Matematika felmérő dolgozat 2007. szeptember 3.
ELTE TTK FIZIKA szakosok részére

1. Oldja meg az egyenleteket a valós számok halmazán!

a) $\log_5(x+1)+\log_5(x-1)=\log_5 8+\log_5(x-2)$ (7 pont)

b) $3+4\cos x+\cos 2x=0$ (7 pont)

2. Oldja meg az egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$(x^2-18x+77)\cdot\sqrt{10-x}\geq 0$ (10 pont)

3. Két üzletben ugyanolyan nadrágot árulnak. Az egyik boltban 12000 forintért, a másikban 25%-kal drágábban. Mivel a második boltban nem fogyott a nadrág, ezért 50%-kal leárazták. Hány százalékkal kell az első boltban leszállítani a nadrág árát, ha ugyanannyiért akarják adni, mint a másik üzletben? (10 pont)

4. Egy kockát kétszer feldobunk. Melyik valószínűbb: az, hogy a dobott számok összege páros, vagy pedig az, hogy ez az összeg páratlan? (10 pont)

5. Egy négyzet két csúcsa a derékszögű koordináta rendszerben. $P(-3; 2)$ és $Q(-1; -2)$. Mely pontok lehetnek a négyzet további csúcspontjai? (12 pont)

6. Határozza meg, melyek azok a háromszögek, amelyekben az oldalak mértani, a szögek számtani sorozat egymás után következő elemei. (12 pont)

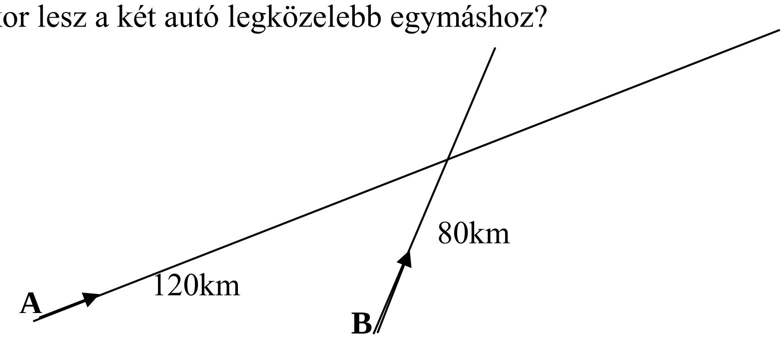
7. Egy 6×6 mezőből álló sakktáblát hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedtünk be. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar el. Bizonyítsuk be, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté. (15 pont)

8. Az alábbi ábrán látható két út 60°-os szögben metszi egymást. A két úton egy-egy autó halad állandó sebességgel, az *A* autó sebessége 80km/h, a *B* autóé 100km/h. Pontosan délben az *A* autó a kereszteződés előtt 120km-rel, a *B* autó 80km-rel található. A kereszteződéshez érve mindkét autó (lassítás nélkül) egyenesen folytatja útját.

a) Mikor érnek az autók a kereszteződéshez? (3 pont)

b) Délben mekkora távolságra van a két autó egymástól? (A távolságuk légvonalban értendő.) (4 pont)

c) Mikor lesz a két autó legközelebb egymáshoz? (10 pont)



A dolgozat megírására 120 perc áll rendelkezésre. Ennek során zsebszámológépet és függvénytáblát használhatsz. Minden egyéb segédeszköz használata tilos!
A kijavított dolgozatok megtekinthetők 09.06-án (csütörtökön) 10h-12h-ig a Déli épület 3.219 szobában

A dolgozatok értékelése:

0-49 pont nem felelt meg
50-79 megfelelt
80-100 kiválóan megfelelt

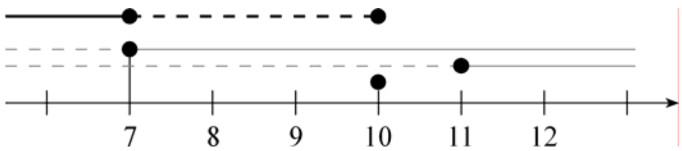
MEGOLDÁS, javítási pontozási segédlet

Alapértelmezésként minden feladatra az arra járó pontszám, annak fele, (néhány helyen harmada, értelemszerűen x-ed része) illetve 0 pont adható. Elszámolás, illetve csekély hiba esetén 1-2 pont levonás jár az adott résznél.
Egyes lehetséges részpontszámokat szemléltet a következő pontozás.

1.a) A logaritmikus azonosságok helyes alkalmazása után az $x^2 - 8x + 15 = 0$, másodfokú egyenlet vagy azzal ekvivalens alak *4 pont*
Ennek a két megoldása $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Mindkettő megoldás, amiről vagy behelyettesítéssel vagy kikötésekkel meg kell győződnie. *3 pont*

b)Átrendezve kapjuk, hogy $2\cos^2 x + 4\cos x + 2 = 2(\cos x + 1)^2 = 0$, *eddig 4 pont*
$x = \pi + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$. Ha valaki fokokban adja meg, annak is örüljünk. *még 3 pont*

2. Szorzattá alakítva $(x-7)(x-11)\sqrt{10-x} \geq 0$.
Ábrázolgatva mi hol pozitív, illetve értelmes $x \leq 7$



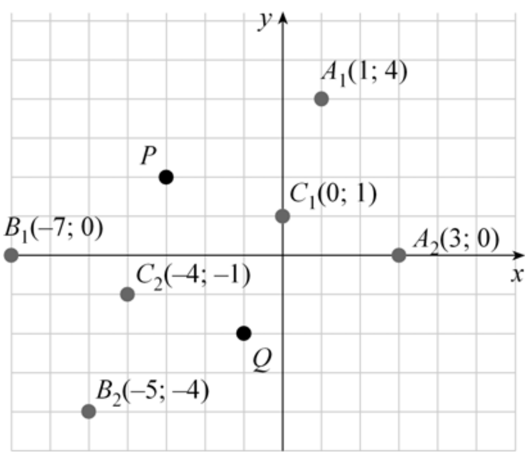
Értelemszerűen az esetleges szorzattá alakítás 2 pont, (ugyanolyan jó, ha valaki parabolaként tekint az első részre, de a gyökökre természetesen akkor is szükség van) az ábrázolás vagy azzal egyenértékű indoklás tényezőnként 2-2 pont, az összesítés és a végső megoldás újabb 2-2 pont.

3.

1 bolt	2 bolt	
12000	12000 + 25% = 15000	*2 pont*
12000 – 7500 = 4500 4500/12000 = 0,375, **37,5%**-kal kell leértékelni.	15000-nek az 50%-a 7500	*4 pont* *4 pont*

4. Az első dobás után egyértelmű, hogy a második dobás dönti el a paritást, ami fele-fele eséllyel páros illetve páratlan, tehát $P(\text{összeg páros}) = P(\text{összeg páratlan}) = 1/2$.
Az összes eset felsorolása, vagy logikai indoklás a páros illetve páratlan esetre 3-3 pont, az egyes valószínűségek felírása 2-2 pont.

5. Lásd az ábrát, az alábbi 3 megoldás lehetséges.



Az egyes esetek helyes indoklása és kiszámítása 4-4-4 pont.

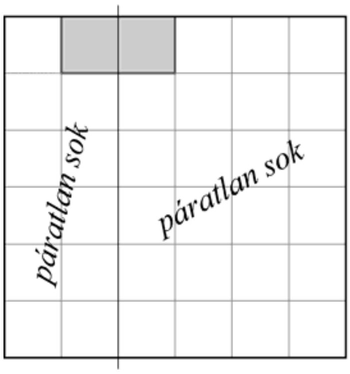
6. Legyenek a háromszög oldalai 1, q, q^2, ahol feltehetjük, hogy $q \geq 1$.
Ha a háromszög szögei számtani sorozatot alkotnak, akkor a középső szög 60°. Ez van a q hosszúságú oldallal szemben. Erre felírva a cos tételt

$$q^2 = q^4 + 1 - 2\cdot 1\cdot q^2\cdot\cos 60°,\ \text{rendezve}\ q^4 - 2q^2 + 1 = (q^2-1)^2 = 0 \Rightarrow q = 1.$$

Azaz a háromszög szabályos.

Ha jól jelöl és indokol, az 4 pont.
A cos tétel felírása és rendezése 4 pont.
A megoldás és annak indoklás 4 pont.

7. Bárhogy is teszünk le egy dominót, annak középvonala az ábrának megfelelően két részre vágja a táblát. Ekkor azonban a tábla mindkét fele páratlan sok négyzetet tartalmaz, azaz ha le akarom fedni 1×2-es dominókkal, akkor ugyanazt a középvonalat még egy dominóval le kellene fednem. Összesen 5 vízszintes és 5 függőleges vonalat kell tehát lefednem 2-2 dominóval. Ez 20 dominó lenne, egy táblára azonban csak 18 dominó helyezhető el. Ez nem lehetséges, tehát biztosan van olyan vonal, amelyik nem vág el dominót.



Bármely jó ötlet, amely kecsegtet némi reménnyel 5-5 ponttal jutalmazható.

8. a) Az **A** autó 120 / 80 = 1,5 h, azaz 13h 30m-kor ér a kereszteződéshez.
A **B** autó 80 / 100 = 4/5 h = 48m, azaz 12h 48m-kor ér a kereszteződéshez.

3 pont

b) Legyen a két autó távolsága x. A cos tétel alapján

$$x^2 = 120^2 + 80^2 - 2\cdot 120\cdot 80\cdot\cos 60° = 11200 \Rightarrow x \approx 105{,}83\ \text{km}$$

4 pont

c) Jelöljük t-vel az indulás óta eltelt időt. A távolság négyzetét a b) feladathoz hasonlóan felírhatjuk,

$$x^2 = (120-80t)^2 + (80-100t)^2 - 2\cdot(120-80t)\cdot(80-100t)\cdot\cos 60° =$$
$$= 8400t^2 - 16800t + 11200$$

Ez a (0, 4/5) intervallumon szig. monoton csökkenő, tehát amíg a **B** autó eléri a kereszteződést, addig a távolságuk csökken.
Írjuk fel a távolság változását a (4/5; 3/2) intervallumra is.

$$x^2 = (120-80t)^2 + (100t-80)^2 - 2\cdot(120-80t)\cdot(100t-80)\cdot\cos 120° =$$
$$= 8400t^2 - 16800t + 11200$$

Nem meglepő módon ugyanazt a kifejezést kapjuk mint az elébb. Minimumra vagy a parabolából, vagy deriválásból a t = 1 h adódik, ekkor a minimális távolság $x \approx 52{,}92$ km. Azaz a minimum 12 perccel az után következik be, hogy a **B** autó elhagyja a kereszteződést.

A távolság helyes felírása az idő függvényében 6 pont
A helyes minimum megadása 4 pont