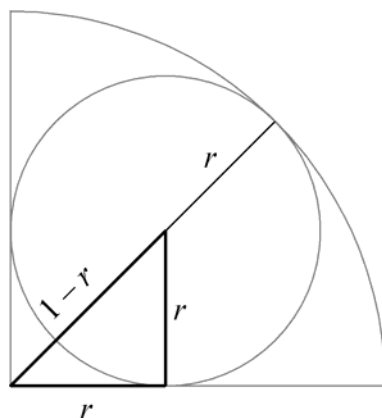
$$\sin x \cos x (1 + 2 \cos x) = 0$$

Helyes átrendezések után helyes egyenlet 7 pont

Ha $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ha $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2l\pi$, vagy $x = \frac{4\pi}{3} + 2m\pi$, $l, m \in \mathbb{Z}$.

Helyes gyökök felírása 5 pont

8. Legyen a negyedkör sugara 1, a beleírt kör sugara r . Az ábra alapján



$$\sqrt{2}r = 1 - r \Rightarrow r = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$

Helyes kapcsolat felírása bármely módon (pit-tétel, sin, cos, ...) 7 pont

A területek aránya

$$\left(\frac{1}{1 + \sqrt{2}} \right)^2 : \frac{1}{4} \approx 0,6863 \Rightarrow 68,63\%$$

6 pont